GIUSEPPE ZINGALES

MISURE ELETTRICHE

Metodi e Strumenti

INDICE

PREFAZIONE ALLA NUOVA EDIZIONE

Il costante favore con cui molti Colleghi continuano a utilizzare e raccomandare, per lo svolgimento del loro corso, il mio testo di Misure Elettriche, mi ha indotto a proporne, con la UTET Libreria, una nuova edizione specialmente dedicata agli studenti.

In questa occasione, non essendo tecnicamente possibile operare a breve termine molti rimaneggiamenti, mi sono limitato a un aggiornamento dei paragrafi relativi alle unità elettriche e a una più dettagliata trattazione di alcuni aspetti delle misure numeriche, parte per la quale il mio ringraziamento va al prof. C. Narduzzi.

Il libro resta, in sostanza, un testo adatto a un corso base di Misure Elettriche, quale viene oggi svolto nelle Facoltà d'Ingegneria italiane; esso segue, per molti argomenti, una linea tradizionale basata sui princìpi fondamentali dell'Elettrotecnica; questa impostazione si è dimostrata efficace nel guidare lo studente nelle applicazioni di laboratorio, che, nel mio insegnamento, hanno sempre seguito da presso le lezioni svolte in aula.

La trattazione parte perciò illustrando i princìpi generali delle misure (cap. I) e i fondamenti della metrologia primaria, in particolare di quella elettrica (cap. II); viene poi illustrato il funzionamento degli strumenti elettromeccanici (cap. III), di quelli elettronici (cap. IV) e delle principali apparecchiature ausiliarie (cap. V).

I metodi di misura in corrente continua e alternata a bassa frequenza sono trattati, in modo il più possibile unitario, nei capitoli VI (dedicato alle misure sui circuiti a regime) e VII (dedicato ai metodi di confronto); l'ultimo capitolo descrive varie applicazioni particolari, come alcune tarature, le misure magnetiche e le prove su base statistica.

Nei limiti imposti dalla didattica, si è dovunque cercato di fornire allo studente un'impostazione generale, tale da consentirgli di approfondire facilmente poi, nella sua successiva attività professionale, gli aspetti più moderni e specialistici delle misure.

G.Z.

Capitolo I

ELEMENTI DI TEORIA DELLE MISURE

1-1. Fondamenti.

1-1,1. *Definizione di misura.*

Il concetto di misura di una grandezza ha la sua più lontana origine nel confronto diretto fra attributi corrispondenti di corpi o di fenomeni diversi: questo oggetto è più lungo, più freddo, più resistente di quello.

Per poter dar luogo ad una misura in senso proprio, occorre poter stabilire, fra le grandezze poste a confronto, non solo delle semplici uguaglianze o disuguaglianze, ma delle relazioni di proporzionalità e di componibilità; per esempio, il peso dell'oggetto A è doppio di quello dell'oggetto B, in quanto uguale al peso di due esemplari uguali a B. In tal modo è possibile associare ad ogni singola grandezza un numero (valore) in modo tale che le relazioni fra grandezze dello stesso tipo possano essere espresse mediante le relazioni fra i numeri loro associati.

In particolare il numero 1 è associato, per ogni insieme di grandezze omogenee, ad una di esse, che può essere scelta con un certo grado di arbitrio, e che rappresenta l'*unità di misura* per quel tipo di grandezza.

Il valore di una grandezza può quindi essere definito come il numero che esprime il rapporto fra la grandezza considerata e la corrispondente unità; si chiama *misura* [1] il processo sperimentale attraverso cui si cerca di determinare tale numero.

I valori misurati esprimono quantità scalari, eventualmente dotate di segno.

---

[1] Il termine « misura » viene spesso impiegato indifferentemente per esprimere sia il processo (altrimenti detto anche misurazione) che il valore misurato.

1-1,2. *Scopo di una misura.*

Una misura consente di conoscere e descrivere quantitativamente una grandezza che fa parte del fenomeno (o sistema) che interessa. Questa conoscenza — da sola o in unione con altre simili — inserita in un precostituito modello del sistema, deve consentire di prevederne il comportamento in condizioni in generale diverse da quelle in atto al momento della misura: in campo industriale, assicura l'intercambiabilità fra prodotti di diversa origine, la loro attitudine a fornire determinate prestazioni; consente di controllare e dominare un processo, per rivolgerlo verso i fini desiderati, eccetera.

Come ogni descrizione, la misura può essere un'informazione utilizzabile solo fra due determinati soggetti, avere cioè carattere essenzialmente convenzionale. Con l'aumentare dei soggetti interessati, la misura deve invece necessariamente assumere validità più ampia, ossia essere riferita a campioni, anche convenzionali, ma identici ed accettati universalmente.

Analogamente, si potrà dire che, a seconda dello scopo per cui è eseguita, la misura dovrà fornire delle adeguate garanzie di attendibilità e di completezza; il concetto di misura non può perciò essere disgiunto dalla definizione della sua «qualità» (vedi 1-2).

1-1,3. *Esecuzione di una misura.*

L'esecuzione di una misura richiede, in generale, fasi diverse di impostazione teorica, di traduzione dei principi in atti operativi, di elaborazione e critica dei risultati, tutte ugualmente importanti per poter dare al valore misurato il significato e l'affidamento che gli sono propri.

L'impostazione teorica richiede una preventiva conoscenza, o quanto meno una *stima*, della natura ed entità dei fenomeni in gioco; ne consegue la scelta del «*metodo di misura*» ossia del principio in base al quale si potrà mettere in evidenza la grandezza da misurare. La realizzazione pratica di questo metodo richiederà la scelta di opportuni apparecchi o *strumenti di misura*, il loro assemblaggio e successivo funzionamento.

In questo volume, si darà rilievo ai metodi elettrici, a quei principi cioè che comportano la misura o l'impiego di grandezze elettriche (tensioni, correnti, resistenze, capacità ecc.); le possibilità offerte da questi metodi dipendono tuttavia in modo notevole dalle caratteristiche fisiche degli apparecchi usati, caratteristiche che vengono di continuo migliorate con l'impiego di opportuni perfezionamenti tecnologici.

L'elaborazione serve a presentare il risultato delle varie operazioni nella forma più corretta e più efficace per le successive utilizzazioni; essa comprende anche la valutazione dei limiti di attendibilità e, in generale, di qualità del risultato stesso.

1-1,4. *Grandezze misurabili.*

La definizione di misura, riportata in 1-1,1, non può essere sempre immediatamente applicabile a tutte le grandezze fisiche.

Si dicono grandezze direttamente misurabili quelle per le quali si può definire e realizzare fisicamente un'operazione di somma (p. es. lunghezze, forze, cariche elettriche), e conseguentemente applicare il concetto di rapporto nei riguardi di un campione.

Esistono altre grandezze, dette classificabili, a cui si possono applicare uguaglianze e disuguaglianze, ma per le quali non ha senso il rapporto numerico (ad esempio temperatura, durezza, ecc.); anche ad esse può però venire associato un numero, rapportandole a scale convenzionali, con un'estensione del concetto di unità di misura, dato in 1-1,1.

Si tratta infatti di attribuire ad un insieme ordinato di grandezze fisiche ($C_1, C_2, ..., C_n$) il significato di scala di valori, associando ad ognuna di esse un numero progressivo ($N_1, N_2, ..., N_n$) di riferimento. La posizione della grandezza da misurare, valutata mediante criteri di uguaglianza o disuguaglianza rispetto alla scala delle C_i, consente di associarla con il valore di N_i cui è più prossima o di inserirla nella scala, per mezzo di interpolazioni (p. es. scala delle durezze, dei colori, ecc.).

Alcune di queste grandezze possono divenire misurabili se si considerano le loro variazioni od intervalli (per esempio i salti di temperatura).

Esistono infine altre grandezze che sono misurabili solo *indirettamente*, ossia attraverso la misura di più grandezze, a cui sono legate da una legge fisica o dalla loro stessa definizione (p. es. la resistività di un conduttore, determinata attraverso misure di resistenza, lunghezza, sezione).

Un altro criterio di classificazione per le grandezze da misurare può essere assunto in base al loro contenuto energetico: sono grandezze *attive* quelle che comportano una certa quantità di energia, che può in parte essere ceduta durante il processo di misura; tipico caso, nelle misure elettriche, le tensioni e le correnti. Sono invece grandezze *passive* quelle che, non essendo associate ad una energia propria, devono esserne fornite per mezzo di una sorgente esterna (ad esempio, una resistenza non si può misurare se non facendola percorrere da corrente).

1-1,5. *Schema logico di una misura.*

Come deriva dalla definizione datane in 1-1,1, una misura comprende più stadi, che possono essere sintetizzati in uno schema a blocchi del tipo

di fig. 1-1. Esso mette in evidenza, in primo luogo, il fenomeno fisico F, da cui proviene la grandezza che si vuole misurare X; questa viene trasferita ad un apparecchio di misura A, il quale ha il compito di confrontarla con un campione C, che costituisce l'unità di riferimento omogenea alla grandezza X. Dal confronto, si ottiene il risultato R della misura, che deve essere reso esplicito e comprensibile all'operatore, mediante un opportuno organo di visualizzazione (o lettura) L. Il valore misurato M può quindi essere inviato a successive manipolazioni (elaborazione) il cui risultato finale può portare a delle *decisioni* che dipendono dal valore M, a seconda che esso sia interno od esterno ad un intervallo prefissato.

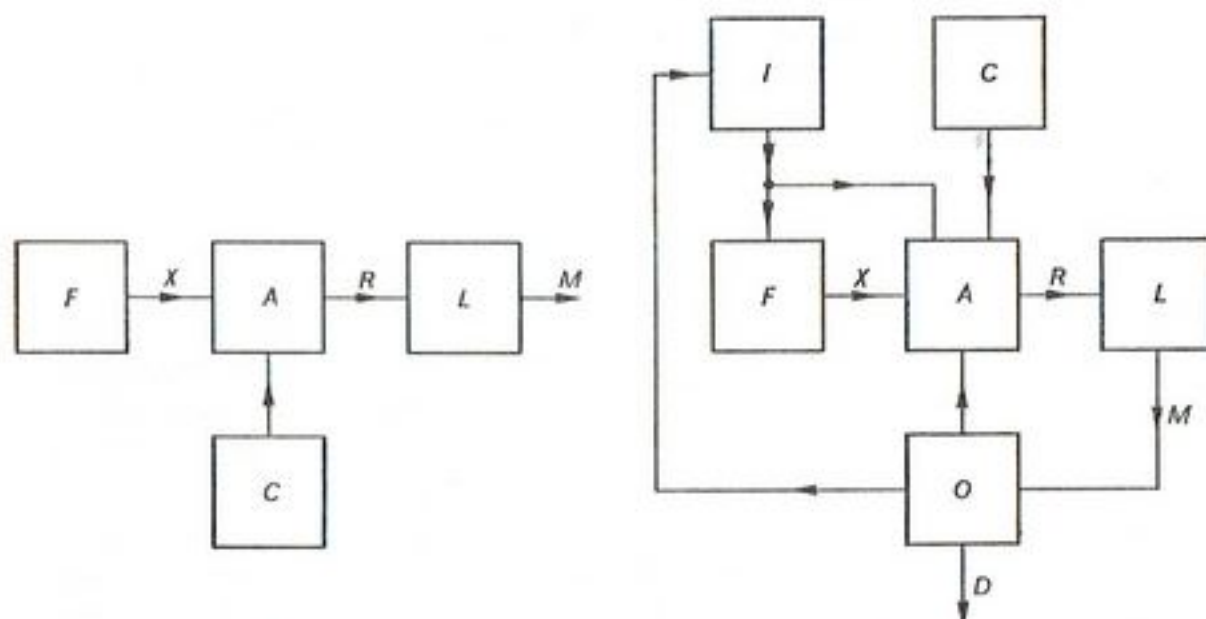



Fig. 1-1 Fig. 1-2

Lo schema predetto non è tuttavia completo, se non si considera la presenza dell'operatore O (fig. 1-2); in linea di principio, il suo compito può essere solo quello di raccogliere le informazioni fornite da L, per avviarle alla loro successiva destinazione D; egli può tuttavia intervenire anche su altri stadi del processo; agendo, ad esempio, sulle *grandezze d'influenza I*, che sono quelle che modificano il fenomeno fisico in esame, in modo che esso si svolga in condizioni prefissate o, quantomeno, ben definite; intervenendo, in modo analogo, sull'apparecchiatura di misura, ovvero compiendo direttamente su di essa le operazioni necessarie per realizzare il voluto confronto con il campione; eseguendo, sui risultati delle operazioni, elaborazioni, registrazioni e così via.

Il riconoscimento del ruolo delle singole operazioni dello schema di figura 1-2 è importante non solo quando esse vengano eseguite direttamente dall'operatore, in base alla sua esperienza ed al suo intuito, ma soprattutto

quando esse debbano essere svolte da sistemi automatici, guidati da opportuni programmi, che sostituiscono l'operatore nel prendere le decisioni necessarie. L'evoluzione tecnologica consente infatti di costruire della strumentazione automatica, in cui l'intero procedimento di misura, comunque complesso (dalla inserzione e regolazione dei vari componenti alla scelta della portata degli strumenti, alla loro taratura, all'acquisizione ed elaborazione dei risultati) è governato da un programma prestabilito, capace di eseguire sequenze di comandi, controlli e decisioni, in numero anche elevato e con velocità largamente superiore a quella di un operatore umano.

Alcuni elementi dello schema di figura 1-2 possono non apparire in modo evidente; per esempio, in un comune strumento indicatore, come un amperometro, il confronto fra l'indicazione e il campione di corrente avviene all'atto della taratura dello strumento ed è garantito dalla costanza di alcune caratteristiche costruttive; così, in uno schema ancor più semplificato, ci si può ricondurre alla figura 1-3 dove è rappresentato solo il passaggio dalla grandezza da misurare al valore misurato.

Fig. 1-3

Questa semplificazione dà per scontate alcune relazioni logiche, che non sono sempre evidenti o facilmente verificabili. Essa ammette, in primo luogo, che la grandezza misurata X sia quella che caratterizza il fenomeno fisico F che intendiamo osservare, che sia omogenea al campione C scelto per la misura, e tale da contenere tutte le informazioni che desideriamo sul fenomeno F e solo quelle. Della validità di tale ipotesi si può giudicare solo attraverso una sufficiente conoscenza, teorica e sperimentale, del fenomeno stesso, conoscenza che trova la sua espressione in un modello nel quale siano compiutamente rappresentate, mediante relazioni analitiche, le interazioni fra le varie grandezze coinvolte nel fenomeno studiato.

In secondo luogo, si ammette che la presenza dell'apparecchio di misura non abbia modificato il valore della grandezza da misurare e lo stesso fenomeno F, da cui essa ha origine.

In terzo luogo, si ammette che l'operatore, nell'utilizzare il valore misurato M, sia in grado di attribuirgli correttamente il suo significato.

Tutto ciò, se può apparire ovvio per le misure tradizionali, può non verificarsi in altri casi e non deve pertanto essere dimenticato, specie di fronte alle grandi facilitazioni che le attuali tecniche di misura sembrano offrire.

Nella maggior parte dei casi, nel presente volume, si considereranno verificate le premesse sopra indicate, soffermandosi invece sui metodi e sugli strumenti che consentono di riportarsi allo schema semplice di fig. 1-3, indicando con quali principi o con quali limiti il risultato di una misura possa corrispondere al valore della grandezza da misurare.

Questo procedimento può modificare, entro certi limiti, il concetto stesso di misura; essa può infatti pensarsi, in modo operativo, come l'associazione dello stato di una grandezza fisica con un numero che, inserito nelle relazioni proprie del modello del sistema allo studio fornisce un'indicazione conforme al suo reale comportamento.

1-2. **Qualità di una misura.**

1-2,1. *Errori e correzioni.*

Nello schema della figura 1-2, l'operatore rileva il valore M e gli attribuisce il significato di valore numerico proprio della grandezza fisica da misurare. Ciò sarebbe lecito, a rigore di termini, solo nel caso in cui il processo di misura fosse perfetto in ogni sua parte, il che è impossibile, per le limitazioni proprie sia dei principi che dei mezzi utilizzati.

Pertanto, anche ammesso che esista, per la grandezza da misurare, un valore ideale V ben definito e costante (detto perciò anche *valore vero*), il valore misurato M sarà in generale diverso. Si dirà allora che esiste un *errore*:

$$E = M - V \qquad [1\text{-}1]$$

positivo, se il valore misurato è maggiore del vero (nel qual caso si parla correntemente di errore in più), negativo in caso contrario (errore in meno).

Alcune delle cause di errore possono essere note per via teorica o sperimentale e l'errore corrispondente può esser determinato in grandezza e segno; si può allora definire la *correzione* da apportare al valore misurato cioè la quantità C tale che sia:

$$V = M + C\,. \qquad [1\text{-}2]$$

Risulta dalle [1-1] e [1-2]:

$$C = -E$$

ossia la correzione è di valore uguale e di segno opposto all'errore.

Qualora una o più di tali correzioni sia ignorata od omessa, il valore misurato risulta diverso dal valore vero; la misura dicesi tanto più *esatta* quanto più prossimi sono i due valori.

In altri casi, anche se non è possibile stabilire l'entità dell'errore, in modo da poter eseguire delle correzioni, si conoscono o si possono valutare i limiti, dovuti all'imperfezione dei mezzi impiegati; ogni valore risulta allora determinato nell'interno di una *fascia d'incertezza*; è cioè:

$$M - E < V < M + E \qquad [1\text{-}3]$$

relazione che si scrive anche nella forma:

$$V = M \pm E$$

che corrisponde alla [1-1], quando sia indeterminato il segno da assegnare ad E.

Il valore assoluto di E determina l'ampiezza della fascia d'incertezza: quanto minore è tale valore, tanto più la misura può dirsi *accurata*, cioè con risultato ben definito; esso limita il numero di *cifre significative* con cui può essere scritto il valore misurato. Per tale scrittura non esistono regole definitive; è tuttavia opportuno fare in modo che la fascia d'incertezza, se non è specificatamente indicata, agisca sull'ultima cifra. Spesso, se si devono eseguire vari calcoli, è utile tenere una cifra significativa in più del necessario, arrotondando poi il risultato finale.

Sempre più spesso le correzioni possono oggi essere ottenute attraverso una simulazione al calcolatore del fenomeno in esame e del relativo sistema di misura, determinando l'effetto esercitato su di essi dalle grandezze d'influenza.

La [1-3] corrisponde anche a fissare i limiti, inferiore ($M - E$) e superiore ($M + E$), dell'insieme che comprende il valore V; due insiemi si dicono congruenti se possiedono un sottoinsieme comune. La proprietà di congruenza non è però transitiva (A congruente con B, B congruente con C, non comportano che sia A congruente con C).

Si noti che il problema della scelta del numero di cifre significative perderebbe importanza se ogni misura fosse indicata con i limiti, inferiore e superiore, della sua fascia d'incertezza; ciò comporta tuttavia un notevole appesantimento delle operazioni.

Si noti anche che, poiché anche il comportamento di un sistema non è determinabile che nell'interno di una fascia d'incertezza, si può pensare che non esista, in un dato momento, un solo valore V della grandezza da misurare, ma che esso sia in generale indistinguibile tra i valori di un insieme più o meno ampio (1).

Si riconosce facilmente che una misura può fornire un risultato accurato, ma non esatto; al contrario, per poter essere esatta entro un certo grado, una misura dovrà anche essere convenientemente accurata. Spesso entrambi questi requisiti vanno sotto il nome generico di *precisione* (2).

Nei casi in cui può essere sufficiente un risultato « convenzionale » nel senso che interessa conoscere non tanto un astratto valore vero, di validità generale, ma solo una definizione schematica, adatta a descrivere

---

(1) Ciò corrisponde a stabilire una corrispondenza fra la grandezza fisica oggetto di misura ed un sottoinsieme di valori numerici, attraverso una relazione logica, più che un'uguaglianza matematica. Anziché la teoria classica degli insiemi, può essere convenientemente usata quella degli insiemi sfumati (*fuzzy set*), in cui tale corrispondenza è espressa ancor meno rigidamente.

(2) Per quantificare la precisione si usa correntemente il riferimento al valore massimo dell'errore: ciò comporta, di conseguenza, che la precisione risulta tanto più elevata, quanto minore è il numero con cui è espressa.

quantitativamente la grandezza in gioco, in modo (1-1,2) che essa sia utilizzata correttamente, la fascia d'incertezza rappresenta il campo dei valori che possono essere ritenuti equivalenti ai fini dell'impiego.

Lo studio dei metodi e degli apparecchi di misura comporta la determinazione, almeno sul piano teorico, degli errori che sono loro propri, nelle diverse condizioni d'impiego. Dal punto di vista sperimentale, l'errore proprio di un apparecchio può essere determinato dal confronto con un altro apparecchio di caratteristiche molto migliori.

Per ottenere una misura di qualità occorrono quindi buone conoscenze sui fenomeni in gioco e apparecchiature di pregio, usate con opportune cure. Nelle applicazioni tecniche, questi fattori, che comportano corrispondenti oneri di spesa e di tempo, vanno commisurati all'utilità dei risultati conseguibili.

1-2,2. *Errori nelle misure ripetute.*

Un elemento necessario, per assicurare la qualità di un risultato, è la sua riproducibilità: ripetendo più volte la misura di una grandezza, che si suppone definita e costante, in condizioni che si considerano equivalenti, essa dovrebbe dar luogo sempre allo stesso valore, che dovrebbe coincidere con il valore vero della grandezza misurata.

Ciò non avviene, sia per l'imperfezione degli apparecchi utilizzati, sia per gli effetti di cause esterne non conosciute o non controllate; si possono definire allora aprioristicamente vari tipi di errore:

a) *gli errori sistematici*, che si presentano, ripetendo la misura, sempre con lo stesso segno e la stessa ampiezza;

b) *gli errori fortuiti* (o casuali o accidentali), che si presentano, nelle successive misure, con ampiezza e segno variabili.

A queste due categorie va aggiunta, per completezza, una terza, quella degli *errori grossolani* che sono dovuti generalmente a disattenzione dell'operatore, e che possono portare ad uno o più valori particolarmente divergenti dall'insieme degli altri.

Non è evidentemente possibile, in una serie di misure, per quanto estesa, mettere in rilievo l'esistenza e l'entità degli errori sistematici; è invece possibile, sotto determinate ipotesi, ridurre l'effetto degli errori fortuiti e valutare i limiti d'incertezza da cui sono affetti i risultati, nelle condizioni esistenti durante le misure (vedi 1-8).

Si noti che la stessa causa può dar luogo in alcuni casi ad errori sistematici, in altri ad errori fortuiti; basti pensare agli errori propri degli strumenti impiegati in una misura: essi sono una causa di errore sistematico qualora si usino sempre gli stessi strumenti nelle stesse condizioni d'impiego; ripetendo le misure con strumenti analoghi, ma diversi, o in altre condizioni, gli errori strumentali si presentano come fortuiti.

La presenza di errori sistematici in una misura può quindi essere messa in luce ed eventualmente ridotta, ripetendola in modo tale da trasformare gli errori in fortuiti, ma, in generale, la loro entità può essere valutata solo in base a opportune considerazioni teoriche.

1-2,3. *Cause di variabilità dei risultati.*

Le considerazioni precedenti ammettono l'esistenza di un valore vero V, che sia ben definito e costante: la presenza di risultati diversi M_i, in successive misure della stessa grandezza, viene perciò attribuita ai diversi valori assunti dagli errori E_i.

Occorre però tener presente che, nella relazione [1-1], scritta per la misura i-esima:

$$M_i = V_i + E_i$$

si può conoscere in generale solo il valore di M_i ed attribuire al valore assoluto degli errori E_i un limite superiore.

Se, pertanto, i valori di M_i non escono dalla fascia d'incertezza che può essere attribuita ai mezzi impiegati, V_i può ritenersi costante fra una misura e l'altra, ovvero, più correttamente, nulla può dirsi sulle sue variazioni, senza ricorrere a misure più accurate.

Quando i valori di M_i, ottenuti in successive misure, escono dai limiti sopra indicati, occorre tenere in conto le variazioni possibili del valore V_i, sulle quali si possono avanzare ipotesi diverse. In primo luogo, la teoria o la conoscenza del fenomeno, che è oggetto di misura, possono indicare la possibilità che la grandezza V_i vari, da una misura all'altra, come funzione nota di altre grandezze I_i (grandezze d'influenza), che possono essere misurate. In questo caso si può far riferimento ad un unico valore vero, convenzionale, V_0, che esisterebbe per un definito insieme di valori I_0 delle grandezze d'influenza. Ai valori misurati di V_i si applica allora una correzione, dello stesso tipo di quella definita da [1-2], in funzione della differenza fra i valori misurati I_i e quelli di riferimento I_0, delle grandezze d'influenza.

In altri casi, il valore di V_i varia, da una misura all'altra, in un modo che non si sa precisare a priori, o in funzione di grandezze che non possono essere misurate. In questo caso, non è evidentemente possibile rappresentare la grandezza V con un solo, ben definito, valore numerico: si ha piuttosto una *distribuzione* dei valori V_i. In molti casi questa distribuzione, aumentando il numero N delle misure, assume andamenti che possono essere convenientemente descritti da un numero limitato di valori

tipici; spesso, avanzando delle ipotesi sul tipo di queste distribuzioni (per esempio ammettendo che seguano le leggi dei fenomeni puramente casuali) a questi valori può essere attribuito un significato anche quando le misure siano in numero limitato, come necessariamente accade nella maggioranza dei casi. I criteri di analisi delle distribuzioni sono forniti dalla *statistica descrittiva*.

Nel caso più generale, sia V_i che E_i sono variabili da una misura all'altra; ci si riconduce facilmente ai casi più semplici, sopra indicati, qualora l'entità delle rispettive variazioni sia molto diversa, in modo da poter ritenere l'una trascurabile rispetto all'altra (vedi 1-8,5).

1-2,4. *Errore relativo.*

Per paragonare strumenti e metodi, che misurino grandezze di valore diverso, conviene considerare, anziché l'errore assoluto E, l'*errore relativo*:

$$e = \frac{E}{V} = \frac{M - V}{V}.$$

In generale esso è piccolo e si preferisce esprimerlo in valore percentuale:

$$e\% = 100e = 100\frac{M - V}{V}; \qquad [1\text{-}4]$$

in qualche caso, l'errore può anche essere espresso in per mille (‰) o in parti per milione (ppm)[1] con formule analoghe, a parte la costante numerica, alla [1-4].

I comuni metodi industriali possono ammettere errori dell'ordine del percento, o di alcuni percento, in favore della semplicità e rapidità di esecuzione delle misure. Il progresso tecnico è tuttavia legato alla realizzazione di misure con errori sempre minori; per ottenere un prodotto di qualità, possono essere oggi necessari apparecchi e metodi industriali con errori inferiori al per mille; per la loro taratura e per i confronti con altri prodotti simili, si richiedono campioni di riferimento con errori dell'ordine di qualche centinaio o decina di parti per milione.

Quando il confronto si allarghi a prodotti simili appartenenti a nazioni diverse, anche i singoli riferimenti nazionali devono essere confrontabili fra loro entro qualche parte per milione; si può infatti dire che ogni controllo richieda il passaggio ad un ulteriore ordine di grandezza nella qualità dei metodi e degli apparecchi impiegati.

[1] Per evitare equivoci, possibili soprattutto se si estende il concetto alle parti per miliardo, si ritiene oggi in molti casi preferibile indicare l'errore relativo, evidenziandone i sottomultipli di 10 (per es. $3 \cdot 10^{-6}$ anziché 3 ppm).

Questi diversi ordini di precisione fanno sì che le stesse grandezze d'influenza possono avere, in misure apparentemente simili, importanza molto diversa; il loro effetto sarà infatti da considerare di volta in volta grande o piccolo, con riferimento agli errori ammissibili.

1-2,5. *Propagazione degli errori nelle misure indirette.*

Quando una grandezza x è funzione nota di altre grandezze $a, b, \dots, n$:

$$x = f(a, b, \dots, n) \qquad [1\text{-}5]$$

il suo valore viene ricavato dalla misura di tali grandezze; essendo però ogni valore misurato affetto da errore, questo si ripercuote anche sul risultato della [1-5].

Se gli errori sono sufficientemente piccoli, essi possono considerarsi come degli infinitesimi, di fronte alle rispettive grandezze; ponendo perciò:

$$E_a = da\,;\ E_b = db\,;\ \dots;\ E_n = dn\,,$$

il differenziale totale della [1-5] risulta:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db + \dots + \frac{\partial f}{\partial n}dn$$

e quindi:

$$E_x = \frac{\partial f}{\partial a}E_a + \frac{\partial f}{\partial b}E_b + \dots \frac{\partial f}{\partial n}E_n\,. \qquad [1\text{-}6]$$

Gli errori assoluti delle singole variabili si propagano quindi secondo dei fattori che sono rappresentati dalla derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile considerata.

Questo fattore ha un proprio segno, che si combina con il segno dell'errore E, quando questo sia noto. Nel caso in cui E esprima l'ampiezza di una fascia d'incertezza (segno di E indeterminato) si considera d'abitudine il caso peggiore, sommando i valori assoluti dei termini $(\partial f/\partial n)E_n$ ed estendendo al risultato il significato di limite di fascia d'incertezza.

Alcuni esempi di applicazione sono riportati in 1-2A.

1-2A,1. *Esempi di applicazione.*

Dall'applicazione della [1-6] si possono ricavare alcune regole, utili per l'esame dei casi pratici di maggior interesse.

Esamineremo dapprima il caso di errori di segno determinato:

a) nella somma di due grandezze, l'errore assoluto del risultato è uguale alla somma degli errori assoluti dei vari termini. Posto infatti:

$$x = a + b$$

risulta:

$$E_x = E_a + E_b .$$

Qualora l'errore relativo abbia ugual valore e segno per tutti i termini, esso mantiene tale valore anche nella somma. È infatti:

$$e_x = \frac{E_x}{x} = \frac{e_a a + e_b b}{a + b}$$

che per $e_a = e_b = e$ fornisce anche per e_x il valore e.

Nel caso di differenza, si ha:

$$E_x = E_a - E_b \qquad [1\text{-}7]$$

$$e_x = \frac{e_a a - e_b b}{a - b} ; \qquad [1\text{-}8]$$

b) nel prodotto (quoziente) di due grandezze, l'errore relativo è uguale alla somma (differenza) degli errori relativi.

Posto infatti:

$$x = ab$$

si ottiene dalla [1-6]:

$$E_x = bE_a + aE_b$$

e perciò:

$$e_x = e_a + e_b . \qquad [1\text{-}9]$$

Analogamente si dimostra per:

$$x = \frac{a}{b}$$

la relazione:

$$e_x = e_a - e_b . \qquad [1\text{-}10]$$

Si ricavano inoltre i seguenti corollari:

$$x = a^n ; \qquad e_x = n e_a ;$$

$$x = \sqrt[n]{a} ; \qquad e_x = \frac{1}{n} e_a .$$

c) nel caso in cui si abbia:

$$x = y + \Delta$$

con $\Delta \ll y$, la grandezza:

$$z = \frac{x}{y} = 1 + \frac{\Delta}{y}$$

di valore molto prossimo all'unità, viene determinata con un errore relativo:

$$e_z \simeq E_z = E_{\Delta/y} = \frac{\Delta}{y} e_{\Delta/y} = \frac{\Delta}{y}(e_\Delta - e_y) \qquad [1\text{-}11]$$

che risulta, per l'ipotesi fatta, molto minore degli errori e_Δ ed e_y da cui sono affette le grandezze Δ e y.

Il rapporto fra due grandezze pressoché uguali può quindi essere determinato con un errore molto minore di quello che interviene nella misura delle singole grandezze.

Nel caso in cui il segno dell'errore sia indeterminato, le [1-7] e [1-10] si modificano rispettivamente nelle:

$$E_x = |E_a| + |E_b|$$

$$e_x = |e_a| + |e_b| .$$

Per la [1-7], nel caso particolare di $e_a = e_b = e$, si ha:

$$e_x = e \frac{a + b}{a - b} \qquad [1\text{-}12]$$

dalla quale si riconosce come l'operazione di differenza porti ad ampliare l'incertezza esistente nella misura dei suoi termini, in modo tanto più marcato quanto più questi termini sono grandi rispetto alla loro differenza.

1-2A,2. *Metodi di calcolo approssimato.*

Accade spesso, nel manipolare i risultati di una misura, di dover eseguire dei calcoli con un elevato numero di cifre significative, con conseguente laboriosità delle operazioni. Sebbene ciò non rappresenti oggi un problema, con i calcolatori di cui si può disporre, è utile ricordare che, spesso, i numeri su cui si opera sono sufficientemente prossimi a numeri interi, da poter essere posti nella forma $x_0 + \Delta x$, con $\Delta x \ll x_0$. Giova, in questi casi, per la semplicità e rapidità del calcolo, ricorrere a degli sviluppi in serie di Taylor (o di MacLaurin), mediante i quali si può scrivere, per la generica funzione $f(x_0 + \Delta x)$:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} \Delta x + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]_{x=x_0} \Delta x^2 + \dots \qquad [1\text{-}13]$$

In generale, è possibile trascurare i termini superiori ad un certo ordine, se il loro contributo al risultato è inferiore all'incertezza con cui esso è stato ricavato. Il calcolo eseguito direttamente sui singoli termini (*calcolo con i piccoli numeri*), può essere effettuato, per ognuno di essi, con un numero limitato di cifre significative.

Fra gli sviluppi in serie, che hanno maggiore interesse pratico, si richiamano i seguenti, validi per $\alpha \ll 1$:

$$(1 \pm \alpha)^m \simeq 1 \pm m\alpha + \frac{m(m-1)}{2} \alpha^2 \pm \dots$$

da cui deriva:

$$\frac{1}{1 \pm \alpha} \simeq 1 \mp \alpha$$

$$\sqrt{1 \pm \alpha} \simeq 1 \pm \frac{1}{2}\alpha .$$

Ad esempio, il calcolo del rapporto 1,027/0,995 può così eseguirsi, in modo praticamente immediato:

$$\frac{1{,}027}{0{,}995} = \frac{1 + 0{,}027}{1 - 0{,}005} \simeq 1 + 0{,}027 + 0{,}005 = 1{,}032 .$$

Con un calcolo più completo, da eseguirsi però o manualmente o a macchina, si ottiene 1,03216.

Il valore di un'impedenza, composta da una resistenza da $100\,\Omega$ e una reattanza da $10\,\Omega$ può essere così calcolato:

$$\sqrt{100^2+10^2} \simeq 100\sqrt{1+\frac{100}{10^4}} \simeq 100\left(1+\frac{1}{2}10^{-2}\right) =$$

$$= 100{,}5 \text{ (valore calcolato a macchina: } 100{,}499).$$

Altri sviluppi in serie da ricordare sono i seguenti:

$$\text{sen}\,\alpha \simeq \alpha - \frac{\alpha^3}{6}\,; \qquad \cos\alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

validi sempre per $\alpha \ll 1$.

Gli sviluppi in serie del tipo della [1-13] sono inoltre vantaggiosi quando si debba valutare l'errore commesso nel misurare la $f(x_0+\Delta x)$ anziché la $f(x_0)$: si può infatti allora scrivere:

$$E = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_0} \Delta x + \ldots$$

i termini di grado superiore sono quasi sempre trascurabili, quando si tratti del calcolo di errori, già di per sé piccoli.

1-2A,3. *Rappresentazione grafica.*

Il risultato di una misura in cui compaiano due (o più) grandezze può essere espresso in forma grafica su un opportuno diagramma. A questo proposito conviene ricordare che la scelta della scala per ogni asse deve seguire i seguenti principi:

1) il fattore di scala (unità di dato/unità di grafico) deve essere un numero intero, preferibilmente semplice (multiplo o sottomultiplo decimale di 1, 2 o 5) e tale che l'incertezza di lettura sia minore ma comparabile con l'incertezza propria della misura;

2) l'intervallo dei valori da rappresentare (dal valore minimo al valore massimo dei dati) deve essere tutto contenuto nello spazio disponibile;

3) il fattore di scala deve essere il minimo possibile compatibile con le indicazioni precedenti;

4) l'origine della scala deve essere ottenuta ponendo uguale a zero il maggior numero possibile di cifre significative, compatibilmente con il punto 2.

Esistono algoritmi che permettono di ottimizzare, in base a questi criteri, la trascrizione su plotter di diagrammi dati per punti. La scala va corredata dell'indicazione dei suoi punti principali di riferimento (l'origine, i più importanti valori interi, ecc.) nonché dell'indicazione della grandezza a cui si riferisce e della sua unità di misura, in modo che il grafico risulti facilmente leggibile.

1-3. Principi generali

1-3,1. *Metodi di misura.*

Una volta individuata la grandezza da misurare, per la sua determinazione si possono impiegare in genere metodi diversi, ai quali corrispon-

dono versioni diverse dello schema logico di fig. 1-4. Questi metodi sono caratterizzati dai diversi modi con cui si esegue il confronto fra la grandezza X da misurare e la grandezza di riferimento C, nonché dalle diverse modalità con cui si rileva la *condizione di equilibrio* fra gli effetti di X e C, che consente di stabilire la relazione che intercorre fra essi.

Fig. 1-4

Per limitare gli esempi al caso dei metodi elettrici, citeremo gli *strumenti elettromeccanici*; in essi la grandezza da misurare produce un'azione motrice (fig. 1-5), che viene confrontata con un'azione resistente, generalmente fornita da una molla, funzione della deviazione dell'organo mobile. La posizione di equilibrio di questo corrisponde all'eguaglianza delle due azioni, e stabilisce una relazione fra la deviazione e la grandezza da misurare. Un simile strumento a *deviazione* consente la lettura, più o meno diretta, del valore misurato su un organo di visualizzazione costituito da una scala graduata. Benché occorra attendere che l'equilibrio sia raggiunto, il metodo consente misure rapide e semplici; la sua precisione dipende sia dalla precisione con cui lo strumento è stato tarato, sia dalla costanza delle relazioni che legano le azioni motrici alle grandezze corrispondenti, dalla costanza della posizione di riferimento (zero), dalla facilità di lettura, ecc.

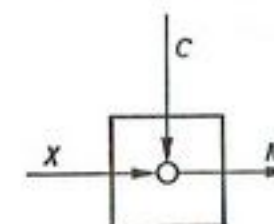
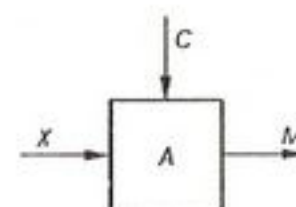



Fig. 1-5
Schema di strumento elettromeccanico: X = azione motrice; C = azione resistente (molla); A = organo mobile; M = posizione d'equilibrio.

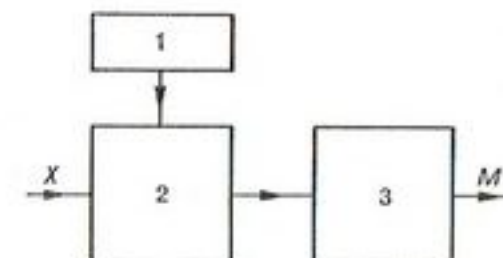



Fig. 1-6
Schema di strumento elettronico: 1 = sorgente ausiliaria; 2 = circuiti elettronici; 3 = organo di lettura o strumento elettromeccanico.

Uno strumento richiede, in generale, che sia spesa una certa potenza che può alterare il fenomeno su cui si opera; ciò può essere in gran parte evitato con strumenti ad alimentazione ausiliaria (fig. 1-6), tipico esempio dei quali sono vari *strumenti elettronici* che comportano in sé uno strumento elettromeccanico.

Negli *strumenti numerici* la misura è riportata al conteggio del numero di operazioni (p. es. gradini) necessari a stabilire l'equilibrio fra la grandezza da misurare ed un campione interno. L'indicazione diretta, in cifre decimali, del risultato (spesso corredato di segno e di virgola) rende la lettura particolarmente semplice e pratica.

Le grandezze X e C possono anche essere messe a confronto diretto misurando la loro differenza (fig. 1-7) (*misura differenziale*); si può vedere facilmente come le limitazioni di precisione proprie dello strumento influiscano in modo tanto più ridotto sulla valutazione di X quanto più piccola è la differenza $X - C$. I metodi più precisi sono perciò i *metodi di zero*;

Fig. 1-7
Schema di metodo differenziale: 1 = elemento che fornisce la differenza $X - C$; 2 = strumento per la misura di $X - C$.

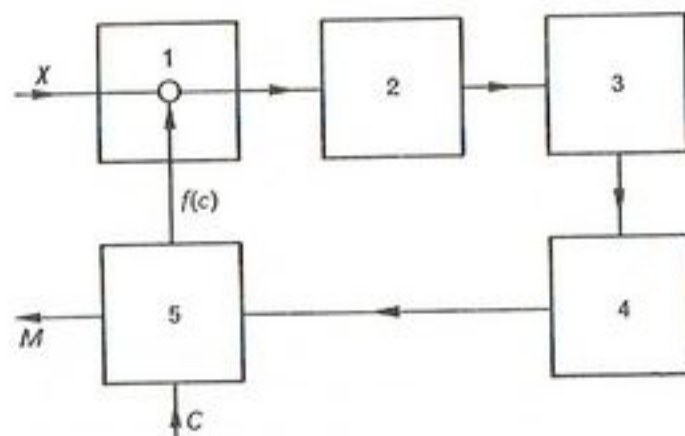
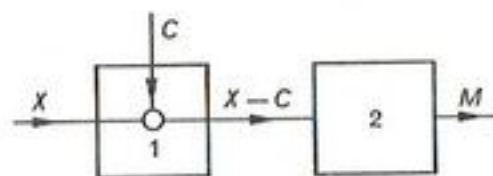



Fig. 1-8
Schema di metodo di confronto: 1 = organo di confronto; 2 = rivelatore di zero; 3 = organo di decisione sul raggiungimento dell'equilibrio; 4 = organo di azione; 5 = organo di manipolazione della $f(C)$.

uno schema di massima è indicato in fig. 1-8 dove la X è confrontata con una funzione nota $f(C)$ della grandezza di riferimento; il risultato del confronto viene rivelato in modo che si possa variare la $f(C)$ fino al raggiungimento dell'equilibrio:

$$X - f(C) = 0 .$$

L'organo che deve mettere in evidenza l'esistenza o meno di questo equilibrio (*rivelatore di zero*) ha evidentemente caratteristiche molto più semplici, sul piano logico, che non uno strumento di misura. La lettura è invece fornita dalla conoscenza della $f(C)$ nelle condizioni di equilibrio. I metodi di zero sono in genere più precisi degli altri; il raggiungimento delle condizioni d'equilibrio può essere delicato e talvolta lento, specie se eseguito manualmente.

1-3,2. *Grandezze variabili nel tempo.*

Per rendere più generale la rappresentazione adottata in figura 1-4, si deve considerare, all'ingresso di un qualsiasi apparecchio di misura, la presenza di un segnale (per noi generalmente di tipo elettrico) che fornisce un supporto fisico alla grandezza che si vuole misurare.

Queste grandezze, o più in generale i segnali che le trasportano, sono in gran parte funzioni del tempo. Chiameremo *deterministica* una grandezza la cui legge di dipendenza dal tempo possa essere precisata, sotto forma di una funzione analitica; saranno invece dette *aleatorie* le grandezze che non possiedono questa proprietà.

I diversi tipi di funzione, atti a rappresentare una grandezza deterministica, possono essere catalogati come in fig. 1-9. Una prima classificazione distingue le grandezze periodiche, quelle quasi-periodiche e quelle transitorie.

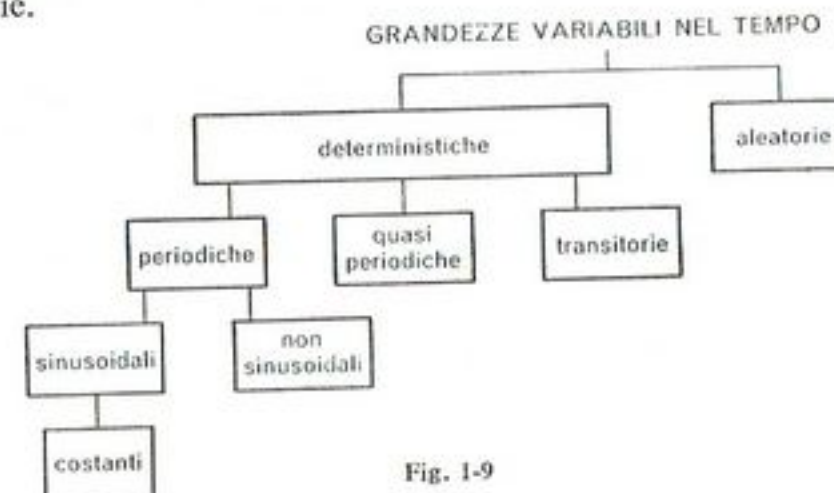



Fig. 1-9

Come è noto, una funzione periodica del tempo, $X(t)$, assume lo stesso valore ogni intervallo costante di tempo (periodo) T, ossia è:

$$X(t) = X(t + kT) \qquad \text{con } k = \text{numero intero};$$

di queste funzioni la più semplice è la funzione sinusoidale, cioè del tipo:

$$X(t) = X_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

caratterizzata dall'ampiezza massima X_M, dalla pulsazione ω (o rispettiva frequenza $f = \omega/2\pi$) nonché da una fase α, che dipende dal riferimento scelto per i tempi. Caso particolare della funzione sinusoidale è una grandezza costante ($\omega = 0$).

Si ricorda che una funzione periodica continua di periodo T può essere sviluppata nella somma di più termini sinusoidali (serie di Fourier):

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_{Mn} \cos(n\omega t + \alpha_n) \qquad [1\text{-}14]$$

dove n assume valori interi, cosicché tutti i vari termini hanno frequenza multipla della fondamentale, di periodo T.

Data una funzione periodica $X(t)$, possono esserle associati, per ogni termine della [1-14], due valori, uno per l'ampiezza X_{Mn} l'altro per la fase α_n, variabili da un'armonica all'altra. Un grafico di questi valori, in fun-

zione della frequenza (fig. 1-10) si presenta come un insieme discontinuo detto spettro. Questo diagramma può estendersi da una frequenza inferiore — che può esssere nulla o è la fondamentale — fino a frequenze teoricamente infinite. In pratica, però, è necessario considerare attentamente quale possa essere lo spettro utile, ossia quale probabilità vi sia, per la legge di variazione della grandezza da misurare, di contenere delle componenti al di sopra (e talvolta al di sotto) di un determinato limite, nonché quale importanza esse possano avere, ai fini della misura, e quale convenienza vi sia ad una loro misura corretta, tenendo conto del fatto che, per una proprietà degli sviluppi in serie per mezzo di funzioni ortogonali, se si limita lo sviluppo all'armonica di ordine r, la deviazione quadratica media fra la funzione originale e la sua rappresentazione in una serie di Fourier limitata:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left[X(t)-\sum_{n=0}^{r}X_{Mn}\cos(n\omega t+\alpha_n)\right]^2 dt$$

è sempre decrescente al crescere di r.

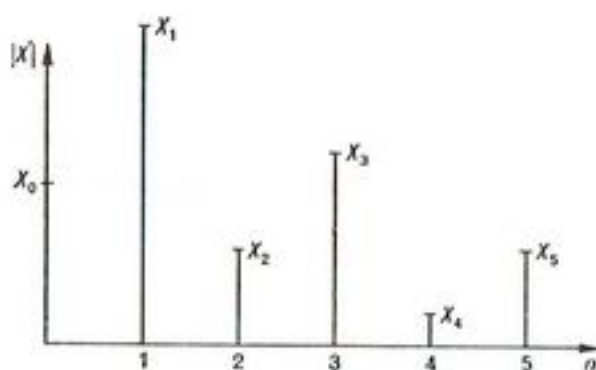



Fig. 1-10

Per ogni segnale variabile periodicamente nel tempo sarà perciò da definire a priori quale sia la *banda di frequenza* che ne comprende l'intero spettro utile.

La serie di Fourier è solo un esempio di serie di funzioni ortogonali nelle quali può essere scomposto un segnale; altre forme (in particolare le funzioni di Walsh che assumono solo i valori ± 1) sono più comode per la rappresentazione nei circuiti elettrici e nei sistemi di calcolo.

La scomposizione di un segnale in una serie di funzioni ortogonali non ha solo valore concettuale, per inquadrarne le caratteristiche, ai fini della scelta delle apparecchiature di misura più opportune; essa ha assunto anche notevole valore pratico in quanto, con i moderni strumenti a microprocessore, tale scomposizione può essere eseguita e visualizzata in fase

di misura, fornendo informazioni di notevole interesse in molti campi (come l'analisi dei sistemi vibranti, l'elaborazione di immagini, l'analisi di tracciati elettrocardiografici o elettroencefalografici, ecc.).

Ragionamenti pressoché analoghi possono esser fatti per le grandezze quasi periodiche, che sono caratterizzate da funzioni simili alla [1-14] con valori di n non interi; esse sono cioè composte da termini sinusoidali con frequenze non multiple fra di loro. Questo tipo di grandezze si incontra raramente, in genere sovrapposto a grandezze aleatorie.

1-3,3. *Grandezze transitorie.*

Sono grandezze transitorie tutte quelle che, pur essendo rette da una relazione analitica, non rientrano nelle suddivisioni precedenti. Ve ne sono numerosi esempi, rappresentati da funzioni esponenziali, sinusoidali smorzate, impulsive ecc.

Per tutte queste funzioni può essere definito uno spettro, che deriva dalla scomposizione della $X(t)$ mediante l'integrale di Fourier:

$$X(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\cos[\omega t-\alpha(\omega)]\,d\omega\,. \qquad [1\text{-}15]$$

Ne consegue che lo spettro dei valori di $X(\omega)$ come di quelli di $\alpha(\omega)$ è rappresentato da una funzione continua di ω, per la quale si possono ripetere le stesse considerazioni del precedente paragrafo, circa i limiti della banda di frequenza che può esser considerata per ogni grandezza.

Fig. 1-11 *a*

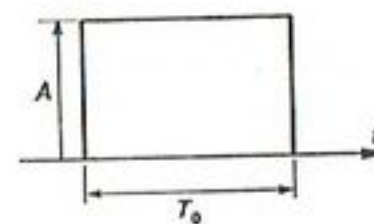
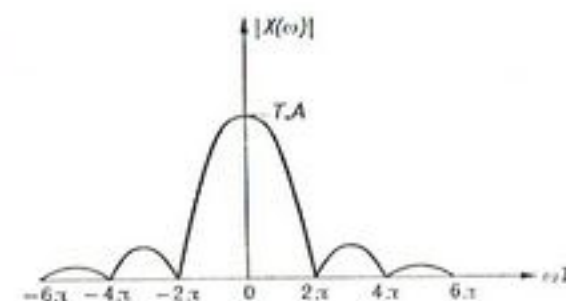
La fig. 1-11 *a* riporta, ad esempio, lo spettro delle ampiezze per una grandezza transitoria di tipo rettangolare, di durata T_0 (fig. 1-11 *b*); si noti che la banda di frequenza risulta tanto maggiore quanto minore è la durata dell'impulso rettangolare.

Non sempre, tuttavia, anche se la grandezza da misurare è soggetta a dei transitori, risulta necessario mantenere una certa precisione di misura anche durante il loro svolgimento. Diremo perciò che una misura si effettua in condizioni *statiche*, quando si è raggiunta una situazione di regime, ovverossia la misura si effettua in condizioni indipendenti dal tempo.

Fig. 1-11 *b*

La misura si dice invece *dinamica* se deve essere effettuata su grandezze transitorie, ossia in condizioni variabili col tempo. I requisiti di una misura dinamica sono perciò più severi di quelli di una corrispondente misura in condizioni statiche.

1-3,4. *Discretizzazione.*

Le grandezze fisiche da misurare hanno generalmente andamento continuo; esse possono cioè assumere tutti gli infiniti valori, compresi fra un limite superiore ed un limite inferiore; se sono variabili nel tempo, anche tale variazione ha andamento continuo.

Il risultato della misura viene invece generalmente espresso da un numero, cioè attraverso una serie di valori discreti (quantizzazione); anche il suo andamento nel tempo viene approssimato ad una serie di valori presi in numero finito (campionamento).

Un segnale numerico discretizzato nel tempo consiste in un insieme ordinato (sequenza) di N numeri (o valori campionati) che considereremo per semplicità intervallati fra loro in modo uniforme, ossia rappresentabili con la forma:

$$X = x(kT_s) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

dove T_s è l'intervallo di tempo di campionamento. Una rappresentazione grafica intuitiva di una simile sequenza è data in fig. 1-12.

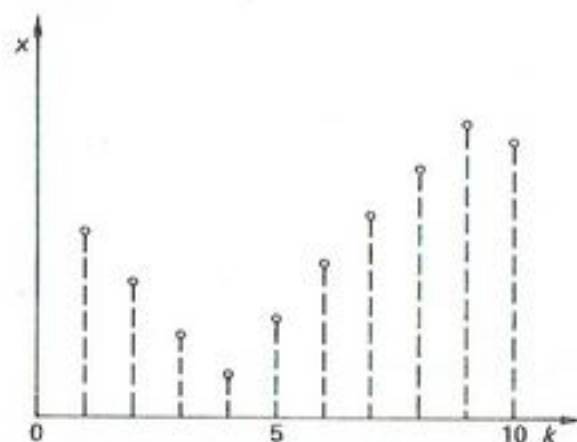



Fig. 1-12

Per un simile segnale, è possibile definire una trasformata discreta di Fourier (*DFT*) costituita da N termini, nel dominio delle frequenze, per cui si può scrivere:

$$X(nf_s/N) = \Sigma x(kT_s)\varepsilon^{-j2\pi nk/N} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

e inversamente:

$$x(kT_s) = (1/N)\Sigma X(nf_s/N)\varepsilon^{j2\pi nk/N} \qquad (f_s = 1/T_s)\,.$$

L'intervallo Δf fra le frequenze presenti nella *DFT* risulta pari a:

$$\Delta f = f_s/N = 1/NT_s$$

ossia quanto più lunga è la sequenza esaminata, tanto migliore è la risoluzione in frequenza della sua trasformata.

1-3,5. *Grandezze quantizzate.*

I risultati di una misura sono non solo discreti, ma in numero limitato; è chiaro, ad esempio, che se un risultato è fornito con $\pm 1\%$ di incertezza, tutti i valori:

$$99 < M < 101$$

essendo fra loro indistinguibili, possono essere espressi con la stessa informazione, costituita dal numero 100. Nessun vantaggio si conseguirebbe con un aumento delle cifre significative, aumento che sarebbe in ogni caso limitato ad un maggior numero di valori discreti.

Nell'espressione del risultato, si deve tener conto di ciò, scrivendo un numero di cifre significative limitato a quelle effettivamente note; le successive sono trascurate, eventualmente modificando il numero di cifre intere con l'uso di multipli o sottomultipli dell'unità di misura.

I valori forniti da una misura sono inoltre compresi fra un limite inferiore ed uno superiore, che delimitano il *campo di misura*. Il limite superiore è generalmente imposto dalle caratteristiche dell'apparecchiatura utilizzata (indicazione massima, limiti termici, meccanici ecc.). Il limite inferiore può invece essere imposto sia dalle limitazioni dell'apparecchiatura (errore, leggibilità dell'indicazione, rumore ecc.) sia dall'insieme di fenomeni parassiti (rumori di fondo, variabilità delle condizioni ambientali, campi elettromagnetici estranei ecc.) entro cui si confonde la grandezza da misurare.

Costituendo un insieme di valori discreti, limitato inferiormente e superiormente, i possibili risultati di una misura sono in numero finito. Essi possono essere perciò espressi in un adeguato *codice*, ossia in un'opportuna sequenza di simboli (cifre, lettere, segnali, colori ecc.) che contenga almeno tante combinazioni quanti sono i valori da esprimere, in modo da associarli univocamente.

Questa conversione in codice può essere utile anche durante lo stesso processo di misura, p. es. per la trasmissione a distanza o l'immagazzinamento dei risultati. Infatti il segnale in codice (o in forma *digitale*) può essere trasmesso, senza perdita di informazione (o errori), perché risulta in genere sufficientemente immune da disturbi. Anche la scrittura in forma numerica nel sistema decimale rappresenta una trascrizione in codice, anzi

quella di più semplice ed immediata lettura, anche per un operatore inesperto. Come si vedrà, non è sempre però la forma preferita negli strumenti di misura.

1-3,6. *Quantità d'informazione ed errore di quantizzazione.*

Sia N il numero dei simboli, o combinazioni di simboli ugualmente probabili che possono costituire il risultato della misura; si dice allora che la misura stessa fornisce una quantità *d'informazione*:

$$I = \log_2 N$$

la cui unità di misura (per $N = 2$) assume la denominazione di bit. Si è scelta come riferimento la quantità $N = 2$, poiché il codice più semplice si basa su due sole alternative (tutto o niente, acceso o spento e simili).

Se un codice è composto da N simboli, ugualmente spaziati l'uno dall'altro della quantità Δ, la massima grandezza A vale:

$$A = N\Delta$$

mentre l'incertezza di ogni valore può essere stimata pari a $\pm\Delta/2$ ossia, in valor assoluto:

$$E = \pm\frac{\Delta}{2} = \pm\frac{A}{2N}.$$

Questa incertezza diminuisce pertanto al crescere di N, e altrettanto si può dire per il valore riferito al fondo scala E/A. Uno strumento a 6 bit ($N = 64$) ha un errore di quantizzazione pari a circa 0,8% del suo fondo scala; tale limite scende a 0,2% in uno strumento a 8 bit e a 0,05% in uno strumento a 10 bit ($N = 1.024$; ossia praticamente uno strumento con tutti i numeri interi da 0 a 1.000). Questa relazione consente quindi la scelta di strumentazione adatta alla quantità d'informazione che si desidera.

1-3,7. *Campionamento.*

Per una grandezza variabile nel tempo, con un andamento continuo, che comporti uno spettro limitato di frequenze, è logico aspettarsi che esista un numero minimo di punti che sia in grado di descrivere tale andamento in modo univoco e corretto, cioè con la minima perdita d'informazione.

Si può infatti dimostrare che una funzione del tempo, con banda di frequenza compresa fra zero e un limite superiore f_s, può essere ricostruita fedelmente qualora se ne conoscano i valori in istanti intervallati fra loro di un tempo non maggiore di $1/2f_s$ (fig. 1-13).

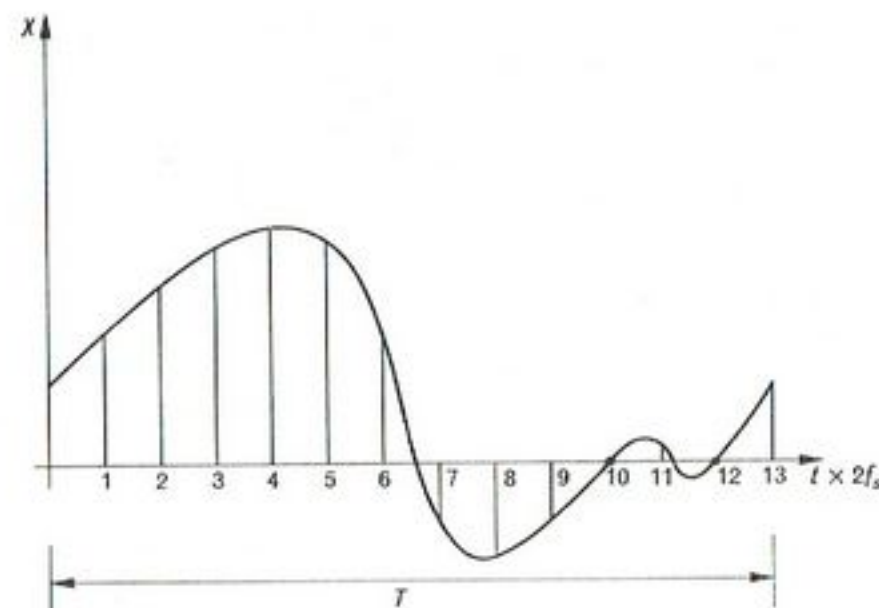



Fig. 1-13

Una spiegazione di tale proprietà può essere data, per un segnale alternativo di periodo T; esso è infatti scomponibile in m componenti dove:

$$m = \frac{f_s}{f}$$

è l'ordine dell'armonica più elevata riferita alla fondamentale di frequenza $f = 1/T$; ognuna di queste componenti è definita da due soli valori (ampiezza e fase), cosicché l'intera forma d'onda è completamente esprimibile, nel suo periodo T, tramite $2m$ valori, mediamente intervallati dal tempo:

$$\frac{T}{2m} = \frac{1}{2f_s}.$$

Questa notevole proprietà è però valida anche per forme d'onda non periodiche, purché esaminate per un intervallo di tempo T, sufficientemente lungo per poter essere considerato come periodo di una funzione periodica fittizia, che ripeta la forma d'onda assegnata.

Il principio si può estendere a segnali con banda limitata anche inferiormente.

La ricostruzione di un segnale *campionato*, in forma analogica, può avvenire mediante l'uso di reti filtranti con banda f_s.

Si noti, tuttavia, che per una ricostruzione « visiva » e puntuale di un segnale, la frequenza teorica di campionamento $2f_s$ non è, nella maggior parte dei casi, sufficiente.

Si consideri, ad esempio, un semiperiodo di un segnale sinusoidale di frequenza f e di ampiezza tale da coprire tutto il campo di misura ($A_M = N\Delta$); di esso si voglia determinare direttamente (cioè senza rielaborare il segnale campionato) proprio il valore di picco A_M, ammettendo un errore non superiore all'errore di quantizzazione $\pm\Delta/2$. A questo scopo, occorre che vi sia almeno un campionamento nell'intervallo in cui la funzione sinusoidale resta superiore al valore $1 - 1/2N$, ossia:

$$\arccos(1 - 1/2N) = \pm\pi f T_c$$

il che comporta una frequenza di campionamento:

$$f_c = \pi f \sqrt{N}$$

molto superiore alla frequenza $2f$ che sarebbe richiesta dal teorema di campionamento.

1-3,8. *Errori di campionamento.*

Il campionamento di un segnale con tempi di campionamento $1/2f_s$ può tuttavia introdurre un errore, se sono presenti componenti di frequenze:

$$f_n = 2nf_s \pm f \qquad \text{(con } n \text{ intero)}$$

che danno luogo agli stessi valori, negli istanti di campionamento, di un'inesistente funzione cosinusoidale di frequenza f; è infatti, per t_s multiplo di $1/2f_s$:

$$\cos 2\pi f t_s = \cos 2\pi(2nf_s \pm f) \cdot t_s\,.$$

Questo errore, come altri (errore di troncamento), sussistono in quanto uno spettro di frequenza non è mai rigorosamente limitato; altre cause di errore sono dovute alla presenza di rumore e al non perfetto sincronismo degli istanti di campionamento.

In genere viene quindi utilizzata una frequenza di campionamento più elevata di quella strettamente necessaria, o il segnale da campionare viene preventivamente filtrato in modo da eliminare le frequenze superiori a f_s.

1-4. **Sistemi di misura.**

1-4,1. *Catena di misura.*

L'esecuzione di una misura può comprendere più stadi, in ognuno dei quali si operano delle opportune trasformazioni sia sulla forma del segnale che fa da supporto alla grandezza da misurare, sia sull'energia che è associata a tale segnale. Queste operazioni di trasformazione sono necessarie per compiere la misura nelle migliori condizioni possibili, cioè con la minor perturbazione della grandezza stessa nel momento del suo prelevamento, con il più corretto confronto con i riferimenti corrispondenti, la più fedele trasmissione a distanza, la più pratica forma di osservazione o registrazione, e così via.

Si designa con il termine generico di *catena o sistema di misura* tutto quell'insieme di apparecchiature che opera le trasformazioni necessarie per tradurre la grandezza da misurare nel risultato numerico. Questa definizione è utile perché consente di inquadrare un insieme di elementi fisicamente fra loro distinti in un unico blocco, che può essere studiato in modo sintetico, secondo i principi dell'analisi dei sistemi; d'altra parte essa permette anche di individuare il comportamento di singole parti od organi di un'apparecchiatura complessa, anche quando essi non siano facilmente separabili sul piano fisico, e di prevederne l'influenza sulle restanti parti del sistema.

Le due impostazioni corrispondono, d'altronde, a due diversi punti di vista secondo cui può esser considerato il sistema in oggetto: globalmente, da chi esegue una misura, nelle varie parti, da chi la progetta.

1-4,2. *Tipi di trasformazione.*

Una classificazione dei vari elementi di un sistema di misura può farsi secondo criteri diversi: in base alla natura del segnale d'entrata (elettrico, termico, meccanico ecc.); in base alla corrispondenza, o meno, fra la natura del segnale d'entrata e di quello d'uscita, in base al tipo di trasformazione, e così via.

Caratteristica comune a tutte queste trasformazioni, per poter essere utilizzate in una misura, è l'essere governate da una legge univoca, tale cioè che esista una relazione del tipo:

$$y = f(x) \qquad [1\text{-}16]$$

fra il segnale d'uscita y e quello d'entrata x.

È bene precisare che la [1-16] non deve intendersi in stretto senso matematico, in quanto il valore della grandezza di uscita è, in realtà, funzione, oltre che del valore del segnale di entrata, di diverse altre grandezze d'influenza, in parte esterne ed in parte interne al sistema considerato. Per poter ritenere valida la [1-16], ai fini della sua utilizzazione nel campo delle misure, è necessario che, per un dominio convenientemente ampio di valori delle grandezze d'influenza, ad ogni valore del segnale di ingresso corrisponda, per il segnale di uscita, un intorno sufficientemente piccolo di valori.

Il tipo più semplice di trasformazione è quello con legge di proporzionalità:

$$y = kx \qquad [1\text{-}17]$$

dove k, grandezza in generale dimensionale, assume la denominazione di « fattore di conversione (o di scala) ».

Altri tipi di trasformazioni possono essere governate da relazioni quadratiche, logaritmiche, ecc., ovvero di somma, differenza, prodotto o quoziente di più grandezze; i vari modi con cui simili trasformazioni possono essere ottenute saranno esaminati in maggior dettaglio in successivi capitoli.

Si noti che mentre è facile realizzare, con reti elettriche normali, delle combinazioni lineari fra segnali diversi, per avere relazioni di tipo quadratico o di prodotto è in genere necessario ricorrere a conversioni di energia elettrica in termica, meccanica, ecc. od impiegare dispositivi a caratteristica anomala.

Ricordiamo, a questo proposito, una proprietà generale dei sistemi che operano una trasformazione a legge quadratica, proprietà che li rende adatti, in opportune combinazioni con somme e differenze, al funzionamento come moltiplicatori.

Date infatti due grandezze qualsiasi A e B, si ha sempre:

$$(A+B)^2-(A-B)^2=4AB\,; \qquad [1\text{-}18]$$

lo schema di principio di un sistema che realizzi la [1-18] è dato in fig. 1-14.

Altre trasformazioni sono, ad esempio, la rettificazione, la modulazione e demodulazione, la conversione di frequenza, la conversione analogico-numerica, ecc.

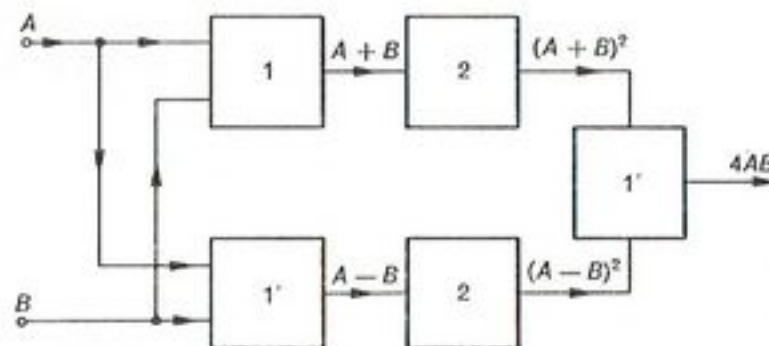



Fig. 1-14
Schema di moltiplicatore: 1 = organi di somma; 1' = organi di sottrazione; 2 = organi a caratteristica quadratica.

1-4,3. *Funzione di trasferimento.*

Quando il segnale di entrata sia funzione del tempo, relazioni del tipo delle [1-17] o analoghe possono sussistere fra i valori istantanei delle grandezze di entrata e di uscita. Sono però possibili anche trasformazioni comprendenti le operazioni di derivazione o di integrazione, cioè del tipo:

$$y(t)=k\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

ovvero:

$$y(t)=k\int_0 x(t)\,\mathrm{d}t$$

o altre relazioni che possono derivare dalle precedenti.

Il caso più generale è rappresentato da un sistema di equazioni differenziali che lega il segnale d'entrata, e le sue derivate di vario ordine, al segnale di uscita ed alle sue derivate. Quando — come spesso è il caso — queste equazioni differenziali possono ritenersi a coefficienti costanti, risulta conveniente rappresentare il sistema mediante la sua funzione di trasferimento $G(p)$ definita, secondo la relazione:

$$G(p)=\frac{\bar{y}(p)}{\bar{x}(p)} \qquad [1\text{-}19]$$

x → G → y

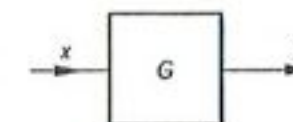



Fig. 1-15

come il rapporto fra le Laplace-trasformate dei segnali, rispettivamente, di uscita e di entrata (fig. 1-15).

Lo studio della funzione di trasferimento di un sistema consente di ricavarne le caratteristiche di funzionamento per quanto riguarda sia il valore del fattore di conversione che gli errori propri, nelle diverse condizioni d'impiego.

In condizioni di regime sinusoidale di pulsazione ω, si ha $p=j\omega$ e la funzione di trasferimento assume la forma dell'operatore complesso $\dot{G}(j\omega)$ che, con il suo modulo G ed il suo argomento φ, esprime la relazione di ampiezza e di fase fra entrata ed uscita. In particolare, il valore $G(o)$ che la funzione $G(p)$ assume per $p=0$ coincide con il fattore di conversione che il sistema presenta per grandezze d'ingresso costanti.

Il comportamento del sistema in condizioni statiche è quindi caratterizzato dall'andamento assunto dalla $\dot{G}(j\omega)$ (o separatamente dalle sue caratteristiche di ampiezza e di fase), in funzione di ω, in tutto il campo delle frequenze che possono interessare ai fini della misura; da queste caratteristiche è possibile infatti, a mezzo della serie di Fourier, ricostruire la risposta del sistema ad un ingresso periodico qualsivoglia.

Nel caso di misure in condizioni dinamiche, la risposta del sistema può invece essere ottenuta attraverso la antitrasformazione del prodotto $\bar{x}(p)\cdot G(p)$, ovvero, per mezzo dell'integrale di convoluzione, note le risposte del sistema alle funzioni unitaria od impulsiva, ottenute direttamente dalla antitrasformazione della $G(p)/p$ o, rispettivamente, della stessa $G(p)$.

Questa impostazione risulta particolarmente utile quando l'apparecchiatura di misura faccia parte di un più ampio sistema (ad esempio un impianto industriale, un veicolo ecc.) sottoposto a controllo automatico; il suo comportamento dinamico concorre in tal caso a determinare il comportamento dell'intero sistema di controllo.

1-4,4. *Errori sistematici e disturbi.*

La considerazione della funzione di trasferimento, permettendo di calcolare l'effettivo fattore di conversione del sistema, in ogni particolare condizione di impiego, consente di determinare direttamente anche la correzione da applicare, in corrispondenza ai diversi casi di misura. Spesso, come meglio si vedrà in seguito, tale correzione può essere espressa in modo semplice, come funzione dei parametri stessi della funzione di trasferimento.

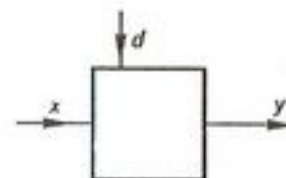



Fig. 1-16

Per assicurare validità alla rappresentazione di un sistema di misura, è inoltre necessario che vi si possano individuare anche gli errori fortuiti, da cui il sistema è affetto. Questi possono essere considerati come l'effetto di un segnale parassita d'ingresso, agente sul sistema indipendentemente dal segnale d'ingresso da misurare, secondo lo schema di fig. 1-16.

Questo segnale, detto anche di disturbo, ha le caratteristiche di una grandezza aleatoria, di ampiezza sufficientemente piccola da potersi pensare sovrapposta al segnale principale, senza alterare il funzionamento del sistema. Nella categoria dei segnali di disturbo rientrano i rumori di fondo delle apparecchiature elettroniche, gli attriti dei sistemi meccanici, i campi elettromagnetici esterni ecc. L'ampiezza del segnale di disturbo influisce sia sulla precisione che sul limite inferiore del campo di impiego di un sistema.

1-4,5. *Trasformazioni in catena diretta.*

Quando più elementi di un sistema siano fra loro connessi in cascata come in fig. 1-17 essi diconsi in catena diretta, in quanto tutte le trasformazioni agiscono in un'unica direzione, dal segnale di entrata del sistema (grandezza da misurare) al segnale di uscita.

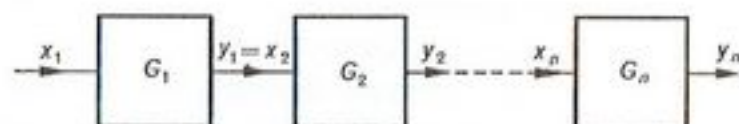



Fig. 1-17

È facile riconoscere che, se tutte le n trasformazioni sono governate da una legge di tipo proporzionale:

$$y_i = k_i x_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

il fattore di conversione globale del sistema K, risulta uguale al prodotto dei fattori di conversione k_i degli n elementi del sistema:

$$K = \prod_1^n (k_i)\,. \qquad [1\text{-}20]$$

L'errore relativo e proprio del sistema, risulta:

$$e = \sum_1^n e_i$$

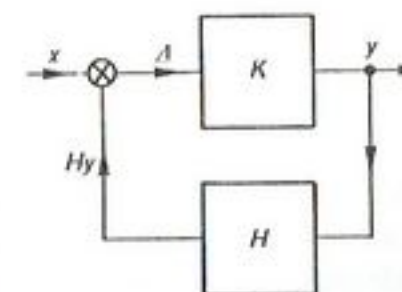
pari alla somma degli errori relativi e_i dei singoli elementi. In tal modo si possono compensare, nelle diverse trasformazioni, errori sistematici di opposto segno, ma si vengono praticamente a sommare i limiti delle fasce di incertezza.

Se non esistono sorgenti ausiliarie, il trasferimento di potenza ha luogo fra il circuito di ingresso e quello di uscita; in generale, però, l'erogazione di potenza dà luogo a condizioni di funzionamento contrastanti con quelle richieste per una buona precisione. Si fa perciò spesso ricorso a sistemi con alimentazioni ausiliarie (per esempio amplificatori elettronici, elettromagnetici ecc.); tuttavia, in una catena diretta, almeno l'organo finale deve essere in grado di fornire all'uscita la potenza richiesta per il suo funzionamento.

1-4,6. *Trasformazioni in catena chiusa.*

Accade talvolta che, per la natura stessa del sistema di misura, o per i compiti che esso è chiamato ad eseguire, non sia possibile realizzare contemporaneamente i requisiti di precisione e di potenza d'uscita. È questo, per esempio, il caso degli strumenti ad indice scrivente dove l'organo mobile è chiamato a vincere notevoli attriti, variabili in dipendenza dello stato della carta; è anche il caso di molti strumenti che utilizzano circuiti elettronici, le cui caratteristiche sono variabili nel tempo e con le condizioni ambientali.

Fig. 1-18

Si può, in tali casi, ottenere un miglior risultato scindendo in due diversi organi il compito di trasferire potenza all'uscita del sistema e quello di assicurare la costanza della caratteristica di conversione, con un *sistema a catena chiusa* (o a retroazione).

Il principio di un simile sistema è illustrato in fig. 1-18; esso comprende uno o più organi in catena diretta, con fattore di conversione totale K, ed uno o più organi, detti di retroazione, con fattore di conversione totale H, alimentati dal segnale d'uscita y.

All'organo diretto risulta così applicato non il segnale d'entrata x, ma la grandezza:

$$\Delta = x - Hy \qquad [1\text{-}21]$$

ricavata dalla combinazione della x con il segnale di uscita dell'organo di retroazione.

Poiché è, per ipotesi:

$$y = K\Delta$$

risulta, dalla [1-21]:

$$y = \frac{x}{1/K + H}. \qquad [1\text{-}22]$$

Se l'errore relativo proprio dell'organo diretto è ε_K e quello dell'organo di retroazione è ε_H, si ha, per l'errore relativo complessivo:

$$\varepsilon = \frac{1}{1+HK}\varepsilon_K - \frac{HK}{1+HK}\varepsilon_H. \qquad [1\text{-}23]$$

Abitualmente, si fa in modo che sia:

$$H \gg \frac{1}{K} \qquad [1\text{-}24]$$

per cui il fattore di conversione globale di tutto il sistema G, risulta, dalla [1-22]:

$$G = \frac{y}{x} = \frac{1}{H}\frac{KH}{1+KH} \simeq \frac{1}{H}; \qquad [1\text{-}25]$$

esso è, per la [1-24] assai minore di quello che si avrebbe in assenza di retroazione; risulta però anche:

$$\varepsilon \cong -\varepsilon_H + \frac{\varepsilon_K}{KH} \cong -\varepsilon_H.$$

L'errore globale del sistema dipende perciò praticamente dal solo organo di retroazione, che può avere errori limitati, non avendo il compito di fornire potenza alla sua uscita. Gli errori dell'organo diretto, che eroga tale potenza, risultano tanto più ridotti quanto maggiore è il prodotto KH.

L'impiego del principio di retroazione trova un limite nelle possibilità

di autoscillazioni; è infatti evidente che, se fosse realizzata la condizione:

$$1 + HK = 0 \qquad [1\text{-}26]$$

la grandezza d'uscita diverrebbe indipendente da quella di entrata e potrebbe, in particolare, risultare finita anche quando si avesse ingresso nullo.

Lo studio delle condizioni necessarie ad assicurare che, nel sistema, la [1-26] non sia mai verificata (condizioni di stabilità) quando H e K sono funzioni della pulsazione ω, esula dallo scopo di questo corso. La possibilità di questi fenomeni di autooscillazione deve tuttavia essere tenuta presente, perché può costituire un limite alla precisione raggiungibile.

Si noti che la relazione [1-22], ricavata per sistemi a caratteristica lineare, è valida anche per le Laplace-trasformate dei segnali di entrata e di uscita, se ai fattori di conversione si sostituiscono le rispettive funzioni di trasferimento. Ciò resta valido per il calcolo degli errori assoluti, ma non per quello degli errori relativi.

1-4A,1. *Proprietà della trasformazione fra integrali.*

Si consideri un sistema, per il quale sia definibile una funzione di trasferimento $G(p)$ che assume, per $p = 0$, un valore finito $G(0)$. Si supponga ora (fig. 1-19) che ad

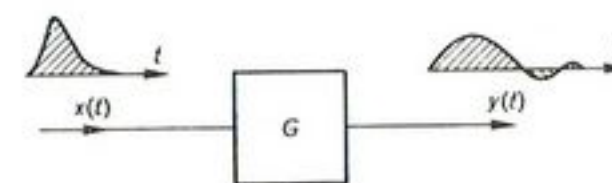



Fig. 1-19

esso sia applicato un segnale d'entrata $x(t)$ diverso da zero solo per un tempo $t < T$ finito, tale che si possa porre:

$$X = \int_0^T x(t)\,dt = \int_0^\infty x(t)\,dt.$$

Si può allora dimostrare che anche il segnale di uscita $y(t)$ dà luogo ad un'area finita:

$$Y = \int_0^\infty y(t)\,dt$$

e che fra le due grandezze sopra definite esiste la relazione:

$$Y = G(0)X \qquad [1\text{-}27]$$

indipendentemente dalla forma sia della $x(t)$ che della $G(p)$.

Per dimostrare la relazione [1-27] è sufficiente ricordare che, per una qualsiasi funzione $f(t)$ che abbia come sua $\mathfrak{L}$-trasformata una $f(p)$, in applicazione del teorema

dei valori limiti, si ha:

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to\infty}\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0} p\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \lim_{p\to 0}\bar{f}(p)\,. \qquad [1\text{-}28]$$

La [1-28] consente di esprimere il valore dell'area compresa dalla funzione $f(t)$, se tale valore esiste ed è finito, mediante il valore assunto dalla $\mathfrak{L}$-trasformata $\bar{f}(p)$, nel punto $p=0$.

Applicando tale principio alle grandezze x e y, si ha:

$$X = \int_0^\infty x(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0}\bar{x}(p)$$

$$Y = \int_0^\infty y(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0}\bar{y}(p) = \lim_{p\to 0} G(p)\bar{x}(p) = G(0)X\,.$$

Per la validità dell'ultimo passaggio è necessario che il limite non dia luogo ad una forma indeterminata, cioè che non siano contemporaneamente nulle $G(0)$ e X.

1-4A,2. *Altre applicazioni.*

Per comprendere il funzionamento di vari schemi, utilizzanti la retroazione, conviene spesso partire dalla ipotesi di K infinito, ossia, essendo finito y, di $\Delta = 0$.

Così, nello schema di fig. 1-20, si può porre:

$$yH = s = x' = xH'$$

che conduce alla relazione:

$$\frac{y}{x} = \frac{H'}{H} \qquad [1\text{-}29]$$

che si riduce alla:

$$x = y$$

se è $H = H'$; si noti che non interessa in questo caso la precisione propria di H e H', ma solo la loro identità, che è assai più facile da realizzare ed eventualmente da verificare, tramite uno scambio fra le due funzioni.

Lo stesso principio può essere utilizzato nello schema di fig. 1-21 per cui vale ancora la [1-29].

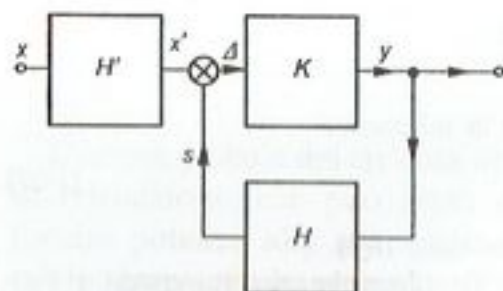



Fig. 1-20

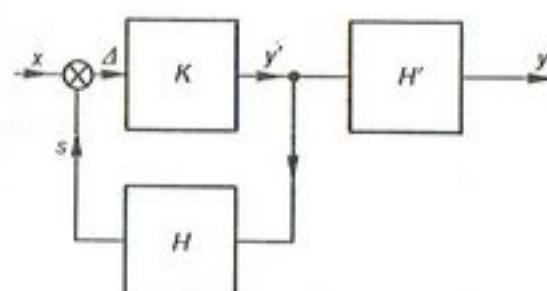



Fig. 1-21

1-5. Comportamento dinamico di alcuni sistemi lineari semplici.

1-5,1. *Funzioni di trasferimento ridotte.*

L'analisi del comportamento di un sistema è particolarmente semplice ed evidente nel caso di sistemi lineari del primo e del secondo ordine, casi a cui possono spesso ricondursi i più importanti apparecchi di misura.

Per maggior semplicità, si considera come caratteristica, per i sistemi del primo ordine, la funzione di trasferimento:

$$g(p) = \frac{1}{1+pT} \qquad [1\text{-}30]$$

e, per i sistemi di secondo ordine, la:

$$g(p) = \frac{1}{1+\dfrac{2z}{\mu}p+\dfrac{p^2}{\mu^2}}\,. \qquad [1\text{-}31]$$

In generale, le funzioni di trasferimento $G(p)$ di sistemi reali possono ridursi alla forma della [1-30] o della [1-31] dopo divisione per un termine costante G_0. In tal modo, le $g(p)$ sono in entrambi i casi caratterizzate dall'avere:

$$g(0) = 1 \qquad [1\text{-}32]$$

cioè dalla proprietà di trasferire inalterato all'uscita un segnale d'ingresso costante nel tempo. Funzioni di trasferimento di questo tipo diconsi anche *ridotte*.

Altra proprietà comune alle funzioni [1-30] e [1-31] è la relazione:

$$g(\infty) = 0$$

che, assieme alla [1-32], caratterizza questi sistemi come dei passa basso, cioè tali da trasmettere fedelmente fenomeni stazionari o variabili con rapidità limitata.

1-5,2. *Sistemi del primo ordine.*

Un sistema del primo ordine, caratterizzato dalla funzione di trasferimento ridotta:

$$g(p) = \frac{1}{1+pT} \qquad [1\text{-}30]$$

è completamente definito dal valore della sua *costante di tempo T*.

Il sistema può anche essere schematizzato con il circuito elettrico equivalente di fig. 1-22, con $T = RC$.

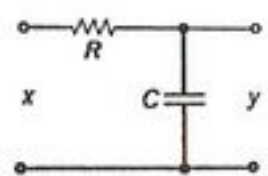
Se si considera un segnale d'ingresso sinusoidale di pulsazione ω, la [1-30] assume la forma dell'operatore:

$$\dot{g}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \qquad [1\text{-}33]$$

Fig. 1-22

le cui caratteristiche di ampiezza e di fase sono riportate nelle figg. 1-23 e 1-24, rispettivamente.

Si riconosce facilmente che, essendo:

$$g = |\dot{g}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\varphi = \text{arctang}(-\omega T)$$

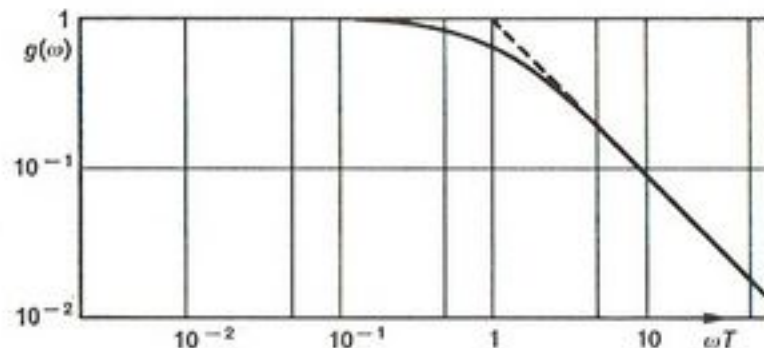



Fig. 1-23

si possono adottare, per $\omega T \ll 1$, le seguenti semplificazioni:

$$\left.\begin{aligned} g &\cong 1 - \frac{\omega^2 T^2}{2} \cong 1 \\ \varphi &\cong -\omega T\left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{3}\right) \cong -\omega T \end{aligned}\right\} \qquad [1\text{-}34]$$

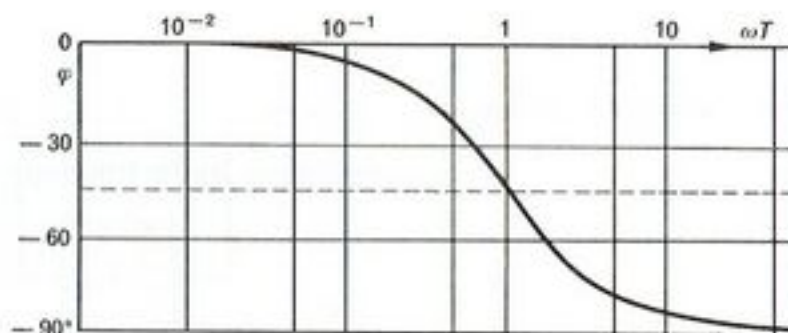



Fig. 1-24

ossia l'uscita ha pressoché la stessa ampiezza del segnale d'entrata, ma è ritardata rispetto ad esso dell'intervallo di tempo T; ciò è vero per ogni frequenza per cui siano valide le [1-34] cosicché il sistema del primo ordine trasmette inalterate ampiezza e forma dei segnali periodici le cui frequenze siano sufficientemente piccole rispetto a $1/2\pi T$ (per esempio le [1-34] sono corrette entro il percento, se è $f < 0{,}02/T$).

Per $\omega T \gg 1$ si ha invece:

$$\left.\begin{aligned} g &\cong \frac{1}{\omega T} \\ \varphi &\cong -\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [1\text{-}35]$$

il sistema funziona da integratore. Si noti che le [1-35] sono già sufficientemente approssimate quando sia $f > 2/T$.

Nel campo delle misure dinamiche, conviene considerare la risposta alla funzione a gradino unitario, per la quale si ha:

$$x(t) = 1(t) \qquad \bar{x}(p) = \frac{1}{p}$$

e si ottiene la risposta:

$$y(t) = h(t) = 1 - \varepsilon^{-t/T}$$

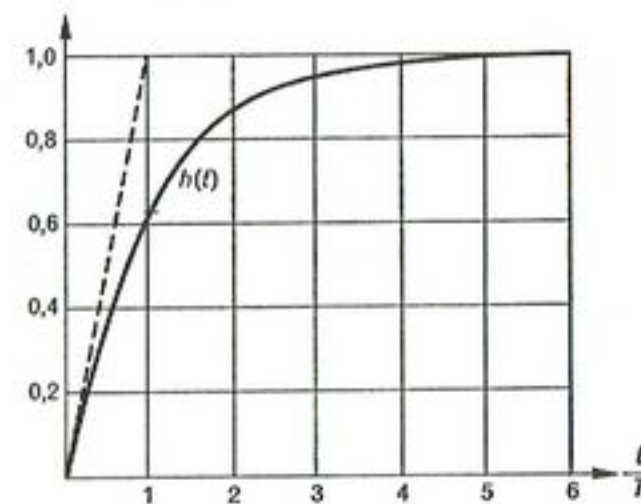



Fig. 1-25

che risulta un esponenziale, in funzione della variabile t/T (fig. 1-25). Si vede come il segnale d'uscita non possa seguire istantaneamente il segnale d'entrata ma vi si adegui solo dopo un certo tempo, che dipende dal valore della costante di tempo T; in particolare, nel caso in cui il segnale d'ingresso cresca linearmente nel tempo:

$$x(t) = at;$$

calcolando la risposta $y(t)$ con l'integrale di convoluzione, dalla risposta allo scalino unitario:

$$h(t) = 1 - \varepsilon^{-t/T}$$

si ottiene:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\frac{dx(\tau)}{d\tau}d\tau = at - aT(1-\varepsilon^{-t/T})\,. \qquad [1\text{-}36]$$

Dopo un tempo abbastanza grande rispetto a T, si ottiene (fig. 1-26):

$$y(t) = a(t-T) \qquad [1\text{-}37]$$

cioè il segnale d'uscita segue quello d'entrata con lo stesso andamento lineare, ma con un ritardo costante T.

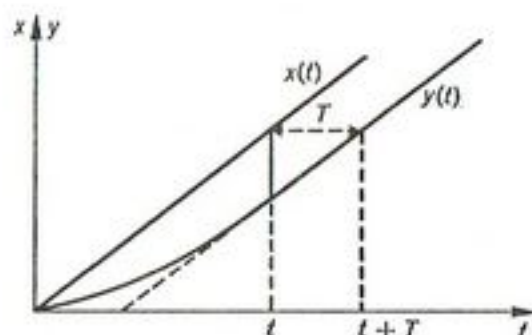



Fig. 1-26

Gli strumenti che hanno funzione di trasferimento di questo tipo (di cui sono un classico esempio i termometri) si chiamano perciò spesso « a semplice ritardo ».

1-5,3. *Costante di tempo generalizzata.*

Esaminando la risposta $h(t)$ di un sistema lineare del primo ordine ad un ingresso a scalino unitario (fig. 1-25) si può riconoscere la possibilità di ricavare il valore della costante di tempo T dai seguenti valori:

a) sottotangente all'origine della curva della $h(t)$;

b) intervallo di tempo dopo cui la $h(t)$ raggiunge il valore:

$$1 - \frac{1}{\varepsilon} = 0{,}632\,;$$

c) area compresa fra la curva del segnale di uscita $h(t)$ e di entrata $1(t)$.

Quest'ultima definizione presenta un particolare interesse, perché può essere estesa, in prima approssimazione, a sistemi più complessi, con funzioni di trasferimento non del primo ordine.

Si consideri infatti un sistema la cui risposta $h(t)$ alla funzione a scalino unitario tenda a 1 per t tendente all'infinito; ciò equivale a considerare un sistema con funzione di trasferimento ridotta $g(p)$ che assume valore unitario per $p = 0$.

Si definisce come costante di tempo, in forma più generale, la grandezza:

$$T_0 = \int_0^\infty [h(t) - 1]\,dt \qquad [1\text{-}38]$$

che rappresenta l'integrale nel tempo dell'errore istantaneo (differenza fra la grandezza d'uscita $h[t]$ e l'ingresso a scalino unitario) e che è espressa, geometricamente, dall'area compresa fra la risposta allo scalino unitario $h(t)$ e lo scalino stesso, area valutata algebricamente come in fig. 1-27.

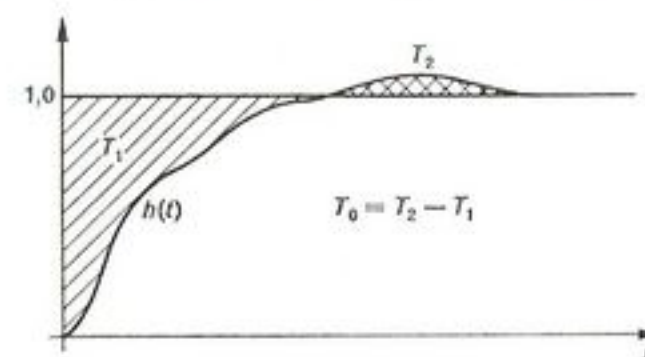



Fig. 1-27

La costante di tempo generalizzata, così definita, ha le dimensioni di un tempo; essa è dotata di un segno, come risulta dalla sua stessa definizione [1-38]; questo segno risulta, in particolare, negativo per un sistema del primo ordine ($T_0 = -T$), adottando le convenzioni già in uso in varie applicazioni. Sussistono inoltre alcune importanti proprietà:

1) Il valore di T_0 può calcolarsi direttamente dalla funzione di trasferimento ridotta del sistema, come la derivata di tale funzione, fatta nella variabile p, nel punto $p = 0$.

Infatti, per una proprietà delle $\mathfrak{L}$-trasformate, [1-28], si ha:

$$T_0 = \int_0^\infty [h(t) - 1]\,dt = \lim_{p\to 0}\left[\frac{g(p)}{p} - \frac{1}{p}\right] = \lim_{p\to 0}\frac{g(p)-1}{p} = [g'(p)]_{p=0}$$

ovvero:

$$T_0 = g'(0)\,. \qquad [1\text{-}39]$$

Se, anziché la funzione di trasferimento ridotta, si considera la funzione $G(p)$ che abbia, per $p=0$, valore $G(0)$, si ottiene, più in generale:

$$T_0 = \frac{G'(0)}{G(0)}.$$

2) Il valore dell'area compresa fra una generica funzione d'ingresso $x(t)$, che tenda ad un valore unitario per t tendente all'infinito, e la relativa risposta del sistema, è indipendente dal modo con cui la $x(t)$ raggiunge il suo valore limite (fig. 1-28).

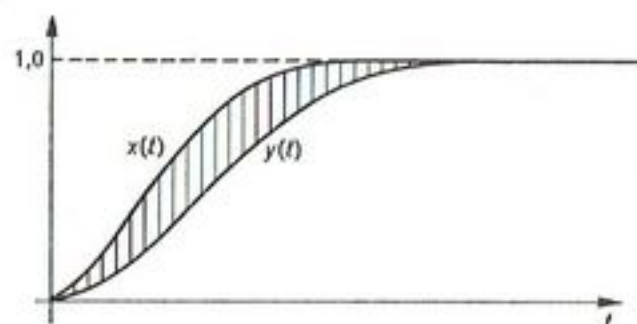



Fig. 1-28

Infatti quando per la $x(t)$ sia:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$$

è anche:

$$\lim_{p\to 0} p\bar{x}(p) = 1 ;$$

l'area compresa fra le due curve di fig. 1-28 può calcolarsi dalla relazione:

$$\int_0^\infty [y(t) - x(t)]\,dt = \lim_{p\to 0} p\bar{x}(p)\frac{g(p)-1}{p} = g'(0) = T_0 .$$

Questa proprietà, oltre a facilitare la misura della costante di tempo di un sistema, permette di calcolarne il valore per più elementi in cascata, come la somma algebrica delle costanti di tempo dei singoli componenti.

3) Per l'argomento φ della funzione $\dot{g}(j\omega)$ sussiste la relazione:

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{\text{tang}\,\varphi}{\omega} = T_0 . \qquad [1\text{-}40]$$

Infatti, la $g(p)$ può sempre svilupparsi in serie di MacLaurin:

$$g(p) = g(0) + pg'(0) + \dots$$

e si può quindi scrivere, in base alla [1-39] e alle ipotesi fatte sulla $g(0)$:

$$\dot{g}(j\omega) = 1 + j\omega T_0 + \dots .$$

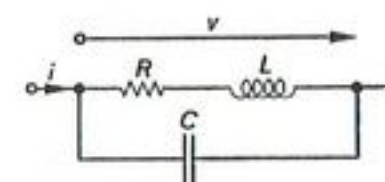
Tutti i termini ulteriori dello sviluppo sono funzioni di ω secondo potenze superiori alla prima, per cui si annullano nel passaggio al limite.

In forma semplificata, la [1-40] può scriversi anche, in un opportuno intorno di frequenze prossime allo zero, nella forma:

$$\varphi \simeq \text{tang}\,\varphi = \omega T_0$$

analoga a quella ricavata, sempre in un campo di frequenze limitato, per un sistema del primo ordine.

Fig. 1-29

Come semplice esempio di applicazione, si consideri il circuito di fig. 1-29; per esso si ha la funzione di trasferimento ridotta:

$$g(p) = \frac{v}{Ri} = \frac{1 + p\dfrac{L}{R}}{1 + pCR + p^2LC}$$

che non rientra nelle forme indicate dalla [1-30]; tuttavia calcolando:

$$T_0 = g'(0) = \frac{L}{R} - RC$$

si potrà, in un opportuno campo di frequenze, considerare il sistema come un'impedenza di modulo R e di argomento ωT_0.

4) Per un generico sistema, per cui sia definibile una costante di tempo T_0, può applicarsi anche una relazione analoga alla [1-37]; applicando infatti un segnale d'ingresso linearmente crescente nel tempo:

$$x = at$$

la risposta diviene:

$$y(t) = a(t + T_0)$$

dopo un tempo t sufficientemente grande perché sia da considerarsi:

$$\int_0^t [h(t-\tau) - 1]\,d\tau = T_0$$

ossia tale da considerarsi estinto l'andamento transitorio, per cui risulta $h(t) = 1$.

1-5,4. *Sistemi di secondo ordine.*

In un sistema del secondo ordine, caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$g(p) = \frac{1}{1 + 2z\frac{p}{\mu} + \left(\frac{p}{\mu}\right)^2} \qquad [1\text{-}41]$$

si riconosce l'esistenza di due parametri:

μ = *pulsazione caratteristica* del sistema, detta anche pulsazione propria non smorzata; poiché ogni risposta derivante dalla [1-41] può essere riportata come funzione della variabile μt, in base alla proprietà del cambiamento di scala delle Laplace-trasformate, la pulsazione caratteristica individua la scala dei tempi in cui si sviluppa la risposta del sistema;

z = fattore adimensionale di smorzamento, che determina la forma della risposta del sistema; per esempio, la risposta allo scalino risulta oscillatoria, aperiodica o critica, a seconda che il valore di z sia minore, maggiore od uguale ad 1.

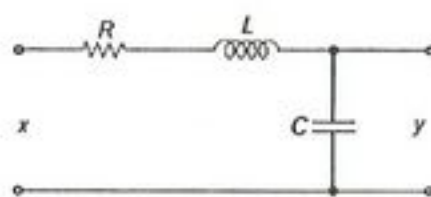



Fig. 1-30

La costante di tempo generalizzata risulta:

$$T_0 = g'(0) = -\frac{2z}{\mu}.$$

Il sistema può anche essere schematizzato con il circuito elettrico equivalente di fig. 1-30, in cui risulta:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad z = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Se si considera un segnale d'ingresso sinusoidale di pulsazione ω, la [1-41] assume la forma dell'operatore:

$$\dot{g}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\mu^2} + j\frac{2z}{\mu}\omega} \qquad [1\text{-}42]$$

le cui caratteristiche di ampiezza e di fase sono riportate nelle figg. 1-31 e 1-32, per alcuni valori di z.

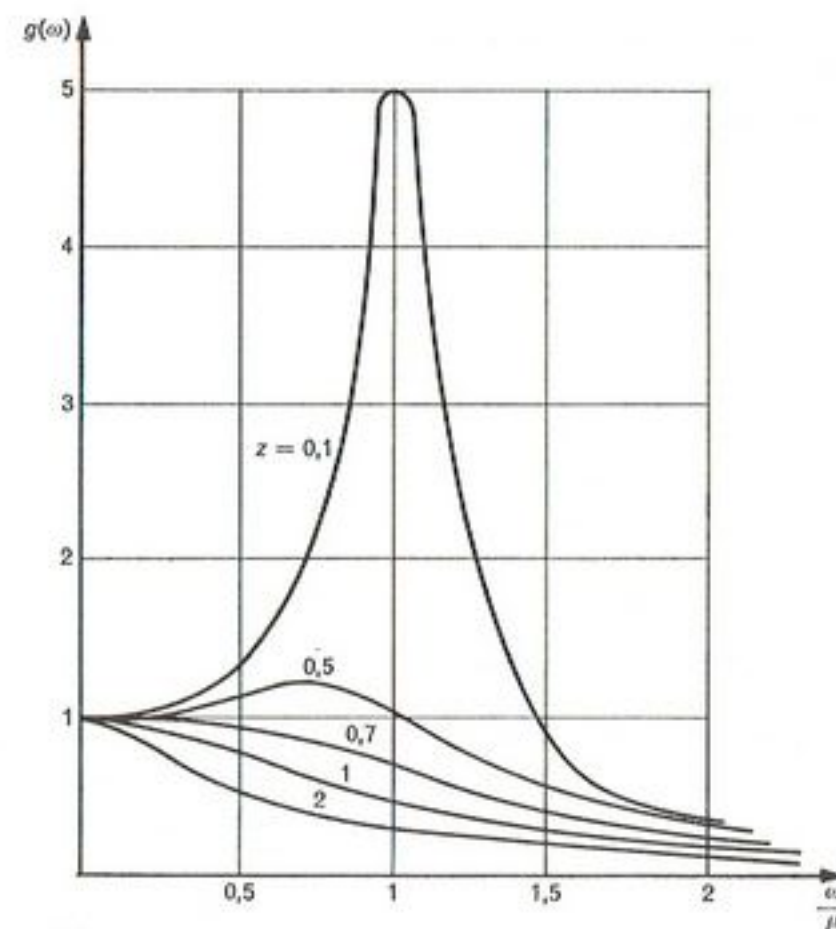



Fig. 1-31

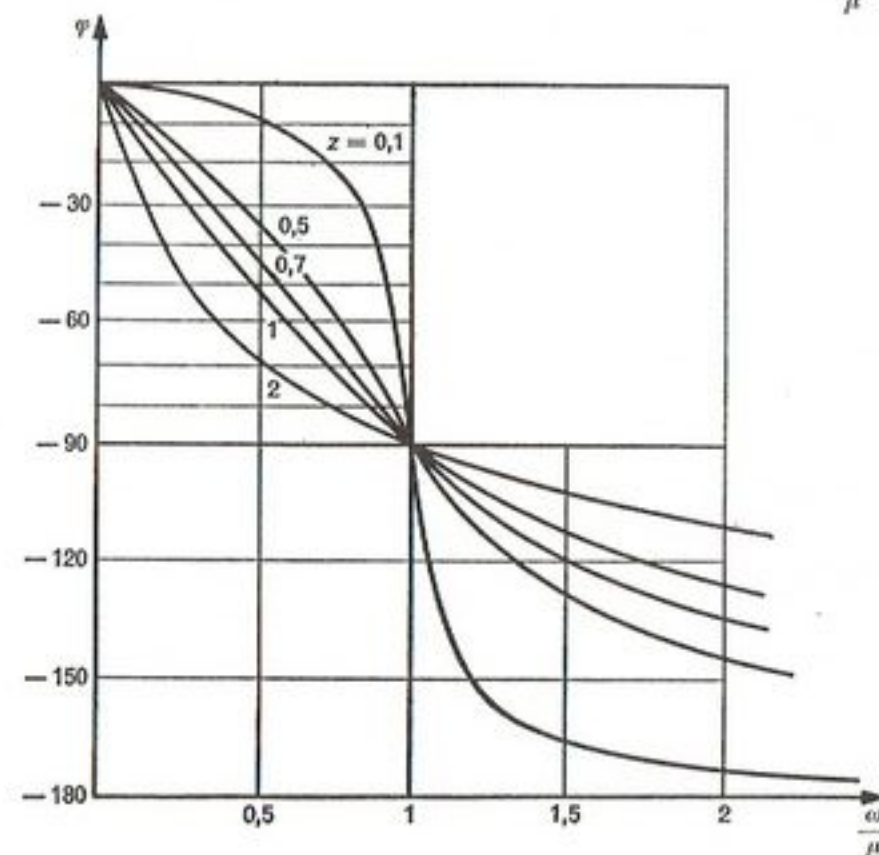



Fig. 1-32

Quando la pulsazione ω del segnale impresso è molto diversa dalla pulsazione caratteristica, o se lo smorzamento è elevato, il sistema ha un comportamento abbastanza simile a quello di un sistema del primo ordine, è infatti:

per $\omega \ll \mu$:

$$g \cong 1 - \frac{\omega^2 T_0^2}{2} \cong 1$$

$$\varphi \cong \omega T_0 ;$$

per $\omega \gg \mu$

$$g \cong \left[\frac{\mu}{\omega}\right]^2 ; \qquad \varphi = -\pi\,(^1).$$

Con piccoli valori dello smorzamento ($z < 0,7$), il modulo della risposta presenta un massimo:

$$g_M = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}} \qquad \text{per} \qquad \frac{\omega}{\mu} = \sqrt{1-2z^2} ; \qquad [1\text{-}43]$$

il sistema diviene allora *selettivo*, capace cioè di discriminare, con valori notevolmente diversi della risposta, due fenomeni di pari ampiezza che abbiano pulsazioni rispettivamente prossima o lontana dalla sua pulsazione caratteristica.

Per determinare la banda di frequenza in cui il sistema non deforma il segnale ad esso applicato, occorre conoscere quale sia il massimo valore della pulsazione per cui un segnale sinusoidale d'entrata viene trasferito all'uscita senza mutarne l'ampiezza e la fase, come teoricamente avviene solo per ω tendente a zero.

Questo valore limite ω_M si ricava, prefissato lo scarto massimo Δ ammissibile per la $g(\omega)$ dal valore ideale unitario, dalla relazione:

$$1 - \Delta < g(\omega) < 1 + \Delta \qquad \text{per} \qquad 0 < \omega < \omega_M .$$

Un Δ di circa l'1% comporta:

$$z = 0,65 \qquad \omega_M = 0,6\mu ; \qquad [1\text{-}44]$$

ammettendo valori superiori di Δ ($4 \div 5\%$) si ottiene con $z \cong 0,6$ un campo un po' maggiore di frequenza ($\omega_M = 0,8\mu$).

Per il trasferimento indistorto di un segnale periodico complesso, scomponibile in serie di Fourier, occorre inoltre che le singole armoniche, oltre ad essere trasmesse inalterate in ampiezza, siano tutte ritardate dello stesso intervallo di tempo, in modo da conservare in uscita le posizioni relative

(¹) In queste condizioni il sistema si comporta come un doppio integratore anziché, come il sistema di primo ordine, semplice integratore.

esistenti all'ingresso. Ciò equivale ad imporre che la fase della funzione di trasferimento vari linearmente con la pulsazione ω. Ciò imporrebbe uno smorzamento leggermente superiore a quello più sopra indicato, dell'ordine di $0,75 \div 0,80$, ma la distorsione è contenuta entro qualche centiradiante quando siano adottati i valori dati dalla [1-44].

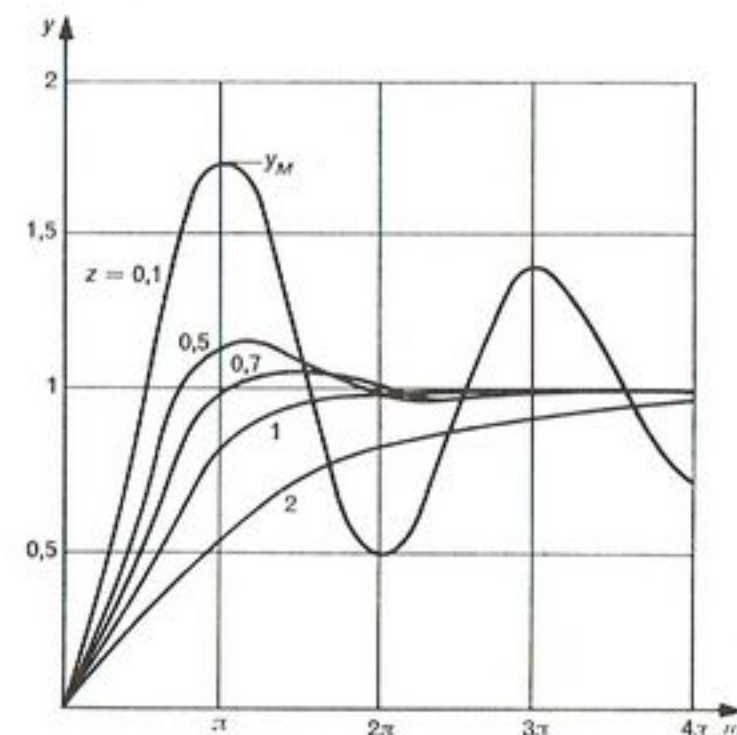



Fig. 1-33

Per le misure dinamiche, conviene considerare la risposta del sistema alla funzione a gradino unitario; la forma di tale risposta, riportata in funzione della grandezza adimensionale μt, varia al variare del parametro z (fig. 1-33). Per $z < 1$, la risposta è caratterizzata da una sovraelongazione, cioè da un valore della grandezza d'uscita maggiore del valore unitario; il valore della sovraelongazione massima y_M è dato della relazione:

$$y_M = 1 + \exp\left[-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}\right]$$

cioè è una funzione di z, rappresentabile come in fig. 1-34. Sempre nel caso di $z < 1$, il valore finale è raggiunto, teoricamente dopo un tempo infinito, attraverso una serie di oscillazioni smorzate.

Per $z > 1$ si ha invece una risposta che tende asintoticamente al valore finale.

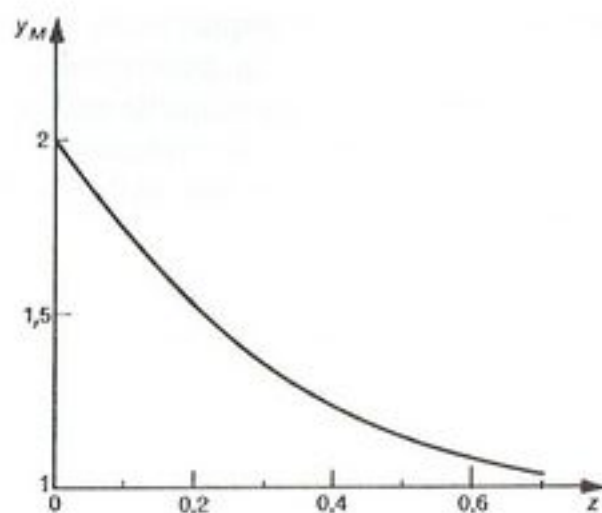



Fig. 1-34

In pratica, è utile definire, per tali andamenti, un tempo di risposta T_r cioè il tempo entro cui la grandezza d'uscita si mantiene entro un prefissato intervallo di $\pm\Delta$ rispetto al valore finale. Il valore del parametro μT_r è una funzione di z, come mostra la fig. 1-35, in cui il minimo si verifica per smorzamenti tanto più prossimi ad 1 quanto minore è il valore di Δ.

Le discontinuità delle curve sono dovute alla presenza dei due limiti $\pm\Delta$, dei quali prevale ora l'uno ora l'altro.

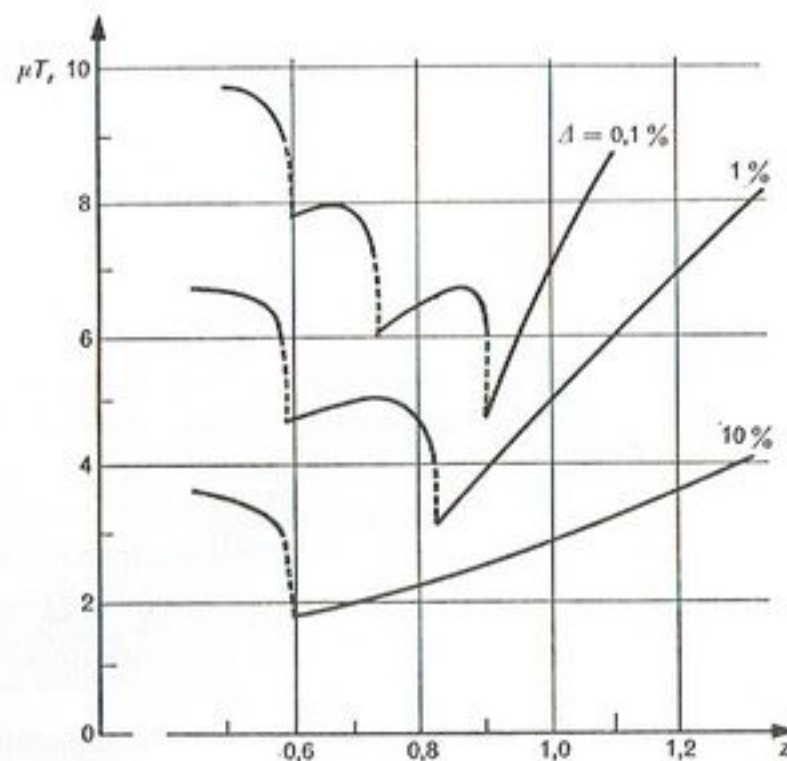



Fig. 1-35

1-5,5. *Risposta agli impulsi.*

Per i sistemi lineari ha interesse, in alcune applicazioni, la conoscenza della risposta ad una grandezza transitoria, di tipo impulsivo.

Si supponga, in prima approssimazione, che il segnale d'ingresso sia rappresentato da una funzione impulsiva di valore X; la risposta del sistema risulta, in questo caso:

$$y(t) = Xh'(t)$$

essendo $h'(t)$ la risposta alla funzione impulsiva unitaria, cioè l'antitrasformata della funzione di trasferimento $G(p)$.

L'andamento nel tempo della $y(t)$ è perciò determinato esclusivamente dalla funzione di trasferimento del sistema, mentre le ampiezze sono, istante per istante, proporzionali al valore dell'impulso applicato. Questo valore può quindi ricavarsi dal primo o da uno qualunque dei valori massimi della $y(t)$, attraverso un fattore di proporzionalità, che è funzione solo dei parametri della funzione di trasferimento.

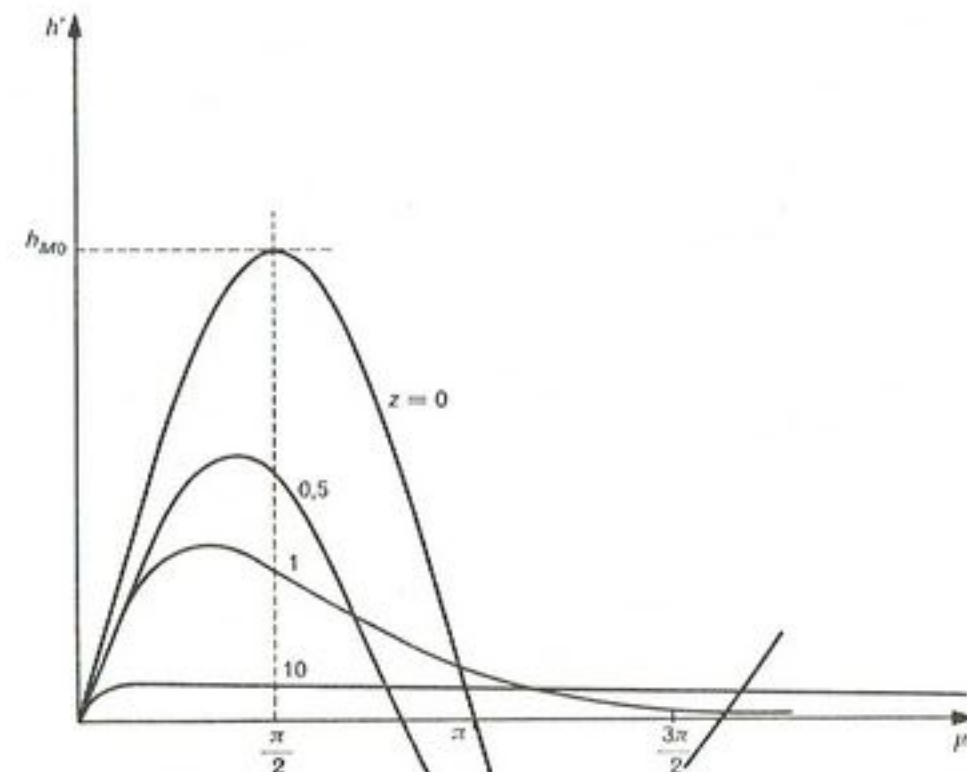



Fig. 1-36

Nel caso di sistemi in cui sia:

$$g(p) = \frac{1}{1 + \frac{2z}{\mu} p + \frac{p^2}{\mu^2}}$$

la risposta alla funzione impulsiva unitaria vale:

$$h'(t) = \frac{\mu}{\sqrt{1-z^2}} \varepsilon^{-z\mu t} \operatorname{sen} \mu \sqrt{1-z^2}\, t \qquad [1\text{-}45]$$

dando luogo, per i diversi valori di z, agli andamenti tipici di fig. 1-36. L'ampiezza del primo massimo, al tempo t_0 risulta:

$$h_M = \mu \varepsilon^{-z\mu t_0} = \mu \varepsilon^{-(z/\sqrt{1-z^2}) \operatorname{arctg} \sqrt{1-z^2}/z} \,. \qquad [1\text{-}46]$$

In particolare, per $z = 0$, si ha:

$$h_{M0} = \mu \qquad \text{per} \qquad \mu t_0 = \frac{\pi}{2}\,;$$

per altri valori di z, l'ampiezza del primo massimo h_M è riportata in fig. 1-37 assieme al valore del tempo t_0, in cui questo massimo viene raggiunto.

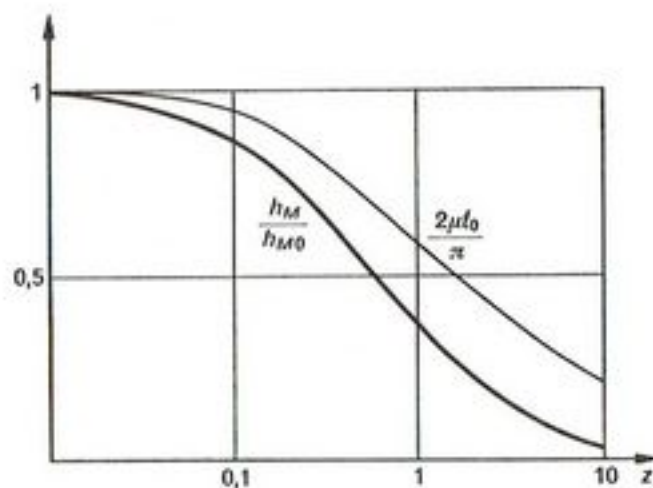



Fig. 1-37

Si nota, al crescere dello smorzamento z, la diminuzione sia di h_M che di t_0; la risposta, che è oscillatoria smorzata per $z < 1$, diviene aperiodica per $z > 1$ (1).

(1) Quando è $z > 1$, i valori immaginari delle radici danno luogo in [1-45] e [1-46] a funzioni in seno e tangente iperbolici. Per $z \gg 1$, h_M tende al valore $\mu/2z$.

Per la scelta di un apparecchio, destinato alla misura di grandezze impulsive, è interessante conoscere per quale intervallo di tempo T la risposta $y(t)$, dopo aver raggiunto il suo primo massimo y_M, rimanga entro l'1% (o in qualche caso il 3%) di tale valore. Questo intervallo è infatti quello che risulta disponibile per effettuare la lettura, o comunque la determinazione di y_M, senza superare il limite d'errore dell'1% (o del 3%).

Il valore del tempo T è funzione dei soli parametri della funzione di trasferimento; la fig. 1-38 mostra come il valore μT sia tanto maggiore quanto più elevato è lo smorzamento.

Si deve inoltre tener presente che, nella pratica, nessuna grandezza fisica ha l'andamento ideale della funzione impulsiva: i segnali d'ingresso reali avranno quindi sempre andamento transitorio, con salita da un valore nullo e ritorno a zero in tempi finiti. Essi possono però sempre essere scomposti in una successione di termini impulsivi, applicati al sistema in istanti susseguenti l'uno all'altro.

In luogo di esaminare la risposta di un sistema ai differenti tipi di segnali d'ingresso, mediante l'uso dell'integrale di convoluzione, si preferisce valutare l'errore che si può commettere nella misura di due impulsi unitari, distanziati fra loro di un intervallo di tempo Δt; conviene in questo caso esprimere quale sia l'intervallo di tempo massimo ammissibile perché l'errore sul primo dei due impulsi non superi un limite determinato.

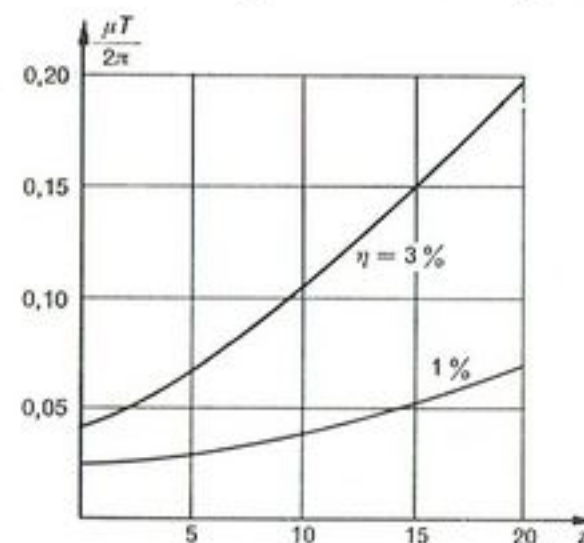



Fig. 1-38

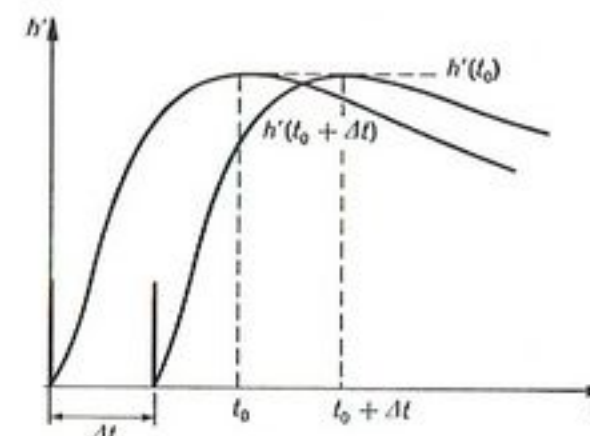



Fig. 1-39

Si consideri perciò la risposta del sistema ad un impulso unitario applicato al tempo $t = 0$; essa raggiunge il suo valore massimo al tempo t_0 (fig. 1-39).

La risposta al secondo impulso unitario, applicato al tempo Δt, ha la

stessa forma ed ampiezza e raggiunge il suo valore massimo al tempo:

$$t = t_0 + \Delta t$$

quando la risposta al primo impulso ha sorpassato il suo punto di massimo ed ha assunto il valore $h'(t_0 + \Delta t)$. I valori della differenza fra $h'(t_0 + \Delta t)$ e $h'(t_0)$ si possono ricavare dall'andamento di $h'(t)$ e perciò dai parametri della funzione di trasferimento.

In particolare il massimo valore di Δt entro cui il primo impulso viene ancora misurato con un errore che non superi l'1% (o il 3%), coincide con il tempo T indicato, per un sistema del secondo ordine, in fig. 1-38.

Criteri analoghi possono essere impiegati per valutare la capacità di un sistema di discriminare due impulsi che si succedono con un intervallo di tempo Δt, ossia la capacità di misurare separatamente il valore di ognuno di essi.

1-5,6. *Filtri.*

L'inserzione di un filtro è uno dei metodi più comuni per modificare la funzione di trasferimento di un sistema. In particolare, in presenza di segnali elettrici, il filtro assume la semplice forma di un doppio bipolo, che può essere attivo o passivo, lineare o non.

La funzione fondamentale di un filtro è in generale quella di permettere il passaggio solo delle frequenze esistenti in una determinata banda; in questo modo possono, per esempio, essere eliminati segnali estranei o può venir ridotta la loro influenza sul segnale misurato.

Un filtro ideale ha una funzione di trasferimento $G(p)$ tale che sia:

$$\dot{G}(j\omega) = G_0 \varepsilon^{-j\omega T_0} \quad \text{per} \quad \omega_1 < \omega < \omega_2$$
$$= 0 \quad \text{per} \quad \omega < \omega_1 \quad \text{e} \quad \omega > \omega_2;$$

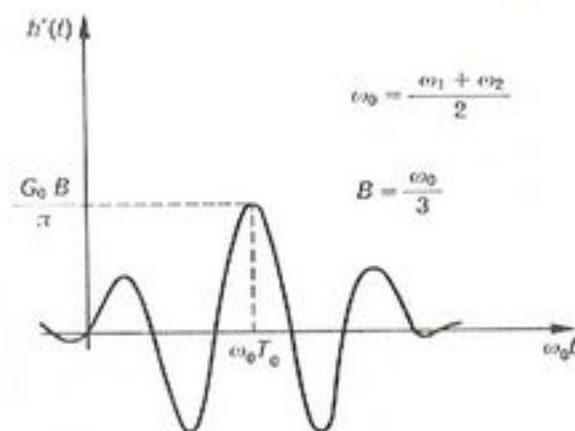



Fig. 1-40

in questo caso, infatti, un segnale con frequenza compresa nella banda da ω_1 a ω_2 viene trasmesso in uscita moltiplicato per il fattore G_0 e ritardato del tempo T_0, costante in tutta la banda; i segnali con frequenza esterna alla banda non sono invece trasmessi all'uscita.

La risposta all'impulso unitario di un simile filtro ha ampiezza

massima proporzionale alla larghezza di banda:

$$B = \omega_2 - \omega_1.$$

la fig. 1-40 riporta un esempio, con $B = \omega_0/3$.

Il fatto che la risposta impulsiva non sia nulla per $t < 0$ indica la non realizzabilità fisica di un simile filtro; si ha infatti, in pratica, che le frequenze che delimitano la banda non sono così nettamente definite e vengono invece individuate convenzionalmente (fig. 1-41); il comportamento di un filtro reale, soprattutto fuori dalla banda passante, viene meglio rappresentato da risposte del tipo di fig. 1-42.

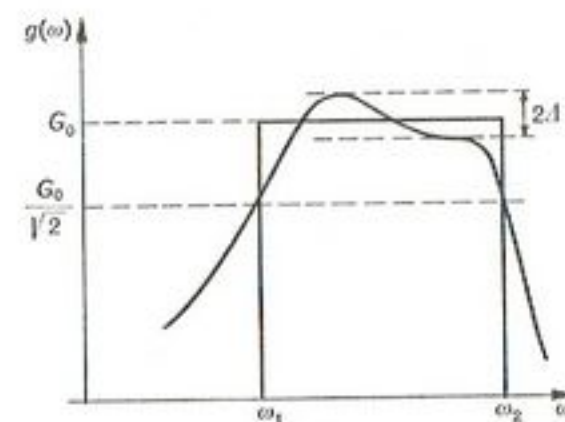



Fig. 1-41

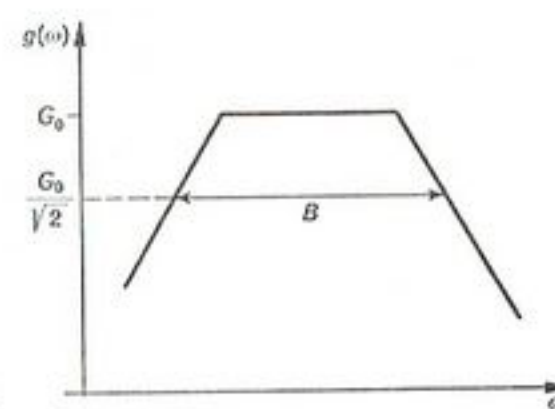



Fig. 1-42

Un caso importante è quello di un filtro con $\omega_1 = 0$ (filtro passa basso) la cui risposta allo scalino unitario è data in fig. 1-43. In essa la grandezza T_0 assume il significato di ritardo medio della risposta, mentre il tempo di salita T_s di questa, pur definibile in vario modo, si presenta sempre inversamente proporzionale alla larghezza di banda B. Quanto più limitata è quindi la banda, tanto più lentamente il sistema risponderà alle grandezze variabili.

Alcuni semplici casi tipici sono riportati nella Tabella 1-1.

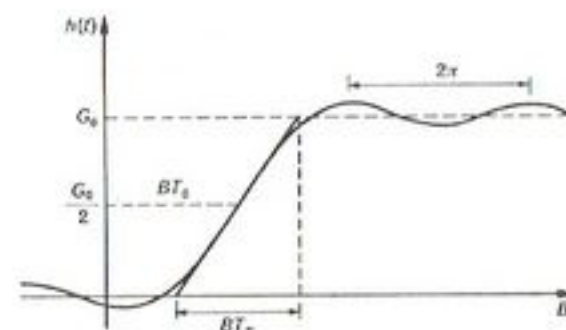
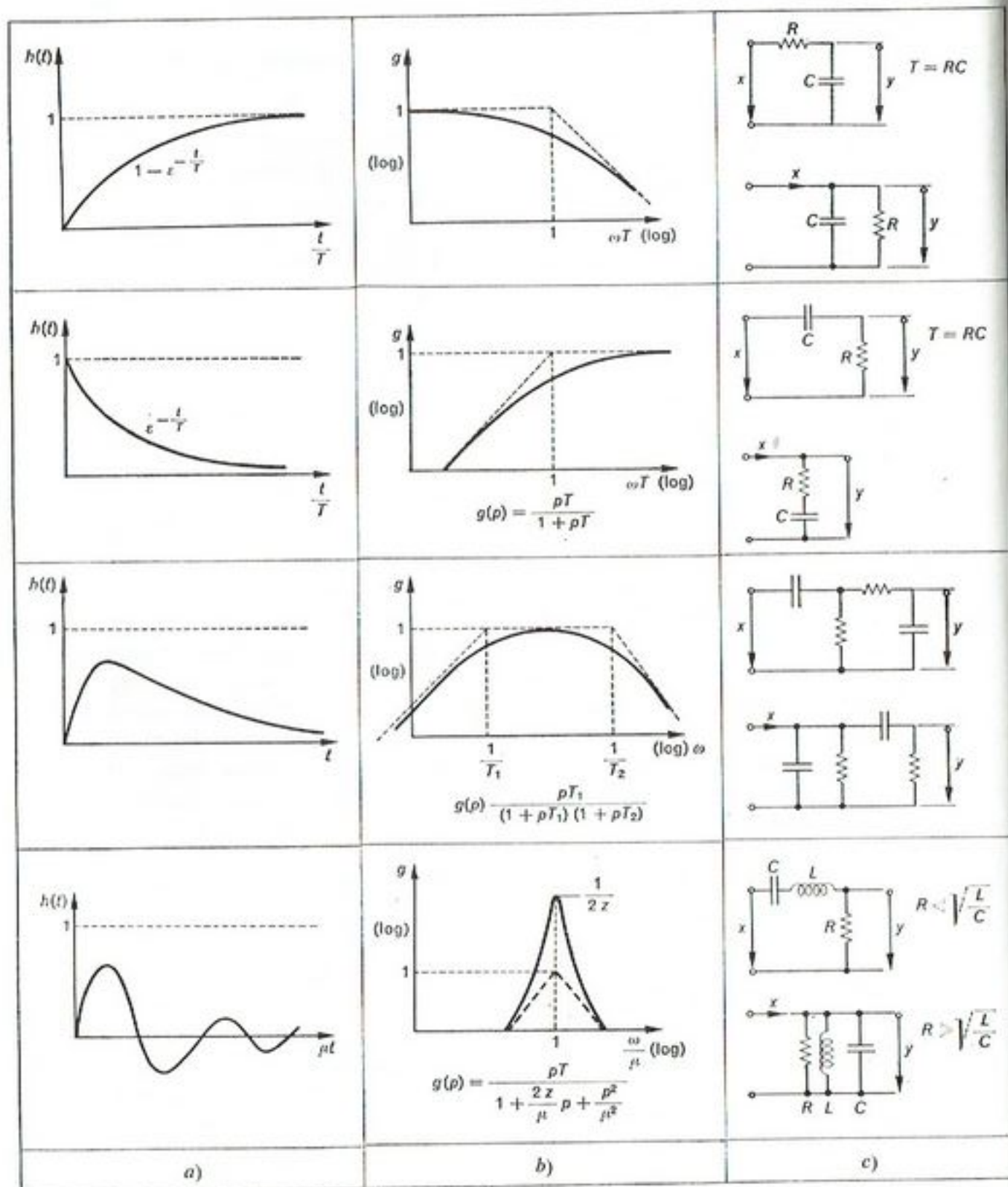



Fig. 1-43

Esempi di filtri semplici: *a*) risposta allo scalino unitario; *b*) risposta in frequenza; *c*) schemi elettrici equivalenti.

1-5,7. *Filtri numerici.*

Se è data una funzione $x(t)$ con la sua trasformata di Fourier $X(\omega)$, i valori di questa possono essere moltiplicati per quelli di una qualsiasi funzione prefissata $G(\omega)$ ottenendo un risultato simile a un filtraggio. Si ha però il grande vantaggio di poter imporre, per $G(\omega)$, condizioni anche non realizzabili fisicamente, come ad esempio un'attenuazione ad andamento rettangolare o con assenza di distorsione di fase.

Per poter eseguire questo filtraggio la $x(t)$ deve essere espressa in forma analitica o la sua trasformata deve essere ricavabile, mediante calcolo, da un sufficiente numero di valori campionati nel tempo. L'operazione di antitrasformazione può successivamente riportare in forma numerica la $y(t)$ come uscita.

Tale doppia operazione non è però sempre necessaria; si può dimostrare, infatti, che certe caratteristiche di filtraggio possono essere ottenute con opportune operazioni sulla sequenza dei valori campionati x_i che forma la $x(t)$. Un esempio, abbastanza comune, è l'uso della media mobile che, sostituendo ad ogni valore x_i la media, eventualmente pesata, dei tre valori x_i, x_{i-1} e x_{i-2}, equivale ad un filtro del secondo ordine.

I vantaggi del filtraggio numerico consistono nella possibilità di ottenere precisione e stabilità delle caratteristiche del filtro, ed insieme una grande facilità nel modificarle, cambiando dei coefficienti numerici.

1-6. **Strumenti di misura.**

1-6,1. *Caratteristiche generali.*

Nell'esecuzione di una misura, si può procedere talvolta con una certa libertà alla scelta degli elementi della catena, assegnando loro caratteristiche opportune. Ci si trova però spesso, anche per ovvie ragioni di praticità, ad utilizzare apparecchi, dimensionati e costruiti da una ditta a ciò specializzata, con caratteristiche e limiti imposti da ragioni costruttive o di costo, sui quali non è possibile, per l'operatore, esercitare alcuna influenza. È per questa ragione che si devono esaminare, in via di principio, gli *strumenti di misura*, intesi come quegli elementi autonomi di una catena di misura i quali, connessi direttamente alla grandezza da misurare, ne forniscono in uscita il valore numerico su un opportuno organo di visualizzazione, senza intervento dell'operatore.

Gli strumenti si distinguono così dai *trasduttori*, che forniscono in uscita un segnale analogico o, quanto meno, non visualizzato, benché sempre in relazione univoca con la grandezza d'ingresso.

Benché lo studio degli strumenti possa essere di carattere generale, ci riferiremo qui di seguito, specie per gli esempi, agli strumenti che misurano grandezze elettriche.

Dal punto di vista della sua utilizzazione, uno strumento è definito principalmente dalle seguenti caratteristiche:

– la *natura* della grandezza misurata (p. es. amperometro per corrente continua, voltmetro a valore efficace, ecc.);

– la *portata*, che designa il campo di valori per cui lo strumento è adatto;

– la sua *precisione*, ovvero un'indicazione sugli errori che lo strumento può introdurre, nel suo impiego in condizioni appropriate;

– il *consumo*, che esprime l'influenza che lo strumento esercita sul circuito di misura in cui è inserito;

– i *limiti d'impiego*, che definiscono il campo di valori delle grandezze d'influenza entro cui lo strumento conserva le sue caratteristiche.

Spesso, anziché la natura della grandezza misurata, si indica il tipo di strumento (p. es. amperometro magnetoelettrico, voltmetro numerico integratore, ecc.); per questa ragione è opportuno conoscere, per ogni tipo di strumento, quali siano le grandezze effettivamente misurate, i limiti d'impiego e le grandezze che ne influenzano la precisione, al fine di poter scegliere, per ogni particolare tipo di misura, lo strumento adatto.

Fra le varie grandezze, che possono influenzare la precisione, si segnalano:

– la posizione d'impiego, se orizzontale, verticale, inclinata;

– la temperatura, sia ambientale che dovuta al riscaldamento proprio dello strumento;

– la forma d'onda e la banda di frequenza della grandezza misurata;

– i campi, elettrici o magnetici, prodotti da fattori esterni;

– il valore delle tensioni ausiliarie di alimentazione, per gli strumenti elettronici.

1-6,2. *Portata. Costante strumentale. Sensibilità.*

Ad ogni strumento compete un certo campo di valori misurabili (campo di misura); il massimo di tali valori, si dice *portata* dello strumento. Questo valore coincide generalmente, ma non sempre, con il *valore nominale*, che è quello cui si fa riferimento per quanto riguarda le sollecitazioni delle varie parti dello strumento, la sua precisione, sicurezza di funzionamento, ecc.

I numeri letti non indicano, in genere, direttamente il valore della grandezza misurata; occorre pertanto conoscere la *costante strumentale* definita dal rapporto fra la portata e la corrispondente indicazione sulla scala. Questa costante è quindi il numero per cui bisogna moltiplicare ogni generica lettura, per ottenere il valore della grandezza misurata.

Se lo strumento è a più portate, ad ognuna di esse corrisponde una diversa costante strumentale; le portate (o le costanti strumentali) sono in generale riportate sullo strumento, in corrispondenza alle diverse posizioni del commutatore di portata, ove esista.

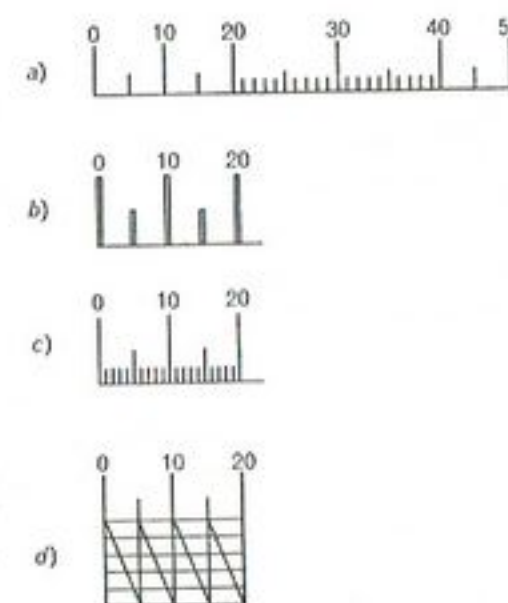
È preferibile che le costanti strumentali siano rappresentate da numeri interi semplici (p. es. 1-2-5-10, ecc.). È tuttavia buona pratica concentrare l'attenzione, nel momento della misura, sulla sola lettura dello strumento; le moltiplicazioni per la costante vengono poi eseguite separatamente.

Non è sempre possibile assicurare un rapporto costante fra indicazione dello strumento e grandezza misurata; in questi casi occorre perciò far uso di grafici opportuni di riporto, che sostituiscono l'uso delle costanti strumentali. Si preferisce però, quando è possibile, l'uso di scale non lineari, tracciate eventualmente in sede di taratura dello strumento stesso.

Accanto al concetto di costante strumentale, per gli strumenti a deviazione, si usa spesso definire la *sensibilità* di uno strumento, intesa come rapporto fra una variazione Δx della grandezza misurata e la corrispondente variazione $\Delta\delta$ (in mm) della deviazione dello strumento.

Fig. 1-44

Quando la sensibilità è costante, per ogni valore della grandezza misurata, si ottiene uno strumento a scala lineare; quando ciò non sia, per la definizione stessa di sensibilità, occorre precisare sia il valore intorno al quale si fa la variazione, sia l'ampiezza della variazione stessa. La fig. 1-44*a*) mostra un esempio di strumento con sensibilità aumentata nella regione centrale.

La sensibilità è sempre legata a variazioni piccole, ma finite, e non deve essere confusa con la *risoluzione* propria dello strumento, che è la più piccola variazione della grandezza da misurare che esso può indicare con sicurezza. Le fig. 1-44*b*), *c*), *d*) mostrano come, a parità di sensibilità, si possano avere scale con differente risoluzione.

Per lo strumento numerico, risoluzione e sensibilità corrispondono al valore dell'ultima cifra significativa indicata dallo strumento.

1-6,3. *Errori.*

Il valore di una grandezza, ottenuto per mezzo di uno strumento di misura, può considerarsi influenzato da più cause di errore. In primo luogo, anche se l'indicazione dello strumento, fosse esatta, negli strumenti a deviazione è presente un *errore di lettura* cioè quello che l'operatore commette nell'apprezzare la posizione dell'indice sulla scala. Questo errore dipende dalla capacità dell'operatore, specie quando si tratta di valutare le frazioni d'intervallo fra una divisione e l'altra; esso è d'altra parte legato alle dimensioni di questi intervalli ed allo spessore sia del segno tracciato sulla scala che dell'indice.

L'errore di lettura è eliminato negli strumenti numerici, nei quali esiste invece l'incertezza di un'unità di conteggio (errore di quantizzazione, vedi 1-3,6).

Quanto all'indicazione vera e propria dello strumento, si possono distinguere da una parte gli errori di natura sistematica, legati ai valori assunti dalle condizioni ambientali o dalle altre grandezze d'influenza note, nelle condizioni di misura; dall'altro, gli errori che non si possono collegare a specifiche grandezze d'influenza e che si ritengono generalmente di tipo casuale, come quelli dovuti a disturbi, attriti, giochi meccanici, ecc.

Si chiama *errore intrinseco* E_0 dello strumento quello che esso presenta in ben definite *condizioni di riferimento* (per esempio temperatura 20 °C, assenza di campi magnetici esterni, forma d'onda sinusoidale per le grandezze alternate, ecc.).

Il funzionamento dello strumento non può però essere limitato alle sole condizioni di riferimento ma deve essere garantito in un *campo d'impiego* — ossia in un ambito di valori delle sue grandezze d'influenza — più o meno esteso, a seconda della natura e del tipo di strumento (per esempio temperatura 20 ± 10 °C, campo magnetico esterno fino a $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ T); in questo campo d'impiego, l'errore dello strumento può subire delle *variazioni* E_i intorno al valore dell'errore intrinseco.

Alcune di queste variazioni possono essere direttamente legate al valore assunto da una specifica grandezza d'influenza, e solo da questa, per cui, noto tale valore, si possono eseguire delle correzioni. Per altre variazioni, si può solo stabilirne l'entità massima, quando una singola grandezza d'influenza vari entro i limiti prefissati, tutte le altre essendo nelle condizioni di riferimento.

I valori dell'errore intrinseco e delle variazioni possono essere misurati, per ogni condizione di funzionamento e per ogni punto della scala, mediante un'operazione di *taratura*; questi errori sono però determinabili a meno di una fascia d'incertezza, dovuta — come già si è accennato — agli errori di natura fortuita, propri dello strumento, ed agli errori di lettura.

Per caratterizzare uno strumento, con errore intrinseco E_0 e variazioni di errore E_i, dovute alle singole grandezze d'influenza, si possono utilizzare criteri diversi. Si può infatti, per un determinato campo d'impiego:

a) fissare un limite, separatamente, per i valori di E_0 e delle singole variazioni E_i; questo è il criterio generalmente utilizzato nella normativa per gli strumenti elettromeccanici;

b) fissare un limite ai singoli valori della somma $E_0 + E_i$, per le diverse grandezze d'influenza;

c) fissare un limite alla quantità (errore globale):

$$E_g = |E_0| + \Sigma |E_i|$$

che rappresenta il massimo errore che lo strumento può compiere, ammettendo che tutte le cause d'errore si combinino linearmente, ma nel modo più sfavorevole;

d) fissare un limite al valore dell'errore totale misurato nella combinazione più sfavorevole delle grandezze d'influenza; questo criterio, se consente di tener conto della reale combinazione degli effetti delle grandezze d'influenza, è il più difficile da verificare sperimentalmente;

e) fissare un limite per la grandezza (errore globale probabile):

$$E_p = \sqrt{E_0^2 + \Sigma E_i^2}$$

in cui si ammette (vedi 1-8,5) che i vari errori si combinino fra loro come variabili aleatorie, con i singoli errori considerati variabili aleatorie indipendenti.

Inoltre, poiché interessano generalmente gli errori relativi, questi possono essere espressi riferendoli al valore misurato (% della lettura), ad un valore di riferimento (p. es. % del fondo scala) o ad una combinazione di entrambi.

Agli effetti della sua utilizzazione, uno strumento è caratterizzato dall'ampiezza della fascia d'incertezza da attribuire al valore misurato, valore che è tuttavia difficile determinare a priori. Per gli strumenti soggetti alla normativa di cui al punto *a*), contraddistinti in *classi di precisione*,

generalmente si attribuisce ad ogni punto della scala una fascia d'incertezza pari al valore dell'indice di classe, in percento del fondo scala.

Così, ad esempio, un voltmetro con fondo scala 60 V e classe 0,5 potrà dar luogo, in ogni punto, ad un errore non superiore a:

$$\pm\frac{0,5}{100}\cdot 60 = \pm 0,3 \text{ V} .$$

Essendo costante, lungo tutta la scala, il limite per l'errore assoluto, l'errore relativo può essere tanto maggiore quanto più l'indicazione si trova in prossimità dello zero; uno strumento con incertezza $\pm\Delta$, con l'indice posto ad una frazione α del fondo scala, può dar luogo ad un errore relativo $\pm\Delta/\alpha$. Gli strumenti sono quindi bene utilizzati solo per letture oltre la metà o almeno un terzo del fondo scala.

Si noti che, ripetendo più volte la lettura della stessa grandezza, si possono ridurre gli effetti di quelle componenti dell'errore strumentale che hanno natura fortuita (errori di lettura, attriti, ecc.); per ridurre l'effetto delle altre cause di errore, occorre applicare le correzioni ricavate dalla taratura, per le effettive condizioni di impiego.

1-6,4. *Consumo.*

Ogni strumento di misura modifica il sistema in cui è inserito, creando una perturbazione nella stessa grandezza da misurare.

Gli strumenti elettrici, ad esempio, presentano una o più coppie di morsetti, destinati al collegamento con circuiti esterni, dai quali assorbono potenza attiva e, nel caso di correnti alternate, anche reattiva. Questa potenza può alterare le condizioni del circuito in cui lo strumento è inserito, dando luogo, come si vedrà, in alcuni casi ad un semplice errore di consumo, in altri casi a delle limitazioni nell'impiego degli strumenti stessi.

Il mezzo più semplice per esprimere quantitativamente questo effetto sta nella definizione dell'impedenza che lo strumento presenta ai suoi morsetti d'ingresso; questo concetto può essere esteso, dalla misura delle grandezze elettriche, anche ad altri tipi di misura.

L'influenza di uno strumento sul sistema in cui esso agisce può assumere però anche altri aspetti, in relazione, per esempio, all'ingombro fisico dello strumento stesso, alla sua dislocazione, necessaria per una buona lettura, agli accoppiamenti elettromagnetici indesiderati che esso provoca, ecc., tutte condizioni che possono modificare la grandezza da misurare.

Di diverso effetto è l'assorbimento di potenza da parte dei circuiti ausiliari, alimentati da sorgenti esterne; in entrambi i casi la potenza dissipata nello strumento dà origine ad un riscaldamento interno, che

può richiedere un certo tempo per raggiungere le condizioni di regime, a cui corrisponde in genere la garanzia di precisione.

1-6,5. *Limiti d'impiego.*

Per ogni singolo strumento, oltre ad un certo campo di condizioni d'impiego, possono sussistere uno o più valori limiti delle grandezze d'influenza, superati i quali lo strumento può essere permanentemente danneggiato, nel senso che esso non è più in grado di corrispondere alla sua precisione, neppure quando siano cessate le cause esterne.

Esempi tipici sono: i valori massimi di temperatura, oltre i quali si danneggiano i materiali isolanti; le sovraccorrenti o le sovratensioni che possono produrre alterazioni nella struttura di alcuni materiali o nell'isolamento delle varie parti. Molto importanti possono essere anche delle particolari condizioni di servizio, con la presenza di fumi, polveri, umidità elevate ecc.

Una delle grandezze d'influenza che viene oggi presa in particolare considerazione per molte applicazioni, come possibile limite d'impiego, è la presenza di vibrazioni ed urti. Gli strumenti destinati a tali applicazioni devono sottostare a severe prove di vibrazione, con frequenze ed ampiezze diverse, nelle varie direzioni rispetto all'asse dello strumento. In altri casi si sottopone lo strumento a prove di accelerazione e decelerazione, secondo modalità fissate dalle singole norme.

Oltre alla considerazione dei limiti d'impiego di ogni singolo apparecchio nel senso sopra precisato, occorre considerare le limitazioni proprie di ogni particolare tipo di strumento, come portata massima e minima, campo di frequenza, consumo, ecc. raggiungibili con le usuali costruzioni.

Questi limiti, imposti da caratteristiche costruttive o dalla validità delle relazioni su cui si basa il funzionamento dello strumento, sono naturalmente abbastanza elastici, dipendendo dalla precisione che si vuole ottenere. Alcuni di essi possono inoltre essere superati, a spese di altri requisiti a cui può essere attribuita, per la particolare applicazione, minore importanza. Il calcolo di tali limiti è perciò sempre basato su considerazioni generali, che possono fornire solo un ordine di grandezza. La loro conoscenza è tuttavia molto importante, nello scegliere un tipo di strumento, per una specifica applicazione, onde evitare soluzioni tecnicamente ed economicamente non convenienti.

Pur restando entro i corretti limiti d'impiego, può accadere che uno strumento perda, col tempo, le sue caratteristiche di precisione, che esso cioè non sia *stabile*; il mantenimento del buon funzionamento, in senso anche grossolano, è indicato, specie per apparecchiature complesse, dall'*affidabilità* dei suoi componenti.

1-6,6. *Requisiti di un rivelatore di zero.*

Nei metodi di zero, il raggiungimento di una particolare condizione di equilibrio è indicata dall'annullarsi della tensione o della corrente in un determinato ramo di un circuito.

È ovvio che ogni tipo di voltmetro (o amperometro) potrebbe essere usato, in linea di principio, per segnalare la presenza di una tensione (o corrente) non nulla; i rivelatori di zero possono perciò essere costruiti sugli stessi principi degli strumenti indicatori.

I requisiti specifici dei primi sono tuttavia profondamente diversi da quelli già illustrati per gli indicatori; il rivelatore di zero non misura infatti una grandezza e non ha quindi bisogno di possedere una sua portata, una scala numerata, nonché una sua precisione intrinseca. Esso funziona in una limitata regione intorno alla posizione di zero, dovendo essere in grado di segnalare la presenza di una pur minima tensione (o corrente) diversa da zero.

Il rivelatore è perciò caratterizzato dal valore della tensione (o corrente, o potenza) cui corrisponde sulla scala una deviazione unitaria dalla posizione di zero. Questa caratteristica viene chiamata *sensibilità* (voltmetrica, o amperometrica, o wattmetrica) del rivelatore, con estensione del concetto già dato in 1-6,2.

L'indicazione della sensibilità deve in generale essere accompagnata dal valore dell'impedenza che il rivelatore presenta, nelle sue condizioni di impiego.

Nei rivelatori per corrente alternata assume importanza anche la *selettività*, cioè la capacità di indicare l'annullarsi di una sola componente sinusoidale indipendentemente dalle armoniche presenti. Essa si esprime in generale con il rapporto di attenuazione fra l'indicazione alla frequenza fondamentale e quella alle armoniche, a parità di ampiezza del segnale di ingresso.

1-7. **Proprietà delle variabili aleatorie.**

1-7,1. *Definizioni.*

Come si è già osservato in 1-2,3 i risultati di una misura sono in genere dei valori aleatori, nel senso che non si può prevedere, prima di effettuare l'esperimento, quale dei possibili risultati si verificherà, sia per la variabilità dell'errore proprio dello strumento impiegato, sia per la variabilità della stessa grandezza che è oggetto di misura. Si può perciò dire che, in linea di principio, l'esecuzione di una misura non differisce da altri esperimenti aleatori, quale può essere ad esempio il lancio di un dado con sei facce numerate da uno a sei. In entrambi i casi, infatti, si possono

stabilire a priori quali siano i risultati possibili, ma non indicare quale sarà il risultato di un dato esperimento singolo, se non in termini di probabilità.

Per usare un linguaggio più generale, nel risultato di un singolo esperimento si terrà conto delle sue proprietà, che lo distinguono da tutti gli altri risultati possibili, e di quelle che lo accomunano ad alcuni e lo distinguono da altri. Per esempio, nell'esperimento di lancio di un dado, il risultato 3 è diverso da tutti gli altri, ma ha in comune con 1 e 5 la proprietà di essere dispari, con 1 e 2 quella di essere inferiore a 4 e così via.

L'insieme dei risultati possibili può perciò essere suddiviso, secondo vari criteri, in sottoinsiemi caratterizzati da una specifica proprietà o *evento*; diremo che un determinato evento si è verificato quando il risultato appartiene al sottoinsieme che lo caratterizza.

Inoltre, assegnati due eventi A_1 e A_2, si denota con

$$A = A_1 + A_2$$

il verificarsi o di A_1, o di A_2, o di entrambi. Si dirà che A_1 e A_2 sono fra loro disgiunti (o incompatibili) se la presenza dell'uno esclude quella dell'altro. Così è nel lancio di un dado, se si assume per evento A_1 il presentarsi del 5, per A_2 quello del 6, per A quello di un risultato maggiore di 4.

Si constata facilmente che a tale impostazione corrisponde l'applicazione della logica della teoria degli insiemi, con i concetti di unione, intersezione, ecc. dei sottoinsiemi. Ad esempio, se un evento A si verifica solo quando si presentano congiuntamente sia l'evento A_1 che quello A_2, il sottoinsieme A è l'intersezione di quelli di A_1 e A_2; un evento impossibile è un sottoinsieme vuoto e così via.

1-7,2. *Probabilità di un evento.*

In alcuni esperimenti si può formulare l'ipotesi di conoscere a priori quali e quanti siano i risultati ugualmente possibili e vedere quanti di essi verificano l'evento A; diremo allora che la *probabilità* $P(A)$ dell'evento A è il rapporto fra il numero $m(A)$ dei casi favorevoli all'evento A e quello n di tutti i casi possibili, giudicati egualmente possibili; analiticamente: $P(A) = m(A)/n$.

Ad esempio, in un dado a sei facce, corrispondenti a sei risultati ugualmente possibili, il risultato che porta al numero 3 è uno solo; diremo quindi che la probabilità di ottenere l'evento 3 è di 1/6.

In casi più complessi, la probabilità può essere calcolata attraverso opportune regole; essa è sempre espressa da un numero positivo non superiore ad uno:

$$0 < P < 1$$

gli estremi essendo evidentemente la impossibilità o la certezza dell'evento stesso.

Le regole fondamentali del calcolo delle probabilità possono essere così riassunte:

a) la probabilità di ottenere o A_1 o A_2, essendo A_1 e A_2 due eventi disgiunti, è data dalla somma delle probabilità dei due eventi:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)\,; \qquad [1\text{-}47]$$

ad esempio, la probabilità che, nel lancio di un dado, si verifichi o il 3 o il 5, è la somma di $P(3)$ e di $P(5)$, ossia 2/6.

b) la probabilità di ottenere congiuntamente due eventi A_1 e A_2, fra loro indipendenti, è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi:

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)\,. \qquad [1\text{-}48]$$

Così, nel lancio di due dadi, la probabilità di ottenere in entrambi il numero 6 (che ha probabilità $\frac{1}{6}$) è data da:

$$P(6,6)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\,.$$

È facile vedere che, viceversa, le relazioni [1-47] e [1-48] valgono solo se gli eventi sono fra loro disgiunti; se non lo sono risulta:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\,;$$

infatti l'evento somma, corrispondente al presentarsi di A_1 o A_2, si verifica in tutti i casi in cui si verifica A_1, più quelli in cui si verifica A_2; da questi dobbiamo togliere i casi in cui si è verificato contemporaneamente A_1.

Ad esempio, la probabilità che il lancio di un dado dia come risultato o un numero dispari (evento A_1, probabilità $\frac{1}{2}$) o un numero inferiore a 4 (evento A_2, probabilità $\frac{1}{2}$) è dato da:

$$P(A_1+A_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{6}=\frac{4}{6}$$

essendovi due eventi su sei (i numeri 1 e 3) che verificano contemporaneamente A_1 e A_2. Lo stesso risultato si ottiene ovviamente considerando le probabilità somma degli eventi 1, 2, 3, 5.

1-7,3. *Frequenza di un evento. Stima.*

Nella maggior parte delle applicazioni che interessano le misure, non è possibile conoscere a priori la suddivisione dei risultati e la loro probabilità. Possiamo invece constatare, a posteriori, che, su n esperimenti, l'evento A si è presentato r volte; chiameremo *frequenza* dell'evento A il rapporto:

$$f=r/n\,.$$

Il legame che consente di collegare i valori della frequenza con quelli, incogniti, della rispettiva probabilità, è dato dal principio di Bernoulli per il quale, al tendere di n all'infinito, il valore della frequenza di un evento tende al valore della probabilità dell'evento stesso.

Un tale passaggio al limite va inteso nel senso che, al crescere del numero n delle prove, tende a uno la probabilità di ridurre entro limiti assegnati arbitrari la differenza fra la frequenza dell'evento e la sua probabilità.

Le considerazioni precedenti forniscono una spiegazione semplice ed intuitiva del concetto di probabilità. Una visione più rigorosa porta invece a definire, in modo assiomatico, come variabile aleatoria un insieme, finito o infinito, continuo o discreto, di valori ad ognuno dei quali è associato un valore di probabilità, cioè un valore che soddisfa ai principi espressi nei precedenti paragrafi e che è il valore a cui tende la frequenza sperimentale.

La probabilità di un evento non può mai quindi essere misurata, ma solamente stimata, da un numero grande, ma sempre finito, di esperimenti. Ciò è vero anche, più in generale, per ogni caratteristica di una grandezza aleatoria.

1-7,4. *Funzioni di distribuzione e di densità.*

Consideriamo ora una variabile aleatoria X cioè un insieme di n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, come, ad esempio, i risultati di n determinazioni della stessa grandezza. Si ordinino questi numeri per valori crescenti e si costruisca un grafico che riporti, in funzione di x, il numero i (assoluto o meglio relativo o percentuale) degli esperimenti che hanno dato un risultato $x_i < x$.

Si ha allora o una curva continua (fig. 1-45) (se la variabile X è continua) o a gradini (se le x_i hanno valori discreti) che parte da zero ed è, per costruzione, sempre crescente fino a raggiungere il valore massimo (1 o 100%) per il massimo valore di x_i. Questa curva individua una funzione della variabile aleatoria che rappresenta la frequenza con la quale si sono presentati i valori non superiori a x; per n molto grande,

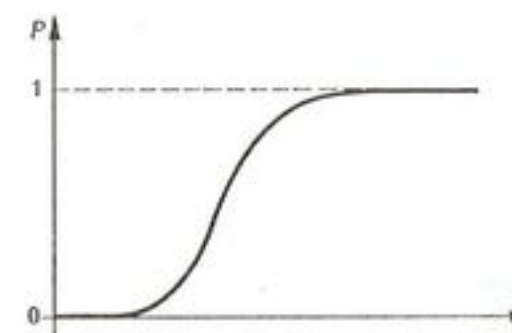



Fig. 1-45

essa tende alla distribuzione della probabilità che ha il valore x di non essere superato, durante la misura.

Se la variabile X si può estendere da $-\infty$ a $+\infty$, la funzione $P(x)$ (funzione di distribuzione o di probabilità cumulativa) che esprime la probabilità che sia $x_i < x$, gode delle seguenti proprietà:

$$P(a) < P(b) \qquad \text{se} \quad a < b\,;$$
$$P(-\infty) = 0\,; \qquad P(\infty) = 1\,.$$

Si definisce anche come *funzione di densità di probabilità* $p(x)$ la funzione:

$$p(x) = \mathrm{d}P(x)/\mathrm{d}x \tag{1-49}$$

per cui è, in base alle relazioni precedenti:

$$p(x) > 0\,; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1\,;$$

per la [1-49] la grandezza $p(x)\mathrm{d}x$ esprime la probabilità che ha la variabile aleatoria di essere compresa tra il valore x e $(x + \mathrm{d}x)$ (fig. 1-46 *a*). Questa definizione si applica anche a variabili discontinue, che possono essere schematizzate con una porzione di continuo o rappresentate mediante istogrammi (fig. 1-46 *b*), che raggruppano i valori di opportuni intervalli della grandezza x (1).

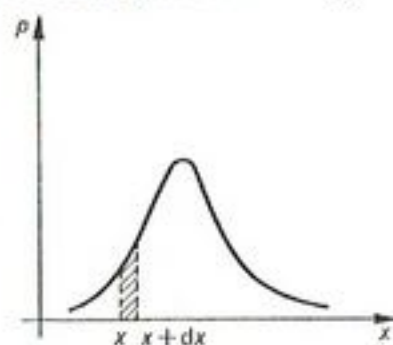
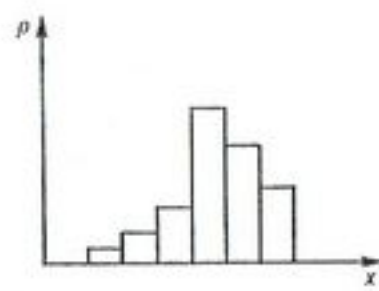



Fig. 1-46 *a* Fig. 1-46 *b*

1-7,5. *Caratteristiche di una distribuzione.*

Le grandezze che caratterizzano una distribuzione di probabilità sono:

a) la *media* M, ottenuta pesando ogni valore x con la sua probabilità $p(x)\mathrm{d}x$:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x\,; \tag{1-50}$$

(1) La scelta degli intervalli, come numero ed ampiezza, può portare, nel caso di risultati relativamente poco numerosi, ad istogrammi diversi; le caratteristiche della distribuzione, valutate « a gruppi », cioè attribuendo il valore centrale dell'intervallo a tutti i risultati che vi appartengono, possono perciò dipendere da tale scelta. Una regola empirica suggerisce di suddividere un campo di n risultati in un numero pari a $5 \log n$ di intervalli di uguale ampiezza.

b) la sua *varianza* V:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)\mathrm{d}x\,. \tag{1-51}$$

Alla radice positiva della varianza $\sigma = +\sqrt{V}$, si dà il nome di *scarto quadratico medio*; esso, come la media, ha le stesse dimensioni fisiche della variabile X.

Per una distribuzione discreta di n valori, le [1-50], [1-51] assumono la forma:

$$M(X) = \sum_1^n x_i p_i \qquad\qquad \text{con} \ \sum_1^n p_i = 1$$
$$V(X) = \sigma^2 = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 p_i\,.$$

Per analogia con simili espressioni della meccanica, la media si può indicare come il baricentro di un insieme di masse p_i poste nelle posizioni x_i; la media esprime infatti la « tendenza centrale » della distribuzione. Analogamente, la varianza è un momento di secondo ordine rispetto alla media, come il momento d'inerzia delle masse p_i, rispetto al loro baricentro. Essa caratterizza la « dispersione » della distribuzione.

I momenti di ordine superiore, del tipo:

$$M_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^r p(x)\mathrm{d}x$$

possono servire ad indicare particolari caratteristiche della distribuzione quali la sua asimmetria (legata al momento di terzo ordine) alla accentuazione della cuspide, ecc.

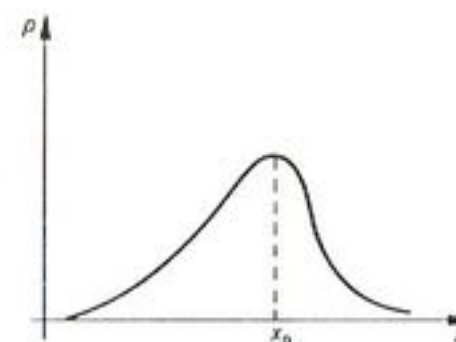
Altri parametri, più empirici, che possono caratterizzare una distribuzione, sono:

– la mediana, che è il valore x_m che separa la distribuzione in due metà ossia per cui è:

$$P(x_m) = \tfrac{1}{2}\,;$$

se la distribuzione è simmetrica, la mediana coincide con la media;

Fig. 1-47

– la moda, che è il valore x_0 a cui compete la massima densità di probabilità (fig. 1-47); una distribuzione può avere più massimi e dicesi allora multimodale.

1-7,6. *Proprietà della media e della varianza.*

Sia una distribuzione, per esempio discreta, di una variabile aleatoria X di media:

$$M(X) = \sum p_i x_i ;$$

gli scarti:

$$w_i = x_i - M(X)$$

costituiscono una nuova variabile aleatoria, con lo stesso tipo di distribuzione, a valor medio nullo; è infatti:

$$M(W) = \sum w_i p_i = 0 \qquad [1\text{-}52]$$

mentre la varianza:

$$V(W) = \sum (x_i - M(X))^2 p_i = \sum w_i^2 p_i$$

è la stessa.

Se si calcola la somma dei quadrati degli scarti w'_i presi, non rispetto alla media x, ma rispetto ad un qualsiasi altro valore:

$$H = M - \Delta$$

si ottiene:

$$w_i'^2 = (x_i - H)^2 = (x_i - M + \Delta)^2 = (w_i + \Delta)^2$$

e quindi:

$$V(W') = \sum w_i'^2 p_i = \sum w_i^2 p_i + 2\Delta \sum w_i p_i + \Delta^2 = V(W) + \Delta^2$$

essendo, per la [1-52], nullo il termine $\sum w_i p_i$. Si vede allora che *la media è quel valore rispetto al quale è minima la somma dei quadrati degli scarti* (principio dei minimi quadrati).

Per le medie e le varianze di serie di numeri o di distribuzioni, si dimostrano le seguenti proprietà:

1) il valore medio della somma di più variabili è uguale alla somma dei valori medi delle singole variabili; lo stesso dicasi per le varianze se le variabili sono indipendenti:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$$

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y);$$

2) il valor medio del prodotto di più variabili indipendenti è uguale al prodotto dei valori medi:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Si ha inoltre, se k e a sono costanti:

$$M(kX + a) = kM(X) + a,$$

$$V(kX + a) = k^2V(X).$$

3) Se di due variabili indipendenti almeno una ha valor medio nullo (come si verifica quando si prendono come variabili gli scarti dalla media) il valor medio dei quadrati della somma è uguale alla somma dei valori medi dei quadrati delle singole variabili; è cioè:

$$M(X + Y)^2 = M(X^2) + M(Y^2).$$

4) Se una grandezza x è funzione di più variabili aleatorie indipendenti:

$$X = f(A, B, C, \ldots).$$

per piccole variazioni Δx si ha:

$$\Delta x = \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\Delta b + \ldots.$$

Quadrando si ottiene:

$$(\Delta x)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b}\Delta a\,\Delta b + \ldots;$$

facendo la media dei valori di $(\Delta x)^2$ per distribuzioni di Δa, Δb, ... a valor medio nullo, si ha, per la regola precedente:

$$M(\Delta x)^2 = V(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 V(A) + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 V(B) + \ldots. \qquad [1\text{-}53]$$

Si trovano così le regole di composizione della varianza in modo analogo a quelle, ricavate in 1-2,5, per la propagazione degli errori. In particolare si ritrova che la varianza, sia per la somma che per la differenza di più termini è data dalla somma delle varianze dei singoli termini.

1-7,7. *Distribuzione gaussiana.*

La più importante e la più utilizzata fra le distribuzioni continue di probabilità è la distribuzione *normale o gaussiana*:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x - \bar{x}}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right]$$

funzione simmetrica rispetto a $\bar{x}$; la caratteristica forma a campana (fig. 1-48) risulta tanto più appuntita quanto minore è σ.

Detta funzione ha valore medio pari a $\bar{x}$ e scarto quadratico medio σ; spesso viene espressa in funzione di variabili adimensionali ridotte, con valor medio nullo e s.q.m. unitario; si ha allora:

$$u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}; \qquad p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right].$$

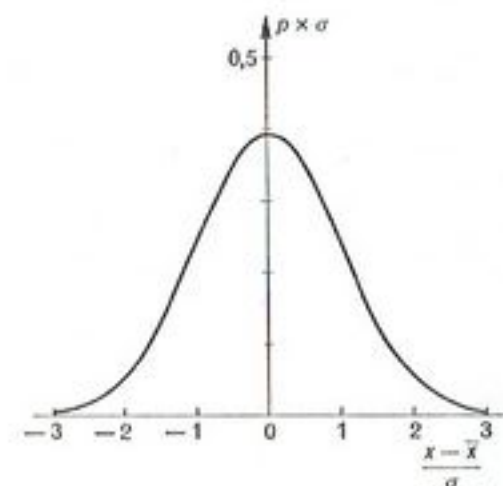



Fig. 1-48

Dai grafici e dalle tavole di $p(u)$ si ricavano i valori di qualsiasi variabile aleatoria con distribuzione normale, una volta dati valore medio e s.q.m. (vedi Tab. 8.1).

In particolare, la probabilità che un valore della variabile x cada nell'intervallo

$$\bar{x} + u_1\sigma = x_1 < x < x_2 = \bar{x} + u_2\sigma$$

vale:

$$\Delta P = \int_1^2 p(u)\,\mathrm{d}u = P(u_2) - P(u_1).$$

Di particolare importanza sono i valori relativi ad intervalli simmetrici $(x \pm u\sigma)$:

$u = \pm 1$	$\pm 1{,}5$	± 2	$\pm 2{,}5$	± 3
$P = 0{,}683$	0,866	0,954	0,988	0,997

cioè, in una distribuzione normale, la probabilità di ottenere valori che distino più di 2σ dalla media è inferiore al 5%.

L'importanza della distribuzione normale può essere attribuita all'esistenza di un teorema, in base al quale l'insieme di N variabili aleatorie indipendenti tende ad una distribuzione normale al tendere di N all'infinito, indipendentemente dalla forma della distribuzione delle variabili originali. È questa la ragione per cui si ammette generalmente che, in presenza di più cause di errore indipendenti, il risultato di una misura possa esser considerato come una variabile aleatoria con distribuzione normale.

Altre volte è possibile trasformare una distribuzione non normale di una variabile aleatoria x_i in una distribuzione normale di una funzione $z(x_i)$.

1-7,8. *Combinazione di due variabili.*

Si considerino ora due variabili aleatorie x e y, con distinte funzioni di distribuzione $P(x)$ e $P(y)$; si definisce come funzione di distribuzione congiunta o di secondo ordine $P(x, y)$ la probabilità di soddisfare contemporaneamente alle condizioni

$$x_i < x \qquad y_i < y;$$

analogamente si definisce la funzione di densità congiunta $p(x, y)$

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Le funzioni di densità del primo ordine sono rispettivamente:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}y$$

$$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Se le due variabili sono indipendenti, valgono le relazioni:

$$p(x, y) = p(x)p(y)$$

$$P(x, y) = P(x)P(y).$$

Oltre alle medie $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ed agli scarti quadratici medi σ_x e σ_y si può definire la *covarianza* delle due variabili:

$$C_{xy} = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y}) p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \sigma_x\sigma_y.$$

La quantità:

$$\varrho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

detta coefficiente di correlazione, ha valori compresi fra -1 e $+1$.

1-8. **Applicazione agli errori fortuiti.**

1-8,1. *Distribuzione degli errori fortuiti.*

Nella misura ripetuta di una grandezza, di valore X_0 costante, si ammette spesso che la distribuzione dei valori misurati X_i e quindi degli errori:

$$E_i = X_i - X_0$$

sia assimilabile ad una distribuzione normale. Ciò equivale a considerare tali errori come la somma di molti termini elementari, ciascuno di ampiezza molto piccola, di segno e valore diversi, fra loro indipendenti ed egualmente probabili.

In base alla distribuzione assunta, il valore X_0 corrisponde al valore centrale, o media, della distribuzione:

$$X_0 = M(X) = \sum p_i X_i \qquad [1\text{-}54]$$

mentre la distribuzione stessa, che ha la forma di fig. 1-48, è caratterizzata, oltre che dal valore medio, dalla sua varianza

$$V(X) = \sum p_i (X_i - X_0)^2 = \sum p_i E_i^2;$$

tanto maggiore è la varianza, tanto maggiore è la dispersione dei valori misurati, rispetto al valore X_0.

1-8,2. *Stima del valore centrale.*

Le considerazioni del precedente paragrafo sono valide per un insieme infinito di valori x_i della grandezza misurata; in pratica, una serie di misure ne contiene solo un numero limitato n.

Si dimostra tuttavia che, in una tale serie, il valore, che ha la maggior probabilità di rappresentare il valore centrale X_0 dell'intera distribuzione, è dato dalla media aritmetica:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i \qquad [1\text{-}55]$$

che viene perciò generalmente assunto come risultato più plausibile della misura ([1]).

Non sempre è possibile verificare l'attendibilità dell'ipotesi di distribuzione normale, specie se il numero n delle misure non è molto elevato (p. es. minore di 30). Condizioni necessarie (ma non sufficienti) possono dedursi dalle proprietà delle distribuzioni casuali; ad esempio:

- ordinando le misure in senso crescente (o decrescente), la media occupa la posizione centrale;

- i valori x_i che più si allontanano dalla media sono meno numerosi di quelli prossimi a $\bar{x}$.

Tuttavia, anche quando non vi sia la sicurezza di una distribuzione normale, in mancanza di altre ipotesi plausibili, è sempre opportuno ricorrere al valore medio. In caso di misure non perfettamente equivalenti, si può ricorrere ad una media ponderata.

L'ipotesi di distribuzione normale per X consente anche di calcolare la distribuzione dei valori $\bar{X}$ che si potrebbero ottenere come medie di (infinite) serie di n misure.

Si dimostra che anche questa distribuzione è di tipo normale, con valore medio X_0 e scarto quadratico medio:

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad [1\text{-}56]$$

minore di quello, σ, dell'insieme delle x_i; il vantaggio diminuisce tuttavia lentamente, al crescere di n.

([1]) Si noti che la [1-55] corrisponde alla [1-54] dove, al posto della probabilità incognita p_i si usa la frequenza $1/n$ con cui i valori x_i si sono presentati nella esecuzione delle n misure.

1-8,3. *Stima della dispersione.*

Le differenze d_i fra i valori delle singole misure x_i e la loro media:

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

differiscono dagli scarti w_i presi rispetto a X_0. Si ha, tuttavia:

$$\sum d_i = \sum x_i - n\bar{x} = 0$$

e:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum w_i^2 = \frac{1}{n} \sum [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - X_0)]^2 = \frac{\sum d_i^2}{n} + \Delta^2 .$$

Non essendo noto lo scarto $\Delta = X = X_0$ fra la media delle misure ed il valore centrale dell'insieme, esso può essere sostituito dallo s.q.m. della media s; si ha quindi, per la [1-56]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-1}} . \qquad [1\text{-}57]$$

La [1-57] ci consente di stimare la dispersione dell'insieme, pur partendo da un numero limitato di misure. Si noti che la presenza del fattore $(n-1)$, al posto di n, è trascurabile se il numero delle misure è sufficientemente elevato; invece, al limite, una sola misura ($n = 1$, $d = 0$) ha dispersione indeterminata e non nulla.

Il valore di σ così trovato consente di valutare i probabili limiti entro cui può cadere una singola misura, intorno al valore $\bar{x}$, limiti che possono assumersi proporzionali a σ (usualmente $\pm 2\sigma$ o $\pm 3\sigma$ a seconda del livello di confidenza che si vuole raggiungere, ossia del campo di probabilità che si vuole comprendere):

$$x_i = \bar{x} \pm 3\sigma .$$

Questa fascia d'incertezza è ovviamente relativa alle condizioni di misura in cui si è giunti a ricavare il valore di σ e non può tener conto di altre cause che, in quelle condizioni, agiscono in modo sistematico.

Si può anche dire, pur con le cautele necessarie in un ragionamento probabilistico, che una singola misura, che ecceda i limiti di $\pm 3\sigma$ intorno al valore medio di una serie abbastanza numerosa di misure, abbia poche probabilità di appartenere ad essa e possa perciò ascriversi a mutate condizioni di misura o ad un errore grossolano.

Analogamente si potrà scrivere:

$$X_0 = \bar{x} \pm ts = \bar{x} \pm t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (\text{con } t = 2 \text{ o } 3)$$

per definire la fascia d'incertezza propria di $\bar{x}$.

1-8,4. *Calcolo della media e della dispersione.*

Per il calcolo della media e della dispersione, possono risultare utili le seguenti regole.

Si sottragga dagli n valori x_i la quantità arbitraria H, scelta in modo tale da rendere semplici le differenze:

$$z_i = x_i - H\,;$$

dalla media $\bar{z}$ delle z_i si può ricavare la media $\bar{x}$ delle x_i per mezzo della relazione:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{n}\sum_1^n (z_i + H) = \bar{z} + H$$

essendo, per definizione,

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum z_i\,.$$

Per il calcolo di $\sum d_i^2$ si ottiene:

$$\sum d_i^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum [(x_i - H) - (\bar{x} - H)]^2 =$$
$$= \sum (z_i)^2 + n\bar{z}^2 - 2\bar{z}\sum z_i = \sum (z_i)^2 - \frac{(\sum z_i)^2}{n} = \sum (z_i)^2 - (\bar{z})^2 n\,.$$

Il calcolo può quindi precedere sulla base della $\sum z_i$ e della $\sum z_i^2$ anziché della $\sum x_i$ e della $\sum (x_i - \bar{x})^2$. In particolare, il valore di H può essere nullo (1).

1-8,5. *Errore globale.*

Se si attribuiscono ad una misura più cause indipendenti di variabilità statistica, con singole varianze V_i (ossia con s.q.m. $\sigma_i = \sqrt{V_i}$), la distribuzione risultante dei valori misurati avrà una varianza (vedi 1-53):

$$V_t = \Sigma V_i\,; \qquad \text{ossia:} \quad \sigma_t = \sqrt{\Sigma \sigma_i^2}\,.$$

In generale, si può ritenere che ad uno s.q.m. σ_i corrisponda un'incertezza $e_i = k_i \sigma_i$, dove k_i dipende dal livello di confidenza p^c e dal tipo di distribuzione; nel caso di distribuzioni gaussiane, ad esempio, con $p_c = 0{,}95$, si ha $k_i = 2$.

(1) Nei calcoli eseguiti a macchina può infatti essere conveniente assumere $H = 0$, ossia procedere al calcolo della relazione:

$$\Sigma d_i^2 = \Sigma (x_i)^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n} = \Sigma (x_i)^2 - \bar{x}^2 n\,.$$

Si ha allora:

$$e_t = k_t \sigma_t = k_t \sqrt{\Sigma \sigma_i^2} = k_t \sqrt{\Sigma (e_i/k_i)^2}\,.$$

Se tutte le distribuzioni sono simili, o se, come succede nella maggior parte dei casi, i valori di k_i non differiscono sensibilmente fra loro, si può adottare la relazione semplificata:

$$e_t = \sqrt{\Sigma e_i^2}\,.$$

È perciò anche giustificato il ritenere che, in presenza di una o più cause di variabilità largamente predominanti rispetto ad altre, queste ultime non possono essere identificate con affidabilità.

1-9. **Grandezze aleatorie.**

1-9,1. *Variabili aleatorie funzioni del tempo.*

La prima, immediata, estensione del concetto di variabile aleatoria, visto nel precedente paragrafo, riguarda le grandezze aleatorie funzioni continue del tempo. Si consideri cioè l'osservazione $x(t)$ (fig. 1-49) di un fenomeno fisico che si evolve in modo casuale; essa non è definibile mediante relazioni analitiche, anzi risulta unica ed irripetibile, diversa da tutte le altre che si possono eseguire, pure nelle stesse condizioni. In pratica, l'osservazione dura un tempo finito T mentre il fenomeno si estende, in teoria, per tempi indefiniti.

Fig. 1-49

Ad un simile tipo di osservazione si possono applicare, con opportune estensioni, sia i concetti di distribuzione di probabilità, di media, di varianza ecc., propri delle grandezze aleatorie, sia quelli di analisi spettrale, propri delle grandezze variabili nel tempo. Si definiscono inoltre altre caratteristiche di grande interesse pratico, esaminando le proprietà della grandezza $x(t)$ nel dominio dei tempi, mediante la funzione di autocorrelazione.

Una grandezza del tipo sopra indicato, che si incontra frequentemente nelle misure elettriche, è costituita dal rumore di fondo e in genere dai disturbi di diversa origine che sono presenti nella rivelazione di una grandezza deterministica, funzione del tempo. La separazione delle due componenti può avvenire appunto in base alle diverse proprietà dei due tipi di grandezze.

1-9,2. *Funzioni caratteristiche relative alle ampiezze.*

Si consideri l'osservazione $x(t)$ e si fissino in essa due livelli x e $x + \Delta x$ (fig. 1-50); la probabilità che ha la funzione $x(t)$ di assumere valori compresi entro i livelli prefissati può essere espressa dal rapporto $\sum \Delta Tx/T$ fra

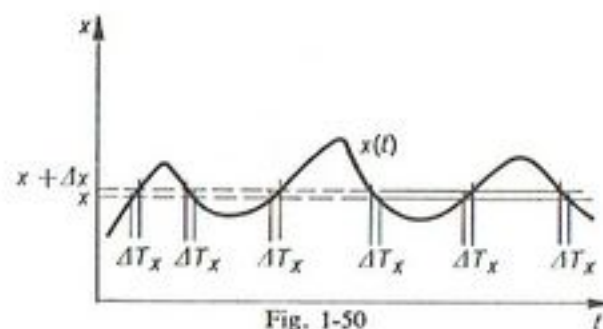



Fig. 1-50

la somma degli intervalli di tempo ΔTx in cui la variabile $x(t)$ rimane compresa nei limiti suddetti e la totale durata T dell'osservazione.

Assumendo quindi:

$$P[x < x(t) < x + \Delta x] = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum \Delta Tx}{T}$$

si può di conseguenza definire una *funzione di densità di probabilità*:

$$p(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{\sum \Delta Tx}{\Delta x}\right)$$

che assume valori reali, non negativi né superiori ad uno.

Analogamente a quanto fatto in 1-7,5, si possono definire, per l'osservazione data, la *media*:

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$$

e la varianza:

$$V = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - \bar{x}]^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)\,dx\,.$$

La radice positiva σ della varianza rappresenta il valore efficace della componente fluttuante dell'osservazione $x(t)$; per questa infatti si può definire un *valore quadratico medio* (o valore efficace):

$$\psi^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$$

e vale la relazione:

$$\psi^2 = \bar{x}^2 + \sigma^2$$

simile a quella che lega i valori efficaci delle grandezze periodiche non sinusoidali.

1-9,3. *Funzione di autocorrelazione.*

Si consideri una osservazione $x(t)$ di una variabile aleatoria x (fig. 1-51); ad ogni valore istantaneo $x(t)$ si associ il valore assunto dopo un intervallo di tempo τ. Si definisce funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t + \tau)\,dt \qquad [1\text{-}58]$$

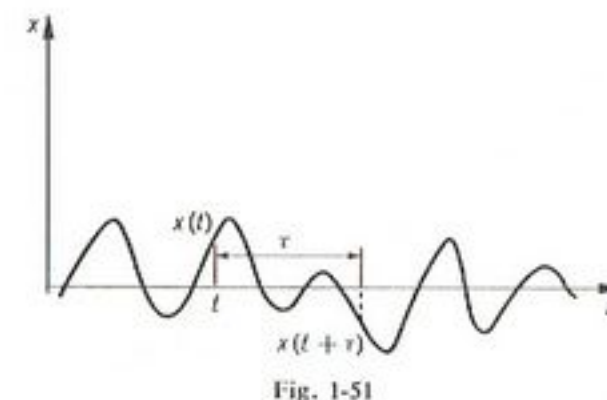



Fig. 1-51

la media, nel tempo di osservazione, del prodotto delle coppie di valori $x(t)$ e $x(t + \tau)$. La funzione $R_x(\tau)$ è una funzione pari di τ [ossia $R(-\tau) = R(\tau)$] con un massimo per $\tau = 0$.

Questa funzione rappresenta il legame che sussiste fra i valori istantanei della grandezza x ed i valori futuri. È anche, salvo qualche caso particolare in cui il limite della [1-58] non esiste:

$$\bar{x} = \sqrt{R_x(\infty)}$$
$$\psi_x^2 = R_x(0)\,.$$

Una grandezza deterministica ha una funzione di autocorrelazione che si mantiene diversa da zero al variare di τ, mentre per le grandezze aleatorie a media nulla tende rapidamente a zero in quanto $x(t)$ e $x(t + \tau)$ tendono ad essere fra loro indipendenti. Questa proprietà permette di selezionare le grandezze deterministiche che possono essere mascherate da rumori aleatori di fondo.

Come esempio si consideri la funzione di autocorrelazione della grandezza:

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

che vale:

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T}\int_0^T \text{sen}(\omega t + \varphi)\,\text{sen}[\omega(t+\tau) + \varphi]\,d\tau = \frac{A^2}{2}\cos\omega\tau\,.$$

Se alla funzione sinusoidale è sovrapposto un segnale aleatorio $n(t)$ a valor medio nullo, si ottiene lo stesso risultato, non appena τ sia sufficientemente grande da rendere nulla la funzione di autocorrelazione della componente aleatoria (fig. 1-52).

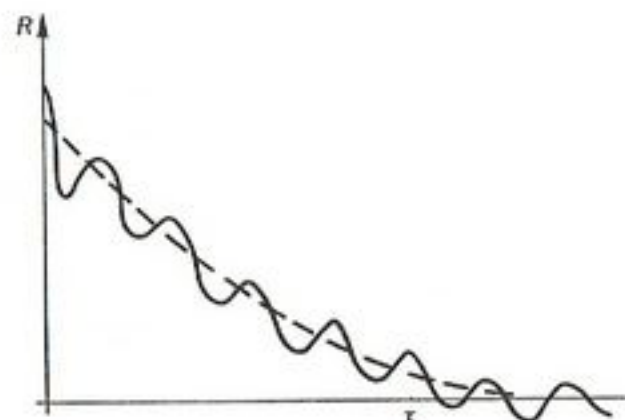



Fig. 1-52

Il valore di una funzione di autocorrelazione può essere misurato con uno strumento che attui lo schema di principio illustrato in fig. 1-53, o calcolato mediante metodi numerici.

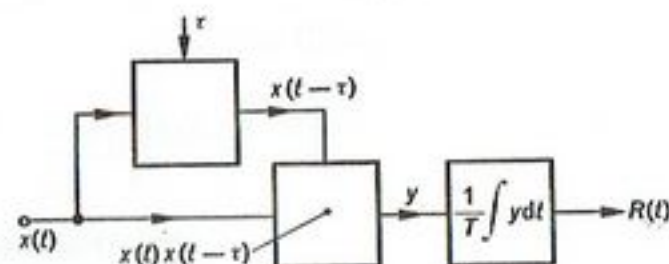



Fig. 1-53

In modo analogo si possono definire le funzioni di mutua correlazione fra due osservazioni $x(t)$ e $y(t)$.

1-9,4. *Funzione di densità spettrale di potenza.*

Un'osservazione $x(t)$ di una variabile aleatoria può essere filtrata selezionando il campo di frequenze fra f e $f + \Delta f$; del segnale filtrato si consideri il valore medio quadratico:

$$\psi_x^2(f, f+\Delta f) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T x^2(t, f, \Delta f)\,dt\,.$$

Si definisce funzione di densità spettrale di potenza la grandezza, reale, non negativa:

$$G_x(f) = \lim_{\Delta f\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T\Delta f}\int_0^T x^2(t, f, \Delta f)\,dt\,. \qquad [1\text{-}59]$$

Questa funzione esprime la composizione in frequenza della osservazione; essa è legata alle altre grandezze, prima definite, dalle relazioni:

$$G_x(f) = 4\int_0^\infty R_x(\tau)\cos 2\pi f\tau\,d\tau$$

$$\bar{x}^2 = \int_{0-}^{0+} G(f)\,df$$

cioè la media appare in $G(f)$ come una funzione impulsiva a frequenza zero; è inoltre:

$$\psi^2 = \int_0^\infty G(f)\,df$$

cioè il valore quadratico medio è l'area compresa dalla curva $G(f)$.

Particolare interesse hanno le distribuzioni di media nulla e con densità spettrale G uniforme nel campo di frequenza da 0 a B, per cui è:

$$\sigma^2 = \psi^2 = GB \qquad [1\text{-}60]$$

dove σ è il valore efficace della componente fluttuante dell'osservazione $x(t)$ più sopra definito.

1-9,5. *Applicazioni al rumore.*

Si ammetta di avere la misura di una grandezza, funzione nota del tempo $X(t)$, a cui è sovrapposto un rumore di tipo aleatorio. Questo rumore sia caratterizzato da una banda finita di frequenza B, che può essere ulterior-

mente limitata dalla presenza di opportuni filtri. Nell'interno di questa banda, il segnale può essere supposto con spettro uniforme (rumore bianco) o con altre specificate caratteristiche di distribuzione di densità spettrale (per esempio, di tipo gaussiano).

Le due componenti, deterministica e aleatoria, possono essere separate per integrazione, per filtraggio o con metodi di correlazione.

Per esempio, ammettendo che sia:

$$x(t) = X + r(t)$$

con X grandezza costante e $r(t)$ rumore a valore medio nullo, si può ricavare il valore vero X dall'integrazione:

$$X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt\,.$$

In pratica questa operazione può essere fatta solo in tempi finiti cosicché per il valore X si avrà la stima:

$$\hat{X} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt\,.$$

L'errore che si commette è a sua volta una variabile aleatoria, per la quale si può stabilire, analogamente a quanto fatto in 1-8,2, uno scarto quadratico medio s. Sotto alcune ipotesi limitative (in particolare $BT \gg 1$), si dimostra essere:

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{2BT}}$$

dove σ è il valore efficace delle componenti fluttuanti del disturbo. Se il rumore è di tipo bianco, il termine σ^2/B equivale, per la [1-60] al valore della densità spettrale di potenza G, per cui è:

$$s = \sqrt{\frac{G}{2T}}\,.$$

Si vede pertanto come, in questo caso, la maggiore influenza sulla s, e quindi sull'incertezza portata dal rumore, sia dovuta al tempo finito T d'integrazione, mentre la banda B gioca un ruolo minore (purché sia sempre $BT \gg 1$) risultando più importanti le frequenze più basse dello spettro.

1-9,6. *Valore quadratico medio del rumore.*

L'ampiezza di un disturbo aleatorio è definita dal suo valore quadratico medio σ^2, la cui stima è anch'essa soggetta ad un errore statistico simile a quello sul valore medio.

Nel caso di rumore bianco, con banda limitata e valore medio zero, si può dimostrare che la stima di σ_x^2 è soggetta a una varianza:

$$V(\sigma_x^2) = \frac{\sigma_x^4}{BT}\,.$$

La fascia d'incertezza che ne deriva è quindi del tipo:

$$\sigma_x^2 = \bar{\sigma}_x^2 \pm K\frac{\sigma_x^2}{\sqrt{BT}} \simeq \bar{\sigma}_x^2\left(1 \pm \frac{K}{\sqrt{BT}}\right);$$

ne deriva che, per avere incertezze limitate a qualche percento, il valore di BT deve essere dell'ordine di 10^4 ed oltre.

1-9,7. *Identificazione di un sistema.*

Si consideri un sistema lineare (fig. 1-54), caratterizzato dalla sua funzione di trasferimento $H(p)$ o, il che è equivalente, dalla sua risposta $h(t)$ alla funzione impulsiva unitaria.

Si applichi, come ingresso del sistema, una funzione aleatoria $x(t)$, ottenendo come uscita ancora una funzione aleatoria $y(t)$. Si valuti ora la mutua correlazione fra x e y:

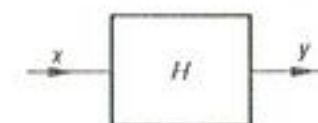



Fig. 1-54

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t-\tau)y(t)\,dt$$

che, essendo:

$$y(t) = \int_0^t h(z)x(t-z)\,dz$$

si dimostra essere riducibile alla forma:

$$R_{xy}(\tau) = \tfrac{1}{2}h(\tau)G_x(0) \qquad [1\text{-}60]$$

quando l'ingresso $x(t)$ sia un rumore bianco con densità spettrale di potenza $G(0)$ per frequenza tendente a zero. Questa relazione risulta verificata anche se nel segnale d'uscita è presente un disturbo, che non sia correlato con il segnale d'ingresso.

La [1-60] permette quindi di ricavare la risposta del sistema $h(\tau)$ dalla misura della funzione di correlazione mutua fra ingresso e uscita e dalla densità spettrale di frequenza del segnale applicato. Spesso il rumore è presente già naturalmente nel segnale d'ingresso e può essere considerato equivalente ad un rumore bianco, ai fini della validità della [1-60] se ha uno spettro abbastanza uniforme, esteso ad una banda notevolmente più ampia di quella del sistema sotto esame.

Si può anche dimostrare che il modulo $H(f)$ della funzione di trasferimento, scritta nella variabile f, soddisfa alla relazione:

$$H^2(f) = \frac{G_y(f)}{G_x(f)}$$

dove $G_x(f)$ e $G_y(f)$ sono, rispettivamente, le densità spettrali di potenza dei segnali in ingresso ed in uscita.

1-9,8. *Processi aleatori.*

Le caratteristiche indicate nei precedenti paragrafi, sono riferite al caso particolare di un'unica osservazione $x(t)$ di una variabile aleatoria funzione del tempo. Esse sono estendibili all'insieme di N osservazioni $x_i(t)$, che si definisce un *processo aleatorio*.

Per lo studio di questi processi è necessario poter fare alcune ipotesi, che sono spesso verificate nei fenomeni fisici, in particolare quella della *stazionarietà* ed *ergodicità* del processo.

La prima condizione impone che le diverse osservazioni del processo abbiano mediamente caratteristiche invarianti al variare del tempo; in particolare, considerando i vari valori $x_i(t_1)$ ad un istante comune t_1, il valore mediano:

$$M[x_i(t_1)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)$$

deve risultare costante, al variare dell'istante t_1.

La seconda condizione impone invece che le diverse osservazioni abbiano mediamente caratteristiche uguali, ossia che le loro medie $M(x_i)$, siano costanti al variare dell'indice i dell'osservazione.

Si noti che un processo ergodico è sempre stazionario e si ha:

$$M[x_i(t_1)] = M(x_i)$$

indipendentemente dai valori scelti per t_1 e per i; il contrario non è sempre vero.

1-9,9. *Grandezze aleatorie campionate.*

I concetti, espressi nei precedenti paragrafi per le grandezze funzioni continue del tempo, possono essere estesi anche alle grandezze aleatorie campionate, ossia alle sequenze ordinate di valori di una variabile aleatoria. Per esse, il calcolo delle medie, delle varianze, delle sequenze di autocorrelazione ecc. si esegue mediante opportune sommatorie, anziché per integrazione (vedi 8-7).

Capitolo II

UNITÀ E CAMPIONI DELLE MISURE ELETTRICHE

2-1. Sistemi ed unità di misura.

2-1,1. *Sistemi di unità di misura.*

L'insieme delle unità, necessarie per misurare i diversi tipi di grandezze fisiche, costituisce un *sistema di unità di misura*. Poiché queste grandezze sono fra loro legate dalle relazioni, che esprimono le leggi fisiche, potremo distinguere fra esse un certo numero di unità indipendenti, o *fondamentali*, ed altre unità *derivate*, ottenute mediante le relazioni stesse.

Un sistema di unità dicesi coerente quando, per il passaggio dalle unità fondamentali a quelle derivate non occorre introdurre delle costanti numeriche; ciò si verifica, per esempio, scegliendo per unità di volume il m^3, se l'unità di lunghezza è il metro; non si verifica, se si scelgono, rispettivamente il litro e il metro o il gallone ed il pollice.

Per superare gli inconvenienti propri dei vari sistemi di unità, adottati originariamente dalla fisica (CGS e.s.; CGS e.m.; sistema di Gauss ecc.) si è pervenuti all'adozione del *Sistema Internazionale di unità* (SI), derivato dall'estensione del sistema razionalizzato di Giorgi che è stato esplicitamente introdotto nella legislazione della Comunità Economica Europea e di molti altri Stati, fra cui l'Italia [1].

Tale sistema considera sette unità fondamentali: metro - kilogrammo - secondo - ampere - kelvin - candela e mole; da esse si ricavano tutte le unità derivate necessarie, per le grandezze fisiche in uso.

---

(1) D.P.R. 12.8.1982, n° 802.

Accanto al problema di fissare quali siano le unità fondamentali, sta quello di fornirne la definizione e la rappresentazione materiale tali da risultare stabili, riproducibili e confrontabili, problema di non poco conto se si pensa ai requisiti della scienza e della tecnica moderne. I campioni rappresentativi delle unità fondamentali possono essere *naturali* — cioè riferiti ad un fenomeno fisico, dotato in elevata misura delle doti sopra ricordate — ovvero *artificiali*, cioè basati su prototipi che materializzano la relativa grandezza (come per esempio il metro di Sèvres).

Lo studio dei fenomeni molecolari ed atomici porta oggi a realizzare campioni naturali di qualità sempre migliore; corrispondentemente, sia pure con le necessarie cautele, si modificano le definizioni delle varie unità, non per modificarne il valore, ma per ridurre i margini d'incertezza entro cui tale valore può essere considerato noto, durante l'impiego del campione stesso.

La tendenza attuale è verso l'impiego di « costanti universali » che riducano le unità e i campioni indipendenti.

2-1,2. *L'unità di lunghezza.*

L'unità di lunghezza, *il metro*, fu inizialmente definita, alla fine del XVIII secolo, come la decimilionesima parte di un quadrante di meridiano terrestre: per la difficoltà di riferirsi alle misure geodetiche, si passò presto a regoli metallici, che assicurassero buona stabilità e confrontabilità.

Nel 1889 si stabilì, come prototipo internazione del metro, la distanza fra i due riferimenti incisi su un'asta di platino iridio, dalla caratteristica sezione a X, conservata nel Laboratorio del Bureau International de Poids et Mesures a Sèvres.

I progressi nelle misure interferometriche e gli studi sull'emissione luminosa dei gas monoatomici hanno in seguito mostrato la possibilità di definire l'unità di lunghezza con un'incertezza dell'ordine di $\pm 10^{-9}$, cento volte minore di quella ottenibile — soprattutto per le difficoltà di tracciatura dei riferimenti — con il metro ad asta. Si è così giunti alla definizione (1960): « Il metro è 1.650.763,73 volte la lunghezza d'onda emessa nel vuoto dagli atomi del nuclide 86 Kr, nella transizione dal livello $2p_{10}$ al $5d_5$ ».

Un ulteriore progresso, che comporta incertezze dell'ordine di 10^{-12}, è stato raggiunto con la nuova definizione (1983), attualmente in vigore, secondo la quale « il metro è la lunghezza del tragitto percorso dalla luce nel vuoto, in un intervallo di tempo di 1/299.792.458 di secondo ». Si noti che, con questa definizione, l'unità di lunghezza viene praticamente

derivata dall'unità di tempo, per mezzo del valore assunto per la velocità della luce nel vuoto (299.729.458 m/s).

2-1,3. *L'unità di tempo.*

L'unità di tempo, il *secondo*, si è a lungo basata su misure astronomiche, prendendo come riferimento la durata del giorno solare medio (intervallo di tempo fra due successivi passaggi, sullo stesso meridiano, di un astro fittizio — detto sole medio — che si muove, con moto uniforme, sull'equatore celeste, con la stessa velocità media del sole). Successivamente, è stato scelto come riferimento l'intervallo di tempo fra i due successivi passaggi del centro del sole all'equinozio di primavera (anno tropico), comprendente il 1° gennaio 1900. La differenza è dovuta alla disuniformità del moto terrestre ché comporta, sul valore dell'unità di tempo, incertezze dell'ordine di 10^{-9}.

Più recentemente, il secondo è stato ridefinito mediante il ricorso a fenomeni di radiazione molecolare, che consentono di ridurre le incertezze a limiti dell'ordine di 10^{-12} (su intervalli di tempo superiori ai 100 s). Esso è « l'intervallo di tempo uguale a 9.192.631.770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato fondamentale del Cesio 133 ».

2-1,4. *L'unità di massa.*

L'unità di massa, inizialmente definita attraverso il peso di un decimetro cubo di acqua distillata, alla temperatura di 4 °C, al livello del mare a 45° di latitudine, è attualmente rappresentata dalla massa di un campione di platino, di forma cilindrica, con altezza uguale al diametro, depositato presso il Laboratorio di Sèvres.

L'incertezza nella valutazione della massa di questo prototipo può stimarsi dell'ordine di $\pm 10^{-9}$.

Si è a lungo discusso sul nome da adottare per tale unità, che è oggi quello di kilogrammo, con l'inconveniente di presentare il prefisso kilo, poco adatto per un'unità, e fonte di possibili errori. È stata anche proposta la denominazione di « bes ».

Fra le unità derivate, ricordiamo in particolare l'unità di forza *newton* (N) come quella forza che, applicata al baricentro di un corpo avente la massa di un kilogrammo, gli imprime l'accelerazione di 1 metro al secondo quadrato. Il kilogrammo peso (kp), unità non razionale della forza, è pari a 9,806 N.

Altre unità, derivate dalle unità fondamentali di lunghezza, tempo e massa, sono:

per il lavoro: il joule (J) = (N)(m)
per la potenza: il watt (W) = (J)/(s)
per la pressione: il pascal (Pa) = 1 N/m², di cui è ancora usato il multiplo non razionale bar = 10^5 Pa, pari a circa un'atmosfera.

2-1,5. *Altre unità non elettriche.*

Le unità fondamentali che interessano meno direttamente le applicazioni elettriche sono quelle di temperatura (kelvin), d'intensità luminosa (candela) e di quantità di materia (mole).

L'unità di temperatura fa riferimento alla scala termodinamica, basata sugli scambi di calore di un ciclo di Carnot, prendendo convenzionalmente il valore di 273,16 K per il punto triplo dell'acqua. La determinazione delle temperature termodinamiche avviene mediante misure delicate e laboriose; si è perciò preferito indicare una serie di punti di riferimento, nelle temperature di equilibrio fra liquidi e vapori o fra solidi e liquidi. Il più recente sistema di punti di riferimento (EIT 90) consente di eseguire misure da 0,65 a 1235 K, con una suddivisione in più campi che si sovrappongono parzialmente. L'incertezza è stimata dell'ordine del mK, fino a 373 K e proporzionalmente maggiore per i valori più elevati.

Il kelvin viene usato sia per indicare le temperature assolute, sia per le differenze di temperatura; è usato anche il grado Celsius (°C) per i valori di temperatura non assoluta, con ampiezza pari al kelvin e valore zero a 273, 15 K.

La candela è l'unità di intensità luminosa, inizialmente definita sulla base di fiamme o sorgenti luminose di tipo particolare. A partire dal 1979 è stata definita come l'intensità emessa da una sorgente monocromatica a 540 10^{12} Hertz, che abbia un'intensità di 1/683 W/*sr*. Questa grandezza, che può stimarsi riproducibile entro il percento, viene normalmente rappresentata da lampade campioni, alimentate da un valore prefissato di corrente continua. Per le radiazioni non monocromatiche valgono degli opportuni pesi, in funzione della lunghezza d'onda.

La mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante unità elementari (atomi, molecole, ioni ecc. purché esse siano specificate) quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12. Le quantità di sostanza si determinano in modo relativamente semplice attraverso le leggi chimico-fisiche; si preferisce evitare una determinazione per pesata, che richiederebbe una conoscenza più precisa del numero di Avogadro.

Come unità supplementari, prive di dimensioni, fanno parte del sistema SI l'unità di angolo piano (radiante, simbolo *rad*) e di angolo solido (steradiante, simbolo *sr*).

Fra le grandezze derivate, che hanno assunto particolare interesse scientifico e tecnico, si ricordano le grandezze relative alle radiazioni ionizzanti (attività, dose assorbita, equivalente di dose ecc.) le cui definizioni sono state aggiornate nel 1984.

2-1,6. *L'unità elettrica.*

Come unità fondamentali per le grandezze elettriche, il Congresso Internazionale di Elettricità del 1893 scelse delle grandezze di dimensioni pratiche, multipli delle unità del sistema CGS: l'ohm, rappresentato da una colonna di mercurio di dimensioni assegnate, e l'ampere, definito dal deposito d'argento in un voltametro (unità internazionali).

A seguito dell'adozione del Sistema Giorgi, si è in seguito (1948) provveduto a scegliere come unità fondamentale il solo ampere definito come quella corrente che percorrendo due fili paralleli rettilinei, di lunghezza infinita, di sezione circolare infinitesima, posti a distanza di un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produce la forza di $2\ 10^{-7}$ newton per metro di lunghezza.

Questa relazione, basandosi sulla relazione:

$$F = \mu_0 \frac{I^2\, l}{2\pi a}$$

equivale ad assegnare alla permeabilità magnetica del vuoto, μ_0 il valore $4\pi\ 10^{-7}$.

Osservazione. In corrispondenza a questa nuova definizione (unità assoluta), i valori delle resistenze e delle f.e.m. determinati nelle unità internazionali hanno dovuto essere moltiplicati per 1,00495 per le resistenze e 1,000345 per le f.e.m.

Dato che un campione di corrente non può essere conservato, la rappresentazione delle grandezze elettriche è stata affidata (1990) a dispositivi basati sull'effetto Josephson, per le f.e.m., e sull'effetto Hall quantico per le resistenze. I valori consigliati per le rispettive costanti sono, rispettivamente:

$$K_{J\,90} = 483\ 597{,}9\ \text{GHz/V}$$

$$R_{K\,90} = 25\ 812{,}807\ \Omega.$$

Questi dispositivi sono piuttosto complessi, ma costituiscono il riferimento per la taratura di sorgenti campioni, a pila o a semiconduttore, e di resistori metallici. Essi consentono incertezze, nei confronti, inferiori a 10^{-8}, mentre l'incertezza con cui si possono fare confronti fra l'unità elettrica e quelle meccaniche non è inferiore a 10^{-6}.

2-1,7. *Unità elettriche derivate.*

Mediante le unità fondamentali si possono definire le unità derivate; in particolare alcune fra le principali unità derivate proprie del sistema SI sono riportate nella Tabella 2-1.

Tabella 2-1

Grandezze	Denominazioni	Simboli	Dimensioni
resistenza	ohm	Ω	
tensione	volt	V	
flusso	weber	Wb	V·s
induzione	tesla	T	V·s m^{-2}
induttanza	henry	H	Ω·s
quantità di carica	coulomb	C	A·s
capacità	farad	F	s·Ω^{-1}
conduttanza	siemens	S	Ω^{-1}

Ricordiamo, per la scelta dei multipli e sottomultipli di un'unità, la preferenza da accordare ai valori scalati di 10^3, secondo la Tabella 2-2.

Tabella 2-2

Simbolo	Valore	Denominazione	Simbolo	Valore	Denominazione
Y	10^{24}	yotta	m	10^{-3}	milli
Z	10^{21}	zetta	μ	10^{-6}	micro
E	10^{18}	exa	n	10^{-9}	nano
P	10^{15}	peta	p	10^{-12}	pico
T	10^{12}	tera	f	10^{-15}	femto
G	10^{9}	giga	a	10^{-18}	atto
M	10^{6}	mega	z	10^{-21}	zepto
k	10^{3}	kilo	y	10^{-24}	yocto

2-1,A1. *Cambiamento di unità di misura.*

Accade sovente, più per ragioni di comodità che di principio, di utilizzare unità diverse da quelle del sistema SI. Per eseguire questo cambiamento occorre ricordare che una grandezza fisica è sempre espressa dal prodotto del suo valore numerico a per la relativa unità di misura A (per es. una lunghezza di 5,3 m, una tensione di 1,5 V, ecc.).

Si ha perciò:

$$x = a \cdot (A);$$

qualora la stessa grandezza x sia espressa nell'unità A' essa assume ovviamente un altro valore numerico a', tale però che risulti:

$$x = a'(A').$$

Ne segue che, se fra le due unità esiste la relazione:

$$A = kA',$$

fra i rispettivi valori numerici che esprimono la stessa grandezza si ha la relazione:

$$a = \frac{a'}{k}.$$

La stessa regola, con ovvie estensioni, serve nel caso di grandezze qualsiasi, scrivendo per la loro unità di misura le relazioni dimensionali con le rispettive grandezze fondamentali.

2-1,A2. *Regole di scrittura.*

I simboli delle unità di misura del Sistema Internazionale (SI) devono essere scritti in caratteri romani, generalmente minuscoli (esempi: m, s, kg), a meno che non derivino da un nome proprio (come W, J, A) e non sono mai seguiti dal punto.

I simboli delle unità restano invariati al plurale.

I prodotti di più unità possono essere scritti nei modi seguenti:

$$\text{N} \cdot \text{m} \quad \text{o} \quad \text{Nm}.$$

Nei rapporti, si utilizza una barra obliqua (m/s) o il simbolo di frazione ($\div$) o esponenti negativi (ms^{-1}).

I simboli dei prefissi sono scritti nel medesimo carattere, senza spazio rispetto al simbolo dell'unità.

2-2. **Conservazione e disseminazione delle unità elettriche.**

2-2,1. *Laboratori metrologici.*

La definizione delle unità del sistema SI è compito della Conferenza Generale dei Pesi e Misure (CGPM), a cui partecipano gli stati firmatari della Convenzione del Metro (1875); il suo organo tecnico è il BIPM (Bureau International de Poids et Mesures), laboratorio che ha sede a Sèvres, presso Parigi, ma è finanziato da tutti gli stati partecipanti alla CGPM. Compito del BIPM è quello di conservare i campioni materiali delle unità del sistema SI e di curare il loro confronto con i campioni realizzati presso i vari laboratori metrologici nazionali.

Una recente legge (11/8/1991 n. 273) stabilisce che le funzioni di istituti metrologici sono svolte in Italia dall'Istituto Metrologico «G. Colonnetti» di Torino, nel campo della meccanica e termologia; dall'Istituto Elettrotecnico Nazionale «G. Ferraris», pure di Torino, per le misure di tempo e frequenza, per le grandezze elettriche, ottiche ed acustiche; dall'ENEA per le misure nel campo delle radiazioni ionizzanti.

Questi Istituti hanno il compito di conservare i campioni nazionali delle varie grandezze e di procedere periodicamente al loro confronto con quelli di altre nazioni e del BIPM. Ad essi è tuttavia affidato un compito particolarmente importante in sede nazionale, consistente nella disseminazione delle unità di misura, cioè nel definire e attuare tutte le procedure che consentono e garantiscono, a ogni livello di applicazione, un collegamento adeguato a tali campioni, attraverso una catena ininterrotta (riferibilità o, in inglese, traceability).

Questa esigenza risulta particolarmente importante nel mondo industriale dove si vuole non solo dar luogo a un prodotto di caratteristiche uniformi (per il quale sarebbe sufficiente usare strumentazione e riferimenti convenzionali, con il solo requisito della stabilità) ma si vogliono garantire in assoluto tali caratteristiche, in un ambito non solo nazionale ma internazionale.

Se quindi presso un'unità produttiva di una ditta vengono usati degli strumenti di misura (detti di lavoro), essi dovranno continuamente essere controllati da un reparto centrale della ditta stessa, per confronto con apparecchiature di miglior precisione.

La strumentazione di controllo deve essere a sua volta verificata periodicamente, presso un istituto metrologico o in appositi centri di taratura, autorizzati dagli Istituti Metrologici. Questa attività, che in Italia ha assunto la sigla SIT (Servizio Italiano Taratura) garantisce, attraverso apposite convenzioni e riconoscimenti reciproci, la riferibilità delle misure eseguite presso i centri anche a livello internazionale.

La validità di un centro di taratura non si basa esclusivamente sulla qualità delle apparecchiature che esso possiede; sono altresì elementi indispensabili la preparazione del personale e la responsabilità del dirigente (che, se il centro ha sede, come spesso avviene, presso una ditta, non deve essere subordinato ai responsabili della produzione); in questo modo si assicura la corretta esecuzione delle procedure previste per le diverse operazioni, sia di taratura che di manutenzione degli strumenti.

2-2,2. *Normalizzazione internazionale e nazionale.*

Quanto illustrato nei precedenti paragrafi mette in evidenza un certo numero di convenzioni esistenti nel campo delle misure, sia come definizioni che come scelta delle unità di misura.

Queste convenzioni sono necessarie per assicurare un'uniformità di linguaggio ed una confrontabilità dei risultati, altrimenti impossibili. Esse si estendono non solo ai campioni ma anche e soprattutto alle varie modalità di controllo delle caratteristiche di precisione delle apparecchiature di misura (come il campo delle temperature ammissibili, i limiti degli errori strumentali, ecc.). Ciò ha anche il vantaggio di non costringere ogni costruttore ad indicare su ogni strumento tutte le caratteristiche d'impiego; ha, per l'utilizzatore, il pregio di rendere confrontabili apparecchi di costruttori diversi, all'atto dell'acquisto e dell'impiego.

A questa normalizzazione provvedono appositi organismi nazionali ed internazionali; in campo elettrico essi sono principalmente rappresentati dalla Commissione Elettrotecnica Internazionale (IEC), e, in sede nazionale, dal Comitato Elettrotecnico Italiano (CEI).

Questi enti ripartiscono il loro lavoro in più comitati tecnici, diversi per i singoli argomenti, in cui concorrono l'esperienza e gli interessi dei costruttori, degli utilizzatori, degli studiosi e tecnici di laboratorio, di organismi nazionali ed internazionali, ecc.

Le pubblicazioni della IEC costituiscono delle norme generali, in materia di definizioni, modalità di prova, criteri di collaudo ecc., che formano la base delle norme nazionali.

Non deve poi stupire se alcune definizioni fondamentali, come quelle sulle unità di misura, e alcune regolamentazioni del CEI sono trasferite in leggi dello Stato. Esse servono infatti a regolare scambi economici fra cittadini e fra enti, servono di base ad imposizioni fiscali ecc., per cui devono essere inserite nella legislazione ufficiale.

In altri casi, la rispondenza alle norme nazionali, generalmente indicata con un apposito contrassegno, è da considerarsi come corrispettivo di una garanzia di quella « buona tecnica » necessaria ad ogni realizzazione ma in genere assai difficile a definire praticamente.

2-3. **Definizione di un'impedenza.**

2-3,1. *Definizione di impedenza.*

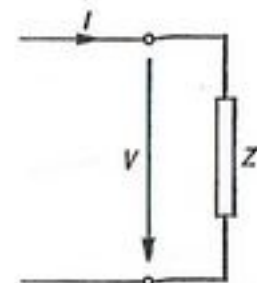
L'impedenza di un elemento di circuito, in condizioni di regime sinusoidale, è definita dal rapporto:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} \qquad [2\text{-}2]$$

fra la tensione presente tra una coppia di morsetti e la corrente che circola fra tali morsetti (fig. 2-1). Le parti, reale ed immaginaria, dell'operatore $\dot{Z}$ sono le componenti, ohmica e reattiva, dell'impedenza equivalente, alla frequenza di misura.

Fig. 2-1

Questa procedura è tuttavia insufficiente, quando si vuole che l'impedenza Z sia ben individuata, in valore e fase, indipendentemente dagli elementi estranei che possono presentarsi, sia in serie, sia in parallelo.

Esamineremo il problema considerando dapprima il caso della definizione di una resistenza in c.c., poi quello di generiche impedenze in c.a., dove gli effetti degli elementi estranei sono tanto più importanti quanto più elevata è la frequenza.

2-3,2. *Principio dei quattro morsetti.*

Un resistore, al pari di ogni altro elemento, deve essere collegato al resto del circuito, in cui è inserito, mediante collegamenti mobili; il contatto avviene generalmente mediante morsetti a pressione che, per quanto bene possano essere realizzati, introducono sempre delle *resistenze di contatto* dell'ordine di $10^{-3} \div 10^{-4}$ Ω.

Per la definizione corretta del valore di un resistore, occorre perciò evitare di comprendere in esso anche le resistenze di contatto: ciò si ottiene dotando il resistore di *quattro morsetti*: due morsetti amperometrici esterni, generalmente contraddistinti da maggiori dimensioni, che servono per la connessione al circuito esterno; due morsetti voltmetrici, disposti internamente ai precedenti, fra i quali è definito il valore della resistenza (fig. 2-2).

I morsetti amperometrici sono talvolta disposti in modo da poter effettuare le connessioni mediante pozzetti di mercurio, che hanno bassa resistenza di contatto, indipendente dal serraggio; in genere, la resistenza di contatto è tanto minore quanto maggiore è la pressione esercitata sul contatto. I morsetti voltmetrici possono anche essere fissati sui blocchi di conduttore cui fanno capo i morsetti amperometrici, purché ne siano sufficientemente distanti da permettere una distribuzione della corrente nel

blocco indipendente dalle condizioni del contatto amperometrico. Anche i morsetti voltmetrici hanno loro resistenze proprie, ma esse non influenzano la definizione e l'uso della resistenza campione, se non sono percorse da corrente, o sono percorse da corrente molto piccola.

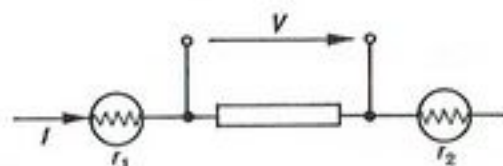
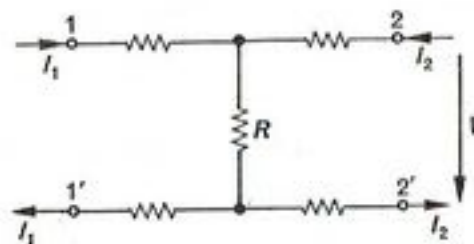



Fig. 2-2 Fig. 2-3

Il resistore può allora essere meglio rappresentato da un doppio bipolo, del tipo di fig. 2-3, dove si ha:

$$R = \left[\frac{V_{22'}}{I_1}\right]_{I_2=0}$$

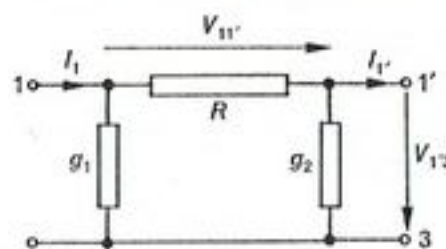
ossia dove la resistenza R è definita dal rapporto fra la tensione ai morsetti 22' a vuoto e la corrente che circola nei morsetti 11'.

2-3,3. *Conduttanze di dispersione.*

Una situazione duale di quella precedente si ha quando un resistore può essere influenzato dalle conduttanze di dispersione esistenti verso gli oggetti circostanti. Queste conduttanze, che supporremo concentrate nei nodi del circuito (fig. 2-4), esistono sempre e sono, in particolare, ben definite se il resistore è posto internamente ad un involucro metallico. In questo caso, il valore della corrente entrante nel morsetto 1 non coincide con quello della corrente al morsetto 1', ma entrambe dipendono dal potenziale che questi morsetti assumono, rispetto all'involucro.

Fig. 2-4

Per definire un valore di resistenza, occorre pertanto fissare questo potenziale; la soluzione migliore è porre $V_3 = V_{1'}$, in modo da annullare la corrente nella conduttanza g_2 fra 1' e 3. Si ha allora:

$$R = \left[\frac{V_{11'}}{I_{1'}}\right]_{V_{1'3}=0} . \qquad [2\text{-}3]$$

È quindi utile disporre di un apposito schermo, per poterne regolare a piacere il potenziale con metodi opportuni. Si vede chiaramente, dagli esempi sopra riportati, che è più facile individuare il valore di resistenze mutue, riferite a coppie di morsetti diversi, che non quello di un elemento con una sola coppia di morsetti.

Unendo le due rappresentazioni, si giunge ad uno schema a cinque morsetti: due amperometrici, due voltmetrici ed uno di schermo (fig. 2-5)

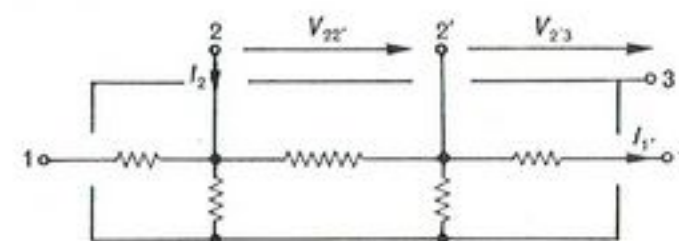



Fig. 2-5

nel quale si pone:

$$R = \left[\frac{V_{22'}}{I_{1'}}\right]_{I_2=0,\ V_{1'3}=0} . \qquad [2\text{-}4]$$

Dati i valori delle resistenze di contatto r e delle conduttanze di dispersione g è in generale sufficiente, per ogni resistore, uno dei due schemi equivalenti semplificati di fig. 2-2 o fig. 2-4.

2-3,4. *Impedenze in c.a.*

Per un'impedenza in c.a. si possono usare, con le opportune modifiche, gli stessi schemi usati in c.c., quando si tenga conto anche dell'induttanza delle connessioni e delle capacità fra le varie parti, capacità che pure supporremo concentrate nei nodi del circuito.

Nel caso di c.a., specie se di frequenza elevata, l'influenza degli elementi parassiti può essere notevole, non tanto sul modulo dell'impedenza, quanto sulla sua fase.

In prima approssimazione, l'impedenza Z potrà rappresentarsi nella forma:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_0(1 + \delta)$$

ossia come un'impedenza ideale $\dot{Z}_0$ collegata ad una rete con funzione di trasferimento:

$$\dot{g}(\omega) = 1 + \delta \qquad [2\text{-}5]$$

con δ funzione complessa della pulsazione ω ($\delta \ll 1$). Se gli elementi parassiti influiscono soprattutto sulla fase, la [2-5] assume la forma:

$$\dot{g}(\omega) = 1 + j\delta$$

e la grandezza:
$$T_0 = \frac{\delta}{\omega}$$

può assumere il significato di costante di tempo generalizzata del sistema, nell'ambito della validità della [2-5].

2-3,5. *Effetti induttivi.*

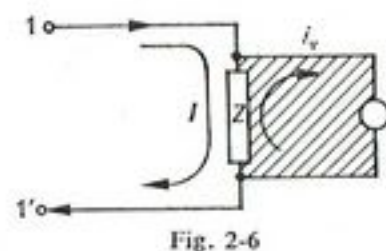



Fig. 2-6

Si consideri ora un elemento Z, privo di ammettenze parassite verso gli altri oggetti e con morsetti voltmetrici chiusi su un voltmetro ideale (senza assorbimento di corrente) (fig. 2-6). Quando Z è percorso dalla corrente I, il circuito chiuso formato dall'elemento Z e dalle connessioni voltmetriche può essere sede di un flusso che, se variabile nel tempo, induce in esso una f.e.m.

Supponendo, per semplicità che sia $\dot{Z} = R + j\omega L$, si vede che il flusso concatenato con il circuito chiuso comprendente il voltmetro è del tipo:

$$\phi = (L + M)I$$

ossia comprende il flusso di autoinduzione proprio dell'elemento Z più un flusso di mutua induzione, che dipende soprattutto dalla disposizione delle connessioni voltmetriche. Questa mutua induttanza ha generalmente segno negativo, dato che, per produrre lo stesso flusso, le correnti I e i_v devono essere di segno opposto, avendo assunto la corrente i_v positiva in modo che il voltmetro misuri come positiva la tensione RI.

2-3,6. *Circuiti a parametri distribuiti.*

Le considerazioni dei paragrafi precedenti sono basate sull'ipotesi di avere ammettenze concentrate ai nodi del sistema, il che costituisce una prima approssimazione; in particolare, in presenza di elementi di dimensioni non trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda dei fenomeni periodici in gioco, tale approssimazione non può essere mantenuta.

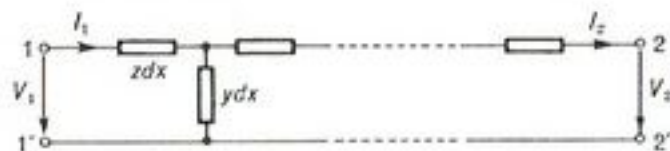



Fig. 2-7

Si consideri allora un insieme di tratti infinitesimi dx (fig. 2-7) dotati dell'impedenza serie $z\,dx$ e dell'ammettenza derivata $y\,dx$. Supponendo z e y costanti sulla lunghezza l, si perviene ad un doppio bipolo caratterizzato dalle relazioni:

$$V_2 = V_1 \cos \mathrm{h}al - Z_s I_1 \frac{\mathrm{sen}\,\mathrm{h}al}{al}$$

$$-I_2 = \frac{V_1 al}{Z_s} \mathrm{sen}\,\mathrm{h}al - I_1 \cos \mathrm{h}al$$

avendo posto:

$$al = \sqrt{zy}l = \sqrt{Z_s Y_d} \qquad \text{ossia:} \qquad Z_s = zl;\ Y_d = yl.$$

Si vede facilmente che l'impedenza definita come in 2-3,3 per lo schema di fig. 2-7, è:

$$Z = \left[\frac{V_1}{I_2}\right]_{V_2=0} = Z_s \frac{\mathrm{sen}\,\mathrm{h}al}{\alpha l} \simeq Z_s\left(1 + \frac{a^2 l^2}{3!} + \dots\right) = Z_s\left(1 + \frac{1}{6} Z_s Y_d + \dots\right).$$

Se in prima approssimazione si può porre $al = 0$ e quindi $Z = Z_s$, in molti casi è sufficiente tener conto del solo termine successivo. Sia per esempio in regime sinusoidale $Z_s = R$; $Y_d = j\omega C$, ne risulta un'impedenza:

$$\dot{Z} = R\left(1 + j\omega \frac{RC}{6}\right)$$

con una costante di tempo $RC/6$; allo stesso risultato si perviene considerando anche i termini successivi dello sviluppo in serie e calcolando la costante di tempo generalizzata.

Se invece è: $Z_s = 1/j\omega C_s$ e $Y_d = j\omega C_d$ (condensatore con capacità parassite), risulta:

$$\dot{Z} = \frac{1}{j\omega C_s}\left(1 + \frac{C_d}{6C_s}\right)$$

ossia la capacità che si misura appare ridotta, nel rapporto $(1 + C_d/6C_s)$ rispetto a quella che si avrebbe in assenza di capacità parassite.

Relazioni più complesse possono tener conto di elementi parassiti non uniformemente distribuiti. I risultati precedenti possono essere formalmente estesi a qualunque tipo di funzionamento, anche non periodico, mediante l'uso delle impedenze in forma operatoriale. È tuttavia da osservare che, dipendendo l'importanza dei vari parametri parassiti dalla forma delle tensioni e correnti in gioco, non è sempre possibile ricondursi a schemi equivalenti di tipo semplice.

2-4. **Campioni per corrente continua.**

2-4,1. *Campioni di f.e.m.*

Il migliore campione di forza elettromotrice attualmente in uso è la pila Weston (pila al cadmio-mercurio); essa è costituita da un recipiente

di vetro neutro, a forma di *H* (fig. 2-8) con due conduttori di platino saldati alle estremità inferiori, per assicurare il contatto con gli elettrodi.

La pila è formata dalla seguente catena di elementi: anodo di Hg — soluzione satura di Hg_2SO_4 (depolarizzatore) — soluzione di $CdSO_4$ in soluzione decimale di H_2SO_4 — catodo di amalgama di Cd in fase solida e liquida.

Quando la soluzione di $CdSO_4$ è *satura*, con presenza di cristalli sull'anodo, il valore della f.e.m. a vuoto risulta di 1.0186 volt a 20 °C e si mantiene, con ottima stabilità, nel tempo; diminuisce di circa 40 μV per un grado di aumento della temperatura.

Per campioni secondari sono più usate pile *non sature*, il cui valore di f.e.m. è un po' maggiore, dipende dalla concentrazione dell'elettrolita ed è meno permanente (diminuisce) nel tempo; risultano però meno influenzate dalla temperatura (da — 3 a — 5 μV/K) e più robuste. Le dimensioni del contenitore non influenzano il valore della f.e.m. ma solo quello della resistenza interna delle pile, che è normalmente dell'ordine delle centinaia di ohm.

Fig. 2-8
Pila campione Weston: 1 = soluzione di solfato di cadmio; 2 = cristalli di $CdSO_4$ (pila satura); 3 = amalgama di Cd.

La conservazione e l'uso delle pile richiedono diverse precauzioni; esse sono infatti sensibili alle variazioni termiche, agli urti meccanici, all'esposizione alla luce, ma soprattutto agli effetti depolarizzanti dovuti all'erogazione di corrente; questi fenomeni si presentano come variazioni della f.e.m. che si stabilizzano solo dopo diverse ore o diversi giorni.

Una pila campione può erogare solo qualche μA per qualche secondo; il suo impiego è perciò limitato a metodi di zero realizzati con opportune protezioni.

Per superare queste limitazioni, si sono recentemente impiegati come campioni sistemi a semiconduttori (vedi 5-4,6).

Il coefficiente di temperatura delle pile sature è la risultante di coefficienti molto più elevati (dell'ordine di 300 μV/K), di opposto segno per i due elettrodi; occorre perciò assicurare alla pila un'uniformità di temperatura che, per i campioni primari, deve raggiungere qualche millesimo di grado.

I confronti fra campioni primari mostrano che la loro stabilità, per tempi anche di una ventina d'anni può mantenersi nell'ordine di qualche ppm.

2-4,2. *Materiali per campioni di resistenza.*

La costruzione di resistori campioni, di caratteristiche note, costanti nel tempo ed indipendenti dai fattori esterni, dipende in primo luogo dalla scelta del materiale. Esso deve avere principalmente le seguenti proprietà:

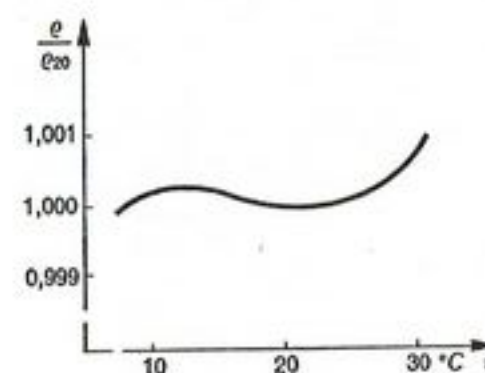
- basso coefficiente di variazione della resistività con la temperatura;
- resistenza alle ossidazioni e alle corrosioni;
- assenza di fenomeni di invecchiamento, che ne alterino le caratteristiche col tempo;
- piccole f.e.m. termoelettriche rispetto al rame, che è il materiale più usato per le connessioni ai circuiti esterni al resistore.

A questi requisiti si aggiungono in genere quelli di una elevata resistività, che consente dimensioni di ingrombo limitate, e di una buona resistenza meccanica, che permette l'avvolgimento di fili sottili.

I metalli puri, che non presentano fenomeni di invecchiamento, hanno in genere un elevato coefficiente di temperatura; più usate sono perciò quelle leghe ad alta stabilità, la cui resistività varia in funzione della temperatura, secondo andamenti del tipo rappresentato in fig. 2-9; la zona di minor variazione di resistività dipende dalla composizione della lega e dai trattamenti termici cui essa è sottoposta e può quindi coincidere con la zona di temperature di normale impiego per il resistore.

Fig. 2-9

Il materiale più diffuso è la *manganina* (86% Cu, 12% Mn, 2% Ni) che ha resistività dell'ordine di 0,5 μΩm e f.e.m. rispetto al rame di circa 2 μV/K. Il coefficiente di temperatura è di $\pm 10^{-5}$ fra i 20 e i 30 °C, e si mantiene inferiore a $20 \cdot 10^{-5}$ fino a circa 60 °C.

La *costantana* (60% Cu, 40% Ni) ha proprietà simili alla manganina, anzi coefficiente di temperatura leggermente minore; essa presenta inoltre il vantaggio di essere più economica e più facilmente lavorabile, mentre

ha l'inconveniente di una maggior f.e.m. termoelettrica rispetto al rame (40 μV/K).

Materiali meno usati sono: le leghe Cu-Mn-Al, in cui l'aggiunta di piccole quantità di ferro riduce considerevolmente la f.e.m. termoelettrica; le leghe Ni-Cr, con l'aggiunta di Al e Cu (leghe Isaohm, Evanohm, Karma, ecc.) che hanno resistività attorno a 1,3 μΩm e che possono essere lavorate in fili sottili fino a 10÷15 μm, per la costruzione di resistori aventi valore elevato; le leghe di Pt, Ir, Ag depositate sotto vuoto su supporti ceramici.

2-4,3. *Costruzione dei campioni di resistenza per c.c.*

La costruzione di un campione di resistenza deve essere curata in modo da garantirne l'inalterabilità nel tempo e di consentire un buon smaltimento del calore prodotto (fig. 2-10). I morsetti per i collegamenti ai circuiti esterni sono disposti secondo i principi indicati in 2-3.

Il conduttore viene ricoperto da un isolamento, anche per protezione dagli agenti esterni; per evitare le deformazioni meccaniche nell'isola mento, per effetto dell'umidità ambiente, che possono ripercuotersi sul filo conduttore, si impiegano isolamenti in nylon o in miscuglio di cotone e seta. Questo isolamento è generalmente impregnato in vernice o cera, che riducono l'assorbimento di umidità. L'impiego di olio e di paraffine è stato abbandonato, poiché essi danno luogo, dopo un certo tempo, a prodotti acidi che intaccano il resistore. Moderni resistori di grande stabilità sono montati in involucri a tenuta stagna, in gas inerte.

La protezione del conduttore ostacola, in genere, la dispersione del calore da esso prodotto e limita la potenza dissipabile; questa è dell'ordine di qualche watt, con salti di temperatura dell'ordine di 10÷15 K. Per potenze superiori, i resistori vengono immersi in una vasca con circolazione d'olio o scambiatori di calore olio-acqua. La dispersione del calore risulta favorita se il resistore viene avvolto su un cilindro cavo metallico che viene a contatto con l'aria o con l'olio di raffreddamento.

Fig. 2-10
Resistore campione: 1, 1' = morsetti amperometrici; 2, 2' = morsetti voltmetrici; 3 = involucro metallico.

Dopo il montaggio, la resistenza viene stabilizzata con una ricottura prolungata per alcuni giorni. Se il resistore, nel corso del suo impiego, viene sottoposto, anche per un tempo limitato, a temperature troppo elevate (dell'ordine di 150 °C per la manganina, 300÷400 °C per le leghe Ni-Cr) si ha un'ulteriore ricottura che produce un'alterazione permanente. Si usa perciò talvolta rivestire il conduttore con una vernice che si altera, con emissione di vapore, prima che sia raggiunta la temperatura critica per il resistore.

Come già si è visto, il valore di un resistore può essere determinato sia mediante misure assolute, sia con riferimento ad altri campioni primari. È assai difficile, tuttavia, al termine della fabbricazione, riuscire a pervenire al valore esatto voluto, con il desiderato numero di zeri (per es. 10.000,0 Ω). Per evitare di introdurre correzioni nei calcoli, qualora ciò possa avere importanza, si ricorre pertanto a dispositivi con resistori di aggiustaggio (detti trimmer) come nello schema di fig. 2-11.

Nei campioni di valore basso l'aggiustaggio avviene mediante schemi duali con elementi in parallelo.

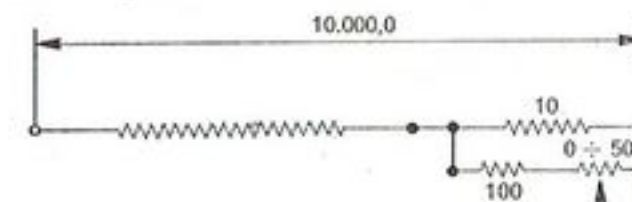



Fig. 2-11

2-4,4. *Resistori a cassetta e a decadi.*

Nelle applicazioni, è utile poter disporre anche di resistori variabili, il cui valore sia noto, in ogni posizione, con una determinata precisione. Ciò viene realizzato raggruppando in modo diverso, in serie o parallelo, più resistori di valore noto, costruiti con modalità analoghe a quelle usate per i campioni fissi.

Nei resistori a cassetta, l'inserzione avviene mediante la manovra di spine coniche (fig. 2-12) che inseriscono o cortocircuitano singoli resistori.

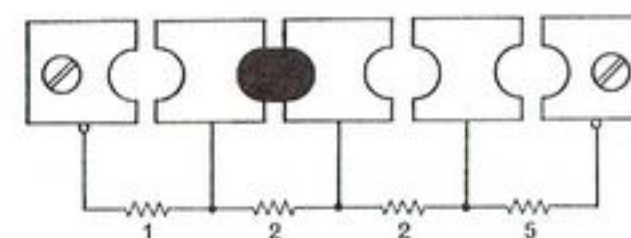



Fig. 2-12

È facile verificare che con quattro resistori di valore 1-2-2-5 Ω si possono realizzare tutti i valori interi da 1 a 10 Ω, e così per le decadi successive,

cosicché bastano, ad esempio, 12 resistori per realizzare tutti i valori interi, da 1 a 1110 Ω. Nelle varie condizioni sono però presenti in diverso numero le resistenze di contatto proprie delle spine; esse possono essere mantenute ad un valore basso, curandone la pulizia e la pressione nelle rispettive sedi. Si evita tuttavia di scendere con i resistori al di sotto del valore di 0,1 Ω.

Per rendere costante la resistenza di contatto, indipendentemente dal valore inserito, si ricorre a *resistori a decadi* con inserzione a spine o con la più pratica disposizione a commutatore rotante (fig. 2-13); essi risultano però più costosi poiché per realizzare la serie di valori interi da 1 a 10 sono necessari 10 resistori uguali.

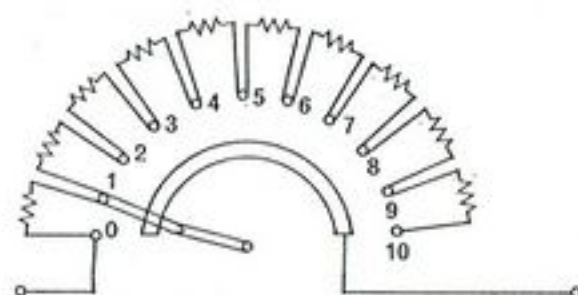



Fig. 2-13

Il contatto, nel commutatore rotante, è formato da una spazzola di lamelle di rame che agiscono indipendentemente, a pressione, su un blocchetto fisso; la resistenza relativa, pur curando la pulizia delle superfici, scende difficilmente al disotto di 10^{-4} Ω.

Mediante particolari artifizi è anche possibile realizzare i valori di una decade combinando un numero minore di resistori, pur riducendo a uno solo il contatto mobile in serie al circuito.

L'insieme di più resistori nello stesso involucro limita la potenza dissipabile da ognuno di essi; sono abituali valori di 1÷2 W per resistore, indipendentemente dal loro valore.

2-4,5. *Resistori variabili di basso valore.*

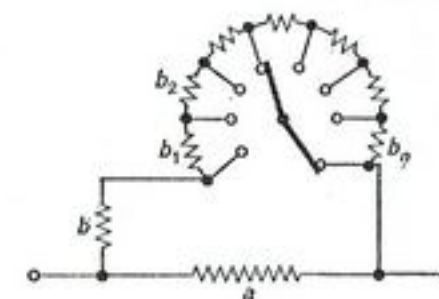
Le limitazioni imposte dalle resistenze di contatto impediscono la costruzione di decadi o cassette di precisione, per valori inferiori a 10^{-2} Ω.

Per realizzare resistori variabili in questo campo, è possibile far ricorso a *fili calibrati*, di sezione e resistività uniformi, che consentono variazioni continue nella resistenza; ad essi va naturalmente applicata, almeno sulla parte variabile, un morsetto voltmetrico distinto da quello amperometrico.

Per ottenere fili uniformi e inalterabili sotto l'attrito del cursore, si usano diametri non inferiori al millimetro, il che comporta spesso una notevole lunghezza (dell'ordine dei metri).

Fig 2-14.

La variazione di una resistenza per valori inferiori all'ohm evitando l'influenza delle resistenze di contatto, può essere realizzata con la disposizione di fig. 2-14; scegliendo opportunamente i valori di resistori $a, b, b_1, b_2, ..., b_{10}$, è possibile fare in modo che la resistenza totale vari da un valore A a un valore $A+1$ (ovvero $+0{,}1$, o $+0{,}01$), per gradini uniformi al variare della posizione del cursore.

La resistenza di contatto del cursore è sempre in serie con resistori di valore relativamente elevato (decine di Ω).

2-4,6. *Resistori campioni di valore elevato.*

I campioni di resistenza nel campo da 10^7 a 10^{14} Ω sono costruiti con tecniche di deposito di materiali ad alta resistività; fra questi è il carbone, che ha coefficiente di temperatura negativo. Essi possono presentare anche variazioni in funzione della tensione applicata, ma soprattutto fenomeni d'invecchiamento nel tempo. Sono normalmente racchiusi in involucri metallici che funzionano da schermatura.

2-5. **Campioni di capacità.**

2-5,1. *Requisiti dei condensatori campioni.*

Un condensatore campione deve avere come requisiti essenziali:

a) un valore di capacità ben definito e costante; questo valore deve risultare indipendente dalle condizioni ambientali (p. es. temperatura) e di funzionamento (p. es. frequenza, tensione ecc.);

b) assenza di assorbimento di potenza attiva, in modo da realizzare la perfetta quadratura fra tensione e corrente (in regime sinusoidale).

A questi requisiti può aggiungersi talvolta quello di avere un valore calcolabile dalle dimensioni geometriche.

La possibilità di soddisfare questi requisiti dipende in gran parte dalla scelta del dielettrico, che è generalmente mica, quarzo o polistirolo per

capacità elevate ($> 10^{-9}$ F) e tensioni modeste (qualche centinaio di volt) o un dielettrico gassoso, negli altri casi.

Il dielettrico gassoso più semplice e conveniente è l'aria la cui costante dielettrica varia di qualche ppm per variazioni di un mbar nella pressione o di 1% nell'umidità relativa. Queste variazioni possono essere eliminate con condensatori a tenuta ermetica, ma subentra allora una variazione con la temperatura, di qualche ppm per K. Per avere maggiore rigidità dielettrica (e quindi minor volume a parità di energia immagazzinata) si usa, specie per i condensatori ad alta tensione (> 20 kV) l'azoto o l'esafluoruro di zolfo compresso da 2 a 15 bar.

I dielettrici solidi presentano il fenomeno dell'assorbimento, per effetto del quale, oltre a una dissipazione di potenza, si ha una variazione della costante dielettrica con la frequenza. Le variazioni con la temperatura sono dell'ordine di $+30$ ppm/K per la mica, -140 ppm/K per il polistirolo.

Le proprietà dei condensatori campioni dipendono anche, almeno in parte, dalle caratteristiche costruttive; questo è il caso ad esempio delle variazioni di capacità conseguenti a deformazioni geometriche, che possono essere provocate sia dalla temperatura sia dalla tensione.

Le connessioni possono inoltre introdurre un'induttanza parassita, che si aggiunge a quella delle armature; la presenza di un'induttanza L in serie alla capacità C_0 produce, alla pulsazione ω, una variazione ΔC sulla capacità apparente:

$$\frac{\Delta C}{C_0} \simeq \omega^2 L C_0 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

purché sia:

$$\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}.$$

In un diagramma logaritmico (fig. 2-15) delle variazioni di capacità, in funzione della frequenza, si distingue chiaramente l'errore dovuto all'induttanza propria, sul ramo ascendente della curva.

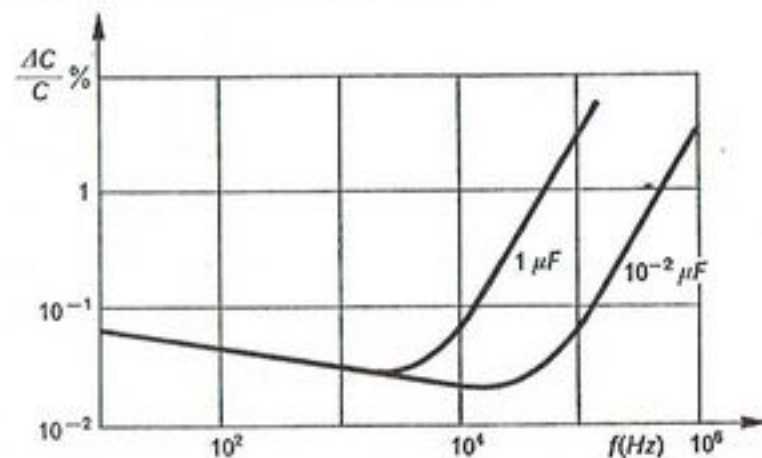



Fig. 2-15

2-5,2. *Condensatori a tre morsetti.*

Le armature (1, 2) di un condensatore presentano sempre una capacità parassita rispetto agli oggetti conduttori circostanti, in tensione o a massa (fig. 2-16). Queste capacità, dell'ordine di qualche pF, alterano il valore della capacità misurabile fra gli elettrodi principali, facendo sì che essa dipenda anche dal potenziale di detti oggetti.

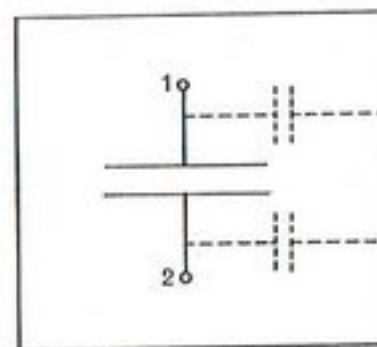



Fig. 2-16

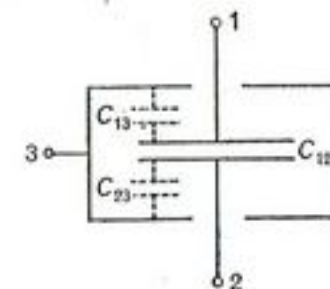



Fig 2-17

Le capacità parassite possono assumere valori ben definiti disponendo, intorno agli elettrodi principali, uno schermo metallico che li circonda completamente (fig. 2-17); in questo caso è possibile determinare i valori delle capacità parziali C_{12}, C_{13} e C_{23}, ma il valore che si misura fra 1 e 2 è in ogni caso influenzato dal potenziale del punto 3, che è a sua volta determinato dalle capacità parassite esistenti fra schermo e oggetti circostanti.

L'effetto delle capacità parassite può essere completamente eliminato portando il punto 3 al potenziale del punto 2, senza connetterlo direttamente ad esso, come già visto in 2-3,3; la fig. 2-18 dà un esempio di una simile disposizione, in cui la corrente che fluisce nell'elettrodo 3 non attraversa l'utilizzazione, qui schematizzata dall'amperometro A.

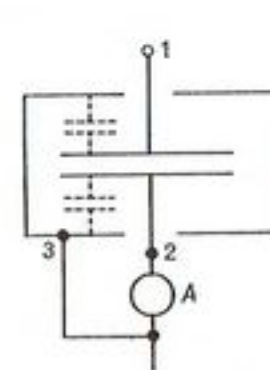



Fig. 2-18

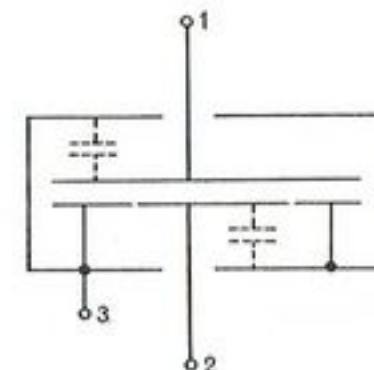



Fig. 2-19

Il terzo elettrodo può essere utilizzato anche per gli anelli di guardia (fig. 2-19); può anche servire ad eliminare l'influenza delle perdite in eventuali dielettrici solidi, interposti, ad esempio per ragioni meccaniche, fra esso e gli elettrodi principali. Spesso lo schermo si prolunga sulle connessioni dell'elettrodo 2.

In mancanza del terzo elettrodo, la funzione dello schermo può essere assunta, in parte, dallo stesso elettrodo 1 (fig. 2-20); si presentano così condensatori con l'elettrodo in tensione esterno, che viene percorso dalla corrente della capacità parassita, che però non interessa l'elettrodo di misura.

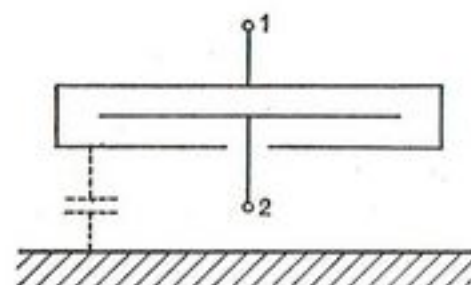



Fig. 2-20

2-5,3. *Angolo di perdita.*

Come è noto, in un condensatore reale esistono varie cause di dissipazione di energia, in gran parte attribuibili al dielettrico (conduttanza di dispersione non nulla, perdite per isteresi dielettrica, ecc.), od alle armature (effetto Joule nei collegamenti e nelle armature); ad esse possono aggiungersi effetti combinati quali quelli provocati da effluvi ai bordi o da depositi (ad esempio ossidazione) sulle armature.

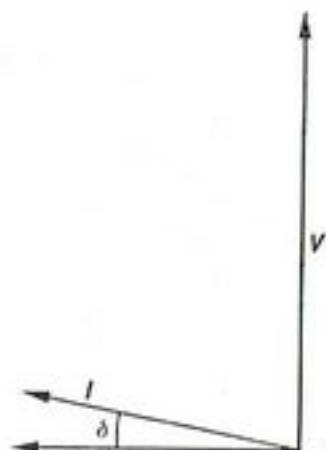
Per caratterizzare queste perdite, si ricorre alla definizione dell'angolo δ che la corrente nel condensatore reale presenta rispetto a quella di un condensatore ideale; è allora (fig. 2-21):

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{P}{Q}$$

Fig. 2-21

essendo rispettivamente P e Q la potenza attiva e reattiva assorbite dal condensatore reale.

Negli schemi equivalenti, il condensatore con perdite può essere rappresentato, ad una certa frequenza, da una capacità C ideale con una resistenza R_s in serie o R_p in parallelo (fig. 2-22); risulta:

$$\operatorname{tang}\delta = \omega R_s C = \frac{1}{\omega C R_p};$$

e poiché δ è sempre piccolo, si può scrivere:

$$\dot{Z}_c \cong -jX_c(1 + j\delta).$$

Il quarzo, la mica, il polistirolo hanno angolo di perdita dell'ordine di 10^{-4}; esso varia con la frequenza, come mostra ad esempio la fig. 2-23. Con gli isolanti gassosi si ottengono valori inferiori a 10^{-5}.

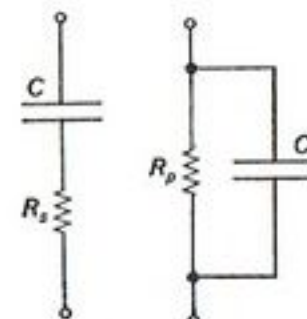



Fig. 2-22

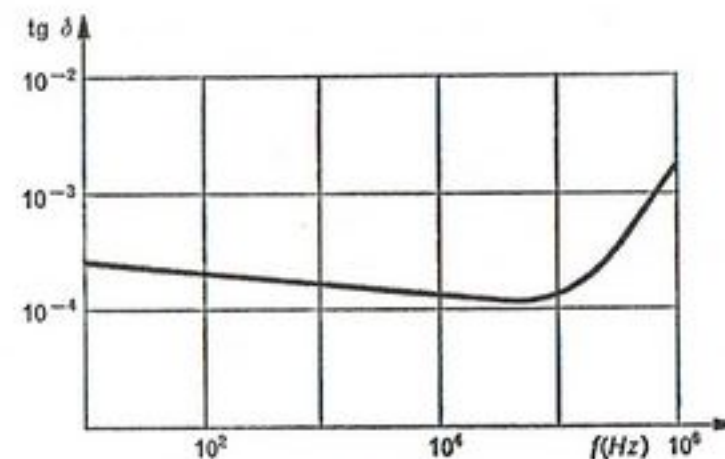



Fig. 2-23

2-5,4. *Campioni di valore calcolabile.*

I tipi più semplici di condensatori calcolabili sono ovviamente i condensatori a piani paralleli dotati di convenienti anelli di guardia, per delimitare la zona utile a campo uniforme. Altri esempi sono costituiti da condensatori sferici o da cilindri coassiali, anche questi con opportuni elettrodi di guardia. La loro capacità risulta determinata dalle dimensioni geometriche e dalla costante dielettrica del dielettrico impiegato, che è generalmente l'aria (o, in qualche caso, il vuoto).

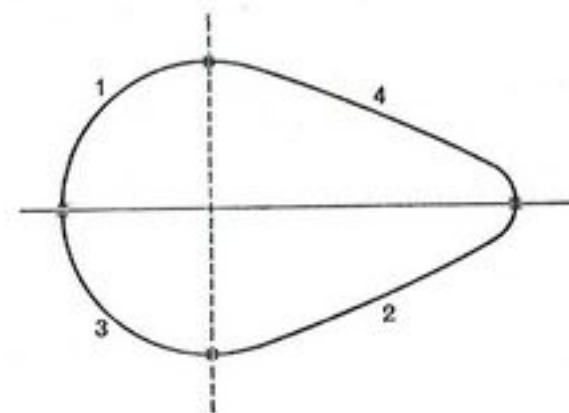



Fig. 2-24

È stata però dimostrata la possibilità di costruire condensatori campioni di capacità determinata da un'unica misura di lunghezza. Si consideri un cilindro indefinito, con sezione di forma qualsiasi, purché provvisto di un'asse di simmetria (fig. 2-24); si suddivida la sezione con un altro asse, normale al precedente, ottenendo quattro settori. Un teorema di elettrostatica (Lampard) mostra che la capacità fra due opposti settori (p. es. 1 e 2), gli altri due essendo connessi come terzo elettrodo, è indipendente dalla forma e dimensioni della sezione, e vale:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0}{\pi} \ln 2 = 1{,}95354849 \text{ pF/m}.$$

Questa relazione è anche valida per disposizioni cilindriche con sezione di forma qualsiasi purché le capacità C_a (fra gli elettrodi 1 e 2) e C_b (fra gli elettrodi 3 e 4) siano fra loro eguali. Se le condizioni di simmetria non sono perfettamente rispettate, la media C_m delle capacità C_a e C_b vale:

$$C_m = C_0 \left[1 + \frac{\ln 2}{8} \left(\frac{C_a - C_b}{C_0} \right)^2 - \frac{(\ln 2)^2}{192} \left(\frac{C_a - C_b}{C_0} \right)^4 + \ldots \right]$$

cossiché con dissimmetria $(C_a - C_b)/C_0 = 10^{-3}$ il valore di C_m si discosta solo di 10^{-7} da quello teorico.

Per ridurre l'effetto della separazione finita fra settori, i condensatori campioni basati su questo principio sono realizzati mediante cilindri affacciati (fig. 2-25); si hanno naturalmente sia elettrodi terminali di guardia,

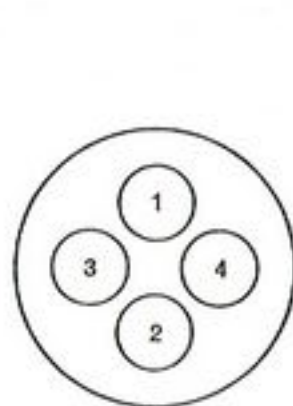
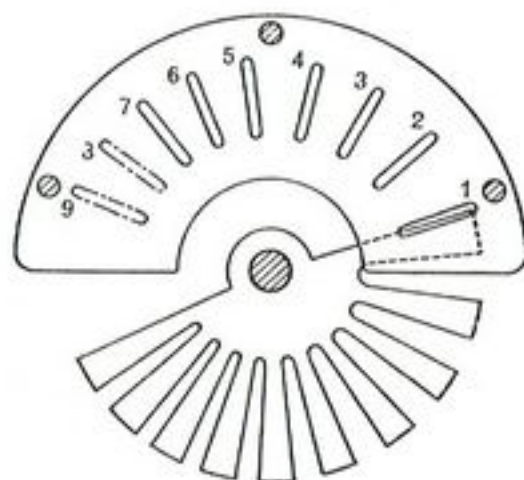



Fig. 2-25 Fig. 2-26

per evitare effetti di estremità, sia schermi verso l'esterno; le realizzazioni più accurate sono di tipo differenziale, ottenute per spostamento di una sbarra di schermo interna, e con misure interferometriche di lunghezza.

2-5,5. *Tipi di condensatori campioni.*

I condensatori di capacità sopra i 1 nF sono generalmente a dielettrico solido, con elettrodi a foglio o, meglio, a deposito di argento. Essi possono essere raggruppati in cassette a spine o a decadi.

I condensatori in aria sono invece formati da una o più coppie di elettrodi affacciati, disposti in recipiente ermeticamente chiuso; i supporti degli elettrodi sono generalmente in quarzo o altro materiale a bassa perdita; con lo stesso sistema, facendo ruotare un'armatura, si ottengono capacità variabili (fig. 2-26). Una costruzione particolare, con gas in pressione, per capacità a tensione elevata (fino a 500÷1000 kV) è mostrata in fig. 2-27.

Fig. 2-27

Particolari cure, specie per le schermature, sono richieste per la costruzione di campioni, fissi o variabili, di piccolissima capacità (< 1 pF). La fig. 2-28 mostra un simile campione ricavato depositando un film conduttore nell'interno di un tubo di quarzo; in questo film sono ricavati i due elettrodi principali mentre il resto costituisce lo schermo.

Se gli elettrodi, anziché affacciati, sono spostati assialmente l'uno rispetto all'altro, si ottengono capacità anche molto piccole.

La maggiore stabilità si ottiene poi mantenendo il sistema sotto vuoto spinto, in un contenitore metallico che agisce anche come schermo verso gli oggetti esterni.

Per realizzare condensatori variabili, si ricorre ad una costruzione del tipo di fig. 2-29, dove l'elettrodo 2 si muove nell'interno di un « pozzo di guardia ». Gran parte delle linee di forza uscenti dall'elettrodo 1 sono deviate verso lo schermo 3 senza interessare l'elettrodo 2.

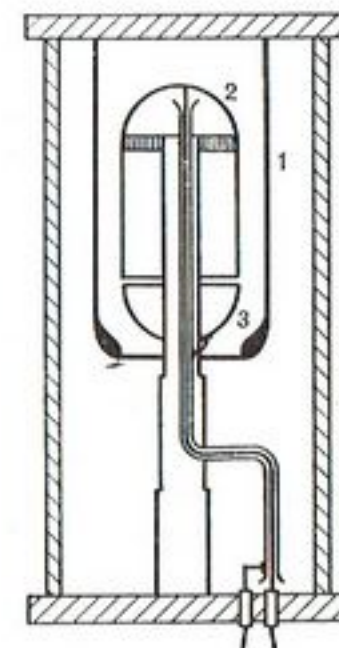
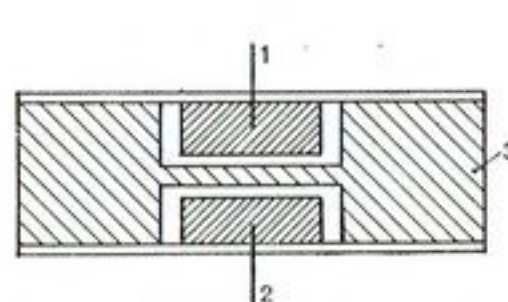
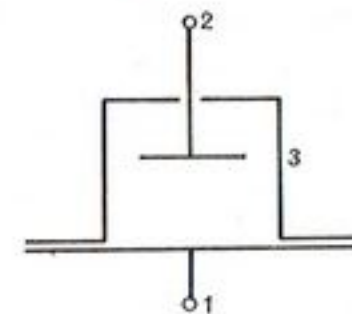



Fig. 2-28 Fig. 2-29

2-6. **Altri campioni per corrente alternata.**

2-6,1. *Resistori campioni per c.a.*

Un resistore campione per corrente alternata, oltre a soddisfare ai requisiti richiesti per l'uso in corrente continua, deve garantire la costanza della resistenza, al variare della frequenza, e l'assenza di componenti reattive (induttanza o capacità). Per soddisfare al primo requisito è necessario evitare correnti parassite, sia nell'interno del conduttore che negli oggetti circostanti; il resistore sarà perciò in filo sottile e montato su supporti isolanti, anziché metallici.

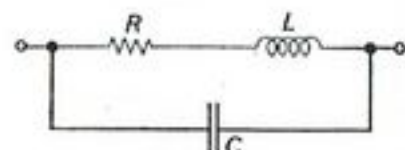



Fig. 2-30

Risulta invece sempre presente un'induttanza parassita, corrispondente al flusso concatenato col resistore stesso quando questo è percorso da corrente, ed una capacità parassita, corrispondente alle correnti nel dielettrico esistente fra punti del resistore a diverso potenziale; entrambi questi parametri sono distribuiti lungo il resistore stesso. Per definire le proprietà del resistore in regime variabile conviene pertanto far riferimento alla sua costante di tempo (generalizzata) T_0 definita, in base alla [1-40] come il rapporto δ/ω, essendo δ l'angolo di sfasamento fra tensione applicata e corrente nel resistore, alla pulsazione ω; questo parametro è pressoché costante al variare della frequenza e viene in genere convenzionalmente misurato intorno a 1 kHz; ricordando (1-5,3) che per il semplice schema equivalente di fig. 2-30 si ha:

$$T_0 = \frac{L}{R} - RC\,;$$

si riconosce la possibilità di costanti di tempo sia positive, quando prevale l'effetto induttivo (resistori di valore basso) sia negative, quando prevale l'effetto capacitivo (con resistenze elevate). Il punto di compensazione dei due effetti dipende dalle modalità di costruzione del resistore, ed è realizzabile per resistori dell'ordine del centinaio di ohm (¹).

I tipi più comuni di avvolgimento sono quelli bifilari, tali cioè da chiudere al massimo la spira formata dal resistore (avvolgimenti su sottili lastre isolanti o con due fili in parallelo, avvolti in sensi opposti).

Oltre agli effetti di capacità propria, un resistore può presentare effetti di capacità verso gli oggetti circostanti. In generale, perciò i resistori campioni sono contenuti in cassette munite di opportuni schermi metallici. Si realizzano costanti di tempo dell'ordine di $10^{-7} \div 10^{-9}$ s, specie per resistori di dimensioni fisiche limitate. Per misure di precisione sono stati costruiti campioni con costanti di tempo calcolabili entro 10^{-9}, almeno fino a frequenze dell'ordine di qualche kHz.

(¹) Alcune norme classificano i resistori per c.a. nei riguardi della loro costante di tempo con un indice pari al logaritmo in base 10 di T_0, espresso in nanosecondi (cioè un resistore classe 2 ha $T_0 \leq 100$ ns).

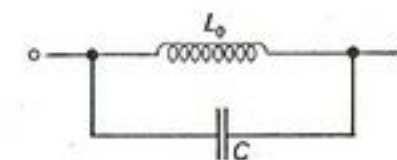
2-6,2. *Campioni di induttanza.*

Un campione di induttanza è formato da un avvolgimento dotato di un ben definito valore del coefficiente di autoinduzione; nelle varie condizioni d'impiego, esso dovrà anche presentare una resistenza abbastanza piccola, rispetto alla reattanza induttiva.

Il coefficiente di autoinduzione di un avvolgimento è legato alle sue dimensioni geometriche ed alla permeabilità del mezzo interessato dalle linee di flusso; gli induttori campione sono perciò montati su supporti non magnetici e poco deformabili con la temperatura e l'umidità, come il marmo, l'ebanite, la ceramica, il plexiglas, ecc.

Fig. 2-31

Per evitare variazioni d'induttanza e perdite supplementari, dovute a correnti parassite, deve essere evitato nei supporti l'impiego di materiali conduttori; l'avvolgimento stesso deve inoltre essere di sezione tale da non risentire dell'effetto pelle, eventualmente suddividendo il conduttore in più fili elementari, intrecciati, fra loro isolati.

La principale causa di variazione dell'induttanza (apparente) con la frequenza, è dovuta alle capacità proprie (fra spire, fra strati) dell'avvolgimento. È infatti, per il circuito di fig. 2-31:

$$\dot{Z} = \frac{j\omega L_0}{1 - \omega^2 L_0 C}$$

e perciò, introducendo la pulsazione di risonanza dell'avvolgimento:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$$

si ha:

$$L = \frac{L_0}{1 - \omega^2 L_0 C} \simeq L_0\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).$$

Nelle buone costruzioni, la capacità parassita risulta dell'ordine da 1 a 50 pF; ne segue che la frequenza limite d'impiego potrà essere dell'ordine dei kHz, per induttori di alcuni mH, e salirà ai MHz per induttori dell'ordine dei μH.

Nei riguardi delle perdite, un induttore è caratterizzato dalla tangente

del suo angolo di perdita δ o, più comunemente, dal suo inverso (fattore di merito):

$$Q_L = \frac{1}{\tan g\,\delta} = \frac{\omega L}{R}.$$

Talvolta, specie per basse frequenze, si dà il valore della costante di tempo L/R che, come è noto, dipende dalla forma e dimensioni dell'avvolgimento, ma non dal suo numero di spire.

Per l'esatta definizione dell'induttanza, è necessario che l'induttore rappresenti un circuito perfettamente chiuso e che non abbia effetti di mutua induttanza con circuiti esterni (per collegamenti ecc.).

2-6,3. *Tipi di induttori campioni.*

La forma degli avvolgimenti è, in generale, dettata dalla necessità di realizzare un valore d'induttanza calcolabile con precisione, specie quando il numero di spire N è così piccolo da non fornire possibilità di aggiustaggio. La forma di fig. 2-32 dà, ad esempio, con buona approssimazione:

$$L = 2{,}459aN^2 \times 10^{-6}$$

e:

$$T = \frac{L}{R} \simeq 12a^2$$

(per rame a 20°), e consente valori di T da 10^{-1} a 10^{-3} s, se a è dell'ordine dei centimetri. L'avvolgimento toroidale ha il pregio di ridurre la mutua induttanza con i circuiti esterni; esso fornisce però, a parità di peso di avvolgimento, un minor valore della costante di tempo.

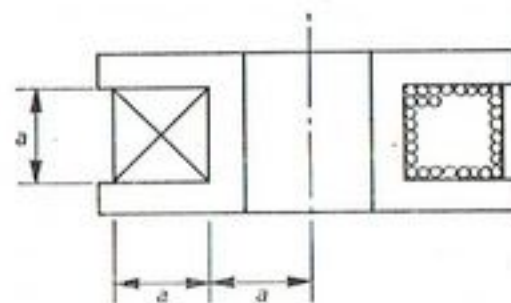



Fig. 2-32

Valori più elevati della costante di tempo, specie per induttori di valore elevato, possono essere ottenuti con circuiti toroidali avvolti su nuclei ferromagnetici costituiti da polveri sinterizzate (permeabilità relative del l'ordine di $5 \div 10$); l'induttanza varia naturalmente con la corrente ma tale variazione può essere mantenuta in limiti ristretti (per es. $< 1\%$) in un opportuno campo di correnti. Il minor numero di spire necessario riduce la capacità propria dell'avvolgimento, mentre la presenza di perdite, rappresentabili con una resistenza in parallelo con L_0, introduce un'altra causa di variabilità dell'induttanza equivalente con la frequenza.

Gli induttori fissi possono essere combinati in cassette a decadi, come i resistori.

2-6,4. *Mutui induttori campioni.*

Un campione di mutua induttanza fissa può servire sia per misure assolute sia per produrre, quando è percorso da una corrente nota I, un valore noto di flusso concatenato MI. Più diffuse sono le applicazioni in regime sinusoidale in cui il mutuo induttore serve a produrre una f.e.m. secondaria (a vuoto) in quadratura con la corrente primaria; in questo caso si utilizzano generalmente mutui induttori variabili.

Per ottenere la costanza del valore della mutua induttanza e la condizione di quadratura fra la f.e.m. secondaria e la corrente primaria, è necessario evitare la presenza di correnti indotte; la resistenza propria degli avvolgimenti non ha invece influenza.

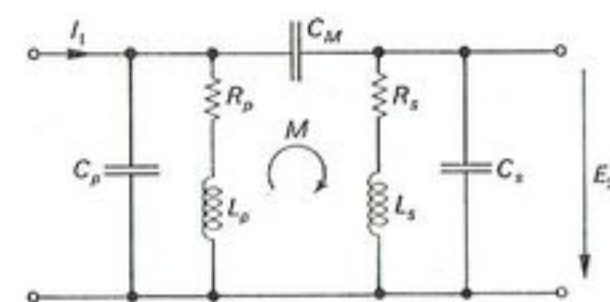



Fig. 2-33

La variabilità della mutua induttanza con la frequenza ed il suo errore di fase sono invece legate alla presenza delle capacità proprie dei singoli avvolgimenti, C_p e C_s, e di quella fra i due avvolgimenti, C_M dello schema equivalente più completo di fig. 2-33.

Si vede come l'avvolgimento secondario sia percorso da corrente, anche quando i suoi morsetti siano aperti, per effetto delle capacità C_M e C_s; ampiezza e fase della f.e.m. secondaria E_2 vengono perciò a dipendere anche dalla resistenza e induttanza dei due avvolgimenti.

Per limitare le capacità parassite, i mutui induttori campioni fissi si costruiscono come in fig. 2-34; tipi più semplici, di minor precisione, sono realizzati come in fig. 2-35. Per rendere gli induttori insensibili ai

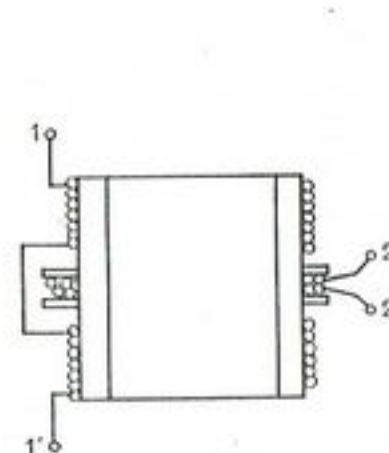



Fig. 2-34

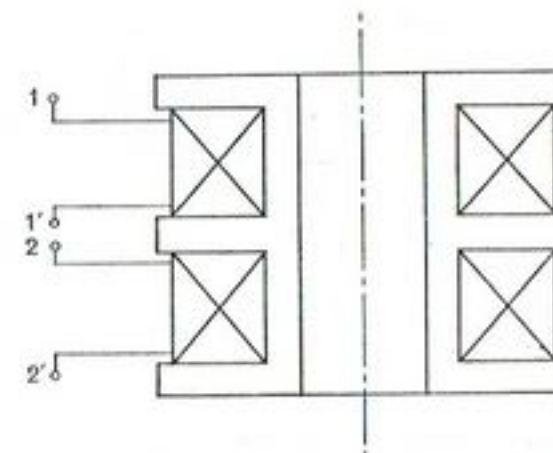



Fig. 2-35

campi di origine esterna, anziché disposizioni toroidali, che presenterebbero forti capacità fra avvolgimenti, si usano sistemi costituiti da coppie di avvolgimenti uguali, orientati in senso opposto rispetto a campi esterni uniformi.

2-6,5. *Induttori variabili.*

L'induttanza totale di due avvolgimenti, fra loro in serie, con coefficienti di autoinduzione L_1 e L_2 e mutua induzione M vale, come è noto:

$$L = L_1 + L_2 + 2M;$$

una mutua induttanza variabile consente quindi di ottenere anche un'autoinduttanza variabile.

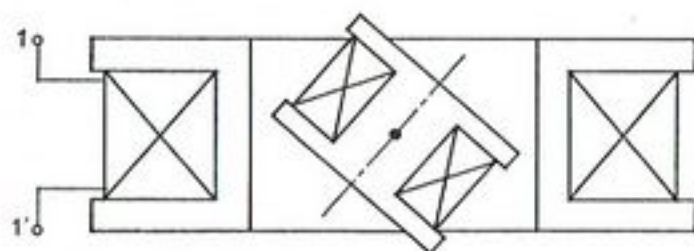



Fig. 2-36

La disposizione più semplice si ha con due bobine circolari, l'una fissa e l'altra mobile per 180° nell'interno della precedente, in modo da far variare la mutua induttanza fra un massimo positivo e uno negativo, quando gli assi delle bobine sono coincidenti (fig. 2-36). Per ottenere una variazione pressoché lineare di M con l'angolo di rotazione, la bobina interna deve essere di diametro circa metà di quello della bobina esterna. La scala è però praticamente sempre tracciata per via empirica.

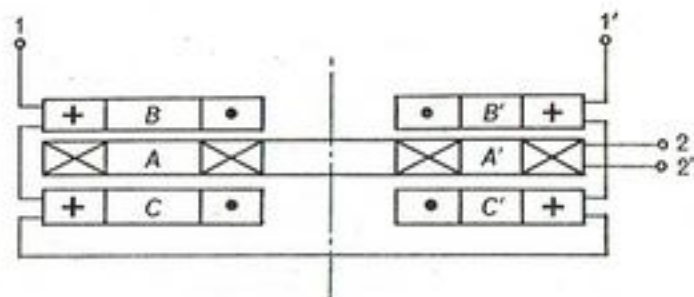



Fig. 2-37

Una disposizione meno sensibile ai campi magnetici di origine esterna è quella di fig. 2-37. Una coppia di bobine mobili AA' può ruotare intorno

ad un asse allontanandosi da due coppie di bobine fisse BC e $B'C'$. Le bobine A, B e C hanno verso opposto rispetto alle $A'B'C'$, in modo sia di eliminare l'effetto dei campi uniformi sia di permettere il rovesciamento del segno della M. La forma delle bobine è studiata in modo da realizzare una variazione uniforme con l'angolo di rotazione e di ottenere una buona costante di tempo.

2-7. **Metrologia elettrica primaria.**

2-7,1. *Natura dei problemi.*

La riproduzione delle unità elettromagnetiche del volt e dell'ohm mediante, rispettivamente, l'effetto Josephson e l'effetto Hall quantico richiedono l'uso di tecnologie particolari, basate sull'uso di materiali opportuni portati a temperature criogeniche e di metodi di precisione per il confronto di tensioni e correnti molto piccole.

I fenomeni che si considerano sono effetti di tipo quantico, ossia possono assumere solo valori multipli interi di un valore elementare (quanto) non ulteriormente divisibile. Il più importante è il quanto δW di energia (emessa o assorbita) alla frequenza f, che è pari a:

$$\delta W = hf$$

dove h è la costante di Planck ($6{,}6256\ 10^{-24}$ Js).

2-7,2. *L'effetto Josephson.*

L'effetto Josephson si forma nella giunzione fra due strati superconduttori (ad es. di niobio o di piombo alla temperatura di circa 4 K) separati da un sottilissimo strato isolante (dell'ordine del nm). Alle temperature criogeniche, accanto agli elettroni liberi che formano un gas elettronico disordinato, esistono coppie di elettroni (dette coppie di Cooper) con uguali e opposti quantità di moto e spin, che costituiscono un superfluido ordinato, che non interagisce con il gas elettronico. Queste coppie, al di sotto di una certa temperatura di transizione, possono dar luogo ad una supracorrente che avviene senza dissipazione di energia, cioè senza incontrare resistività.

Alimentando la giunzione con un generatore ideale di corrente continua lo strato isolante può essere attraversato da una supercorrente che non dà luogo a caduta di tensione, ma che non può superare il valore cri-

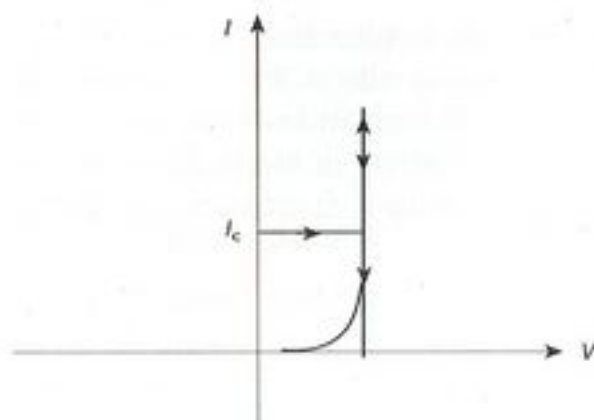
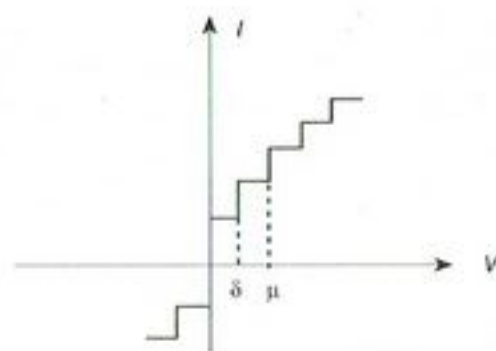



Fig. 2-38 Fig. 2-39

tico I_c (fig. 2-38). Se questo valore viene superato, si ha una caduta di tensione U e si nota, sovrapposta alla corrente continua, una supercorrente alternata di frequenza f che irradia energia per compensare la differenza di energia potenziale delle coppie di elettroni per quanti:

$$\delta W = 2e\,U = h\,f$$

indipendentemente dalle dimensioni e dal tipo della giunzione.

Irradiando la giunzione con una radiazione di frequenza f, la caratteristica tensione-corrente continua si presenta crescente in modo discontinuo (fig. 2-39) con gradini di corrente (dell'ordine delle decine o qualche centinaio di μA) in corrispondenza a multipli interi della tensione:

$$\delta U = \frac{h}{2e}\,f = f/k_j.$$

Il valore di k_j è indipendente dalle condizioni sperimentali (frequenza, campo magnetico, temperatura, potenza della radiazione — che tuttavia influenza l'ampiezza del gradino — ecc.) entro incertezze dell'ordine di 10^{-9}, dipendenti soprattutto dal livello di rumore, che produce una non verticalità dei gradini dI/dV, intorno al valore medio teorico.

2-7,3. *Trasferimento della tensione di effetto Josephson.*

La fig. 2-40 mostra lo schema di principio di un sistema di misura che confronta la tensione prodotta da una giunzione Josephson con quella di un generatore E.

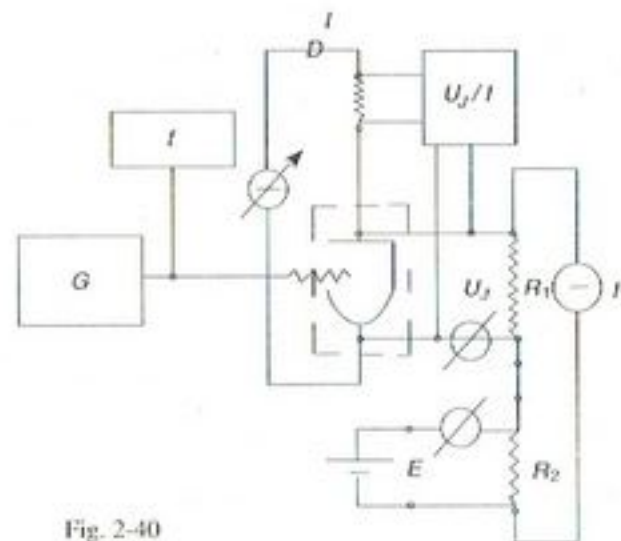



Fig. 2-40

Il sistema a microonde, opportunamente stabilizzato, è dotato di uno strumento ad alta precisione, collegato al campione di frequenza, per conoscere la frequenza f della radiazione che, attraverso una guida d'onda o altro simile dispositivo, irradia la giunzione.

Un dispositivo controlla la caratteristica I-V della giunzione, per determinare il numero n degli scalini compresi nella misura. Un potenziometro (vedi 7-5) alimentato da una corrente I_1 di alta stabilità confronta le due tensioni con le cadute sulle resistenze R_1 e R_2.

Tuttavia, essendo la costante $1/k_J$ di circa 2,2 μV/GHz, anche utilizzando scalini di ordine n elevato (da alcune decine ad alcune centinaia), la tensione $n\delta U$ ricavabile da una giunzione Josephson, sottoposta a radiazioni con frequenze di qualche decina di GHz, risulta sempre dell'ordine di alcuni mV o alcune decine di mV. Perciò, pur ricorrendo a dispositivi comprendenti più giunzioni in serie, per confrontarli con le pile o altri riferimenti con tensione dell'ordine del volt, occorre avere resistori con rapporto 1:100 o 1:1000, noto con sufficiente precisione (vedi 8-1,2).

Le difficoltà maggiori nascono però dalle differenze di temperatura esistenti fra il criostato che contiene la giunzione e l'ambiente esterno; quando ne sia difficile la compensazione, è opportuno ricorrere a tecniche particolari di misure criogeniche, eseguite cioè tutte alla temperatura della giunzione.

2-7,4. *Sistemi di misura criogenici.*

I moderni laboratori metrologici eseguono i confronti di f.e.m. Josephson usando apparecchiature che funzionino a temperature di alcuni K. Tra queste segnaliamo: i crioresistori, resistori campioni di elevata stabilità e minimo coefficiente di temperatura; i collegamenti ed i commutatori supraconduttivi, che eliminano le resistenze di collegamento fra le varie parti di un circuito; i comparatori di c.c. (vedi 5-5,2) supraconduttivi che consentono il confronto di resistenze tramite il rapporto spire di avvolgimenti ideali, privi di resistenza e dotati di schermi magnetici supraconduttori.

Una grande sensibilità si ottiene mediante i rivelatori di campo magnetico supraconduttivi detti SQUID, pure basati sull'effetto Josephson, in grado di rivelare flussi dell'ordine di 10^{-19} Wb.

2-7,5. *L'effetto Hall quantico.*

Come indicato al paragrafo 5-4,7, l'effetto Hall pone in relazione la f.e.m. trasversale che appare su un conduttore di spessore d, percorso da una corrente I e sottoposto a una induzione normale B, secondo la relazione:

$$E = R_H \frac{B}{d} I.$$

In queste condizioni si può definire una resistenza equivalente E/I, che dipende però dal valore dell'induzione e dallo spessore e caratteristiche del materiale.

È stato dimostrato che, se si crea un gas elettronico bidimensionale, quale quello che si verifica nella giunzione (dell'ordine dei nm) fra due semiconduttori portati a temperatura inferiore a 4 K, e lo si sottopone ad un campo magnetico molto intenso (dell'ordine di 10 T), tale resistenza risulta quantizzata in valori discreti sottomultipli interi di un valore R_K, indipendente dai valori ambientali. La teoria mostra che tale rapporto dovrebbe coincidere con il valore h/e^2 del rapporto fra la costante di Planck e la carica dell'elettrone al quadrato.

L'ordine del sottomultiplo può essere variato in alcuni dispositivi in funzione del campo magnetico, in altri, che sono sostanzialmente dei

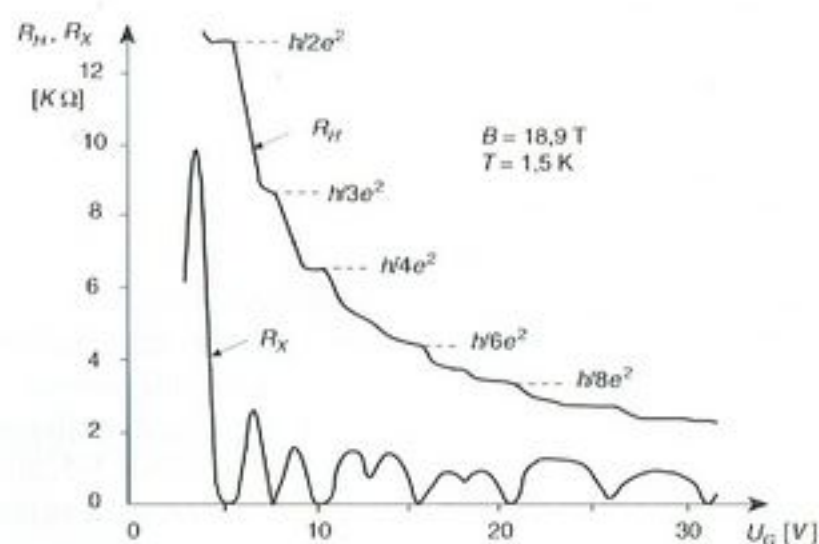



Fig. 2-41

transitori a effetto di campo, regolando la tensione di gate (fig. 2-41). In corrispondenza ai gradini della resistenza di Hall, la resistenza longitudinale del dispositivo si annulla.

2-7,6. *Trasferimento della resistenza Hall quantica.*

Per il confronto fra un resistore e un dispositivo a effetto Hall quantico, si possono impiegare vari schemi più o meno tradizionali, adattati ai particolari valori della misura. In particolare è stato utilizzato un circuito potenziometrico (fig. 2-42 e per il cui principio si veda il capitolo 7-5) o un particolare tipo di ponte (fig. 2-43), i cui piccoli squilibri vengono misurati da opportuni voltmetri numerici, mentre le resistenze R_1 e R_2, nominalmente uguali, vengono fra loro periodicamente scambiate per compensare la loro differenza. Entrambi questi metodi richiedono un resistore R che abbia valore nominale uguale a R_K (25812 ohm), resistore che deve essere costruito con vari artifici (vedi 8-1,2) per mantenere il voluto limite di incertezza.

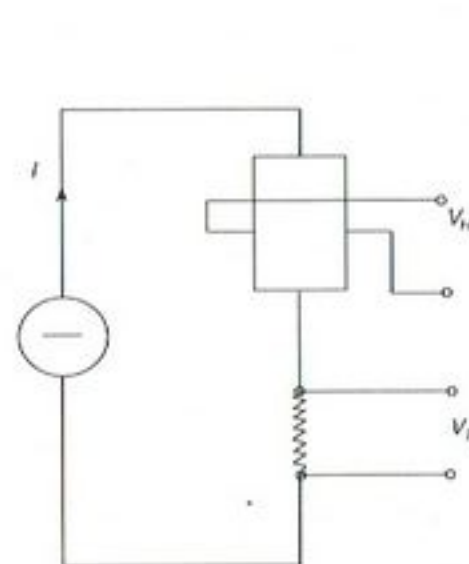
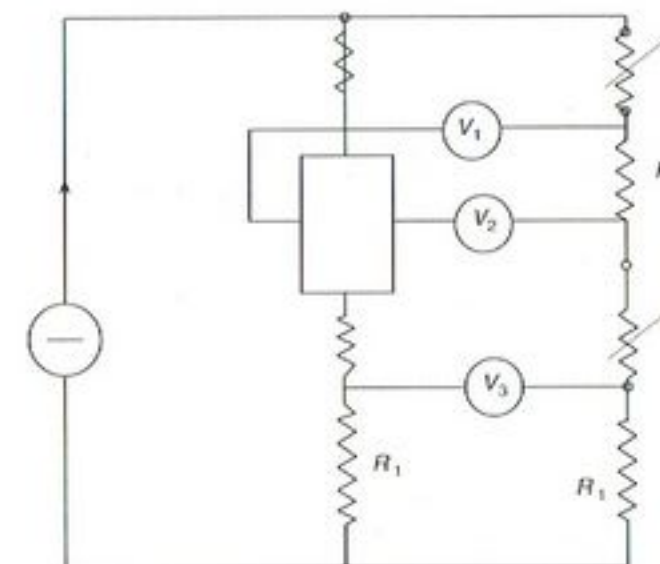



Fig. 2-42 Fig. 2-43

Il metodo che ha consentito minori incertezze è tuttavia ancora quello del comparatore di corrente continua (fig. 2-44) supraconduttivo, che consente di determinare, mediante l'annullarsi del flusso, la condizione:

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 + N_3 I_3 = 0,$$

dove la corrente I_3 è una frazione nota della I_2, ottenuta regolando le resistenze R_2 e R_3. Si regola la corrente I_1 fino a raggiungere la condizione:

$$R_K I_1 = R\, I_2$$

che annulla la d.d.p. del rivelatore S_2.

Usando rivelatori tipo SQUID, si raggiungono nei confronti incertezze dell'ordine di 10^{-9}.

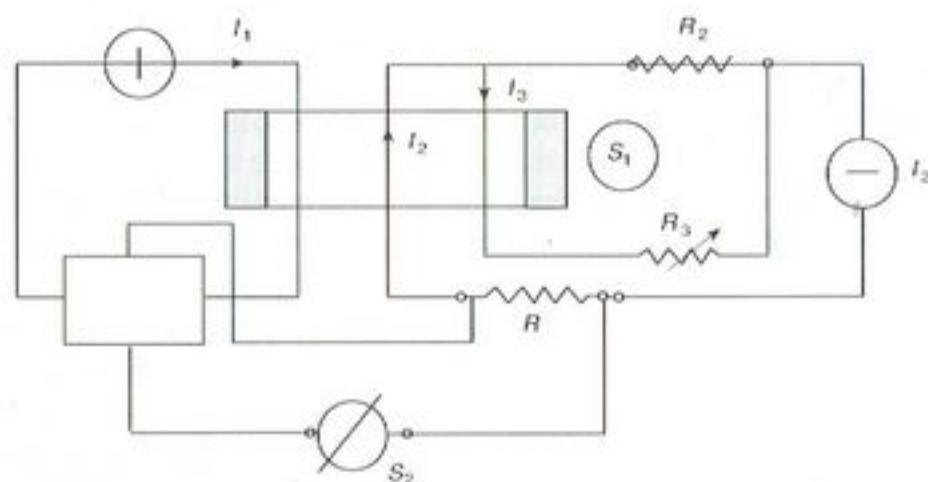



Fig. 2-44

CAPITOLO III

STRUMENTI ELETTROMECCANICI

3-1. Principi di funzionamento.

3-1,1. *Principi generali.*

Gli strumenti elettromeccanici sono apparecchi nei quali si ha la trasformazione di una grandezza elettrica x in una forza, o più spesso in una coppia $C_m(x)$: questa agisce su un organo (equipaggio) mobile, contrastata da un'azione (coppia antagonista) $C_r(\delta)$ funzione a sua volta della posizione angolare δ dell'equipaggio; in condizioni d'equilibrio, si ha la relazione:

$$C_m(x) = C_r(\delta) \qquad [3\text{-}1]$$

che stabilisce una relazione univoca fra la grandezza x da misurare e la posizione δ, posizione che viene riportata da un indice, solidale con la parte mobile, su un'opportuna scala. Si noti che la coppia motrice può anche essere, a sua volta, funzione di δ.

I diversi tipi di strumenti possono distinguersi a seconda della relazione che lega la coppia motrice con la grandezza elettrica d'ingresso, relazione che può essere di semplice proporzionalità, di tipo quadratico o più complessa e che può anche essere modificata con l'interposizione di appositi circuiti elettrici.

Quando si hanno due grandezze d'ingresso, la coppia può risultare funzione del loro prodotto o del loro quoziente.

Quando la grandezza d'ingresso sia variabile nel tempo, risulta variabile anche la coppia; la deviazione dipende allora anche dalle caratteristiche meccaniche dello strumento, e cioè dalla relazione fra coppia

motrice e posizione dell'equipaggio, dovuta alla funzione di trasferimento propria della parte mobile. Questa, come si vedrà, limita l'impiego degli strumenti elettromeccanici praticamente al solo campo delle frequenze industriali.

3-1,2. *Azioni meccaniche delle grandezze elettriche.*

Se, in un qualsiasi sistema di circuiti, percorsi da correnti, è immagazzinata l'energia magnetica W_m, la coppia agente su ogni circuito può calcolarsi, valutando la variazione di energia dW_m relativa ad una sua rotazione elementare $d\delta$, a corrente costante:

$$C_m = \frac{dW_m}{d\delta}\,; \qquad [3\text{-}2]$$

in modo analogo può valutarsi la coppia agente su un elemento di un sistema di elettrodi, a potenziali costanti, dalla variazione dell'energia elettrostatica W_e immagazzinata, conseguente alla rotazione elementare $d\delta$ dell'elemento stesso:

$$C_m = \frac{dW_e}{d\delta}\,. \qquad [3\text{-}3]$$

Le relazioni [3-2], [3-3] mostrano come, per avere una coppia motrice, sia necessaria la presenza di un'energia immagazzinata, la cui conservazione può, a sua volta, richiedere una non trascurabile dissipazione di potenza.

Dalle considerazioni precedenti deriva anche la proprietà, per gli strumenti che sono sede di energia magnetica, di avere coppie legate ai valori delle correnti che percorrono il sistema; dualmente, gli strumenti sede di energia elettrostatica hanno coppie legate alle tensioni.

Come si vedrà, in alcuni casi il calcolo delle coppie motrici può essere eseguito in modo semplice anche senza far ricorso all'energia presente; in altri casi, le azioni meccaniche non derivano dalla presenza di energia elettromagnetica (ma, per esempio, da dilatazioni termiche).

3-1,3. *Equipaggi ad azione proporzionale.*

Il prototipo degli equipaggi ad azione proporzionale è lo strumento *magnetoelettrico*: la sua parte attiva è formata da un circuito magnetico, con un magnete permanente, che crea in un traferro, opportunamente

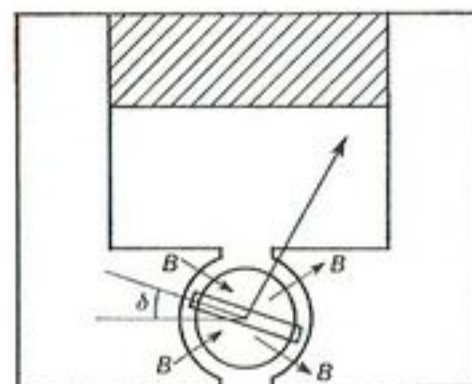



Fig. 3-1

sagomato, un'induzione radiale uniforme di valore B (fig. 3-1). Nel traferro ruota una bobina di n spire, che abbracciano la sezione S; per l'ipotesi fatta sulla distribuzione di B, il flusso concatenato con la bobina è:

$$\phi = BSn\delta$$

e perciò la coppia che sollecita la bobina, quando questa è percorsa dalla corrente I, risulta:

$$C_m = \frac{dW_m}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}(\phi \cdot I) = BSnI = kI\,. \qquad [3\text{-}4]$$

Usando materiali magnetici opportuni, l'induzione può assumere valori di 0,2÷0,6 T; il valore delle amperspire nI, pur limitato da ragioni termiche, può raggiungere 1,5 A; si possono così ottenere coppie relativamente elevate (10^{-4} N·m ossia g·cm) e buoni rapporti coppia-peso, purché la bobina sia costruita con fili sottili di materiale leggero (p. es. Al).

Il rapporto k fra coppia e corrente è sostanzialmente legato alle dimensioni geometriche dello strumento e alle caratteristiche del suo magnete; esso può essere influenzato dalla temperatura (B diminuisce di circa 0.2‰ per ogni grado di aumento della temperatura) o dalla presenza di forti campi magnetici o di materiali ad alta permeabilità, che alterino il comportamento del circuito magnetico.

La precisione raggiungibile con una buona costruzione è perciò elevata; la sua permanenza nel tempo è legata all'invecchiamento del magnete, che deve essere opportunamente stabilizzato in precedenza.

La potenza necessaria per mandare in fondo scala uno strumento di questo tipo è dell'ordine di $10^{-4}\div10^{-6}$ W.

3-1,4. *Equipaggi ad azione quadratica.*

Gli strumenti *elettrostatici* sono formati da due elettrodi piani fra loro parzialmente affacciati, la cui capacità C è funzione della posizione reciproca (fig. 3-2); quando fra essi sia applicata la d.d.p. V gli elettrodi sono sollecitati da una coppia:

$$C_m = \frac{dW_e}{d\delta} = \frac{1}{2}\,\frac{dC}{d\delta}\,V^2 = k(\delta)V^2\,; \qquad [3\text{-}5]$$

data la limitata energia in gioco, la coppia risulta sempre molto piccola; la costante strumentale dipende solo dalla forma e disposizione degli elettrodi: un'opportuna configurazione può dar luogo ad una deviazione pressoché proporzionale a $|V|$.

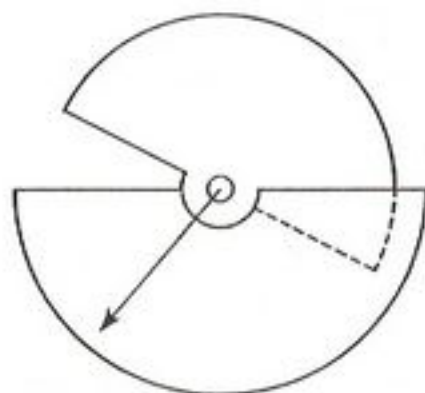
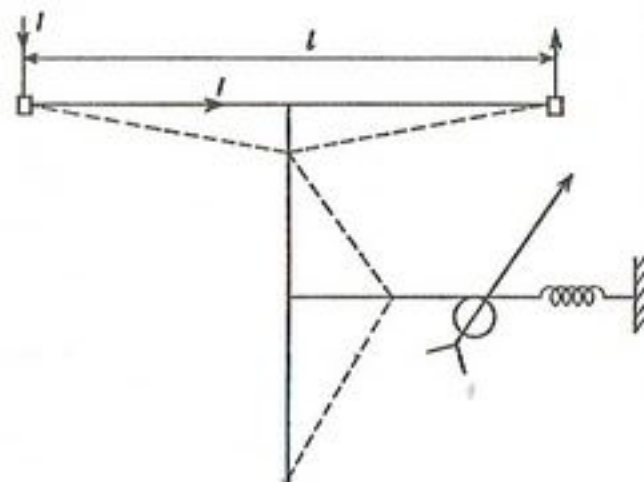



Fig. 3-2 Fig. 3-3

Lo strumento è essenzialmente un voltmetro, per tensioni raramente al di sotto delle centinaia di volt; il suo consumo è praticamente nullo se la tensione è continua, molto ridotto anche con tensioni alternate.

Altri strumenti ad azione quadratica sono basati sulla dilatazione termica di un filo, o di una spirale, percorsi dalla corrente I. Nei più comuni strumenti *termici* (fig. 3-3), un filo di lunghezza l si riscalda di θ K sull'ambiente; poiché è:

$$\Delta l = \alpha l \theta$$

$$\theta = R I^2$$

si ottiene:

$$\Delta l = k I^2 .$$

L'allungamento Δl viene convenientemente amplificato, con un dispositivo che rende la deviazione δ pressoché proporzionale ad $|I|$.

Questo strumento è insensibile ai campi magnetici esterni ma è delicato nei riguardi dei sovraccarichi in quanto, per limitare l'influenza della temperatura ambiente, θ deve essere elevata (150-200 K); tale influenza può essere ridotta rendendo variabile con la temperatura ambiente la posizione di un estremo del filo.

Strumenti come quelli sopra indicati, alimentati da grandezze periodiche, producono un'azione il cui valor medio è proporzionale al quadrato del valore efficace della grandezza applicata.

3-1,5. *Equipaggi ad azione quasi-quadratica.*

Si consideri una bobina che, percorsa dalla corrente I, crea un campo disuniforme che investe una lamina mobile, di materiale avente permeabilità μ diversa da quella dell'aria circostante. L'energia magnetica immagazzinata nel sistema varia con la posizione δ della lamina e perciò, attribuendo alla bobina un coefficiente d'autoinduzione L, la coppia agente sulla lamina si può calcolare con:

$$C_m = \frac{1}{2} \frac{dL}{d\delta} I^2 . \qquad [3\text{-}6]$$

In alcuni casi, la disuniformità di campo è creata dalla forma stessa della bobina (strumento ferromagnetico a *succhiamento* fig. 3-4); in altri, dalla presenza di una seconda lamina di materiale ferromagnetico (fig. 3-5) (strumento ferromagnetico a *repulsione*). Poiché la permeabilità μ è funzione anche di I, lo strumento non è ad azione quadratica; agendo sulla forma e dimensione delle parti ferromagnetiche e della bobina, si possono ottenere diversi tipi di relazione fra δ e $|I|$.

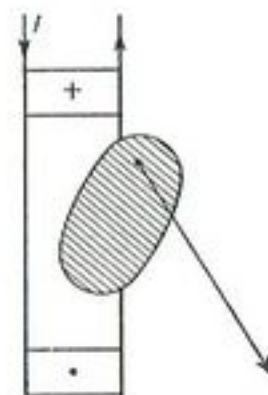



Fig. 3-4 Fig. 3-5

Questi strumenti sono semplici e robusti, anche perché le parti mobili non sono interessate da correnti; la loro precisione è affidata alla costanza delle proprietà magnetiche delle bobine con la temperatura e la frequenza, all'assenza di fenomeni d'isteresi ecc.

3-1,6. *Equipaggi a prodotto.*

Il più importante strumento a prodotto è quello *elettrodinamico*, formato da una o più bobine fisse, percorse dalla corrente i_f (fig. 3-6), nel cui interno può ruotare una seconda bobina, percorsa dalla corrente i_m:

l'energia elettromagnetica immagazzinata nel sistema, in ogni sua configurazione vale:

$$W = \frac{1}{2}L_f i_f^2 + \frac{1}{2}L_m i_m + M i_f i_m$$

essendo L_f e L_m i coefficienti di autoinduzione delle due bobine, e M quello di mutua induzione fra esse, che è funzione della loro posizione reciproca; si ha allora una coppia:

$$C_m = \frac{dM}{d\delta} i_m i_f = k i_f i_m \qquad [3\text{-}7]$$

proporzionale al prodotto delle due correnti.

Fig. 3-6

Nelle disposizioni utilizzate in pratica, il coefficiente M varia con legge pressoché lineare, al variare di δ, cosicché, nella zona di impiego, k risulta pressoché indipendente da δ.

Se i_f e i_m sono correnti sinusoidali, di pulsazione ω, con valori efficaci I_f e I_m, sfasate fra loro dall'angolo β, la coppia è pulsante, con valore medio:

$$C = k I_f I_m \cos\beta \qquad [3\text{-}8]$$

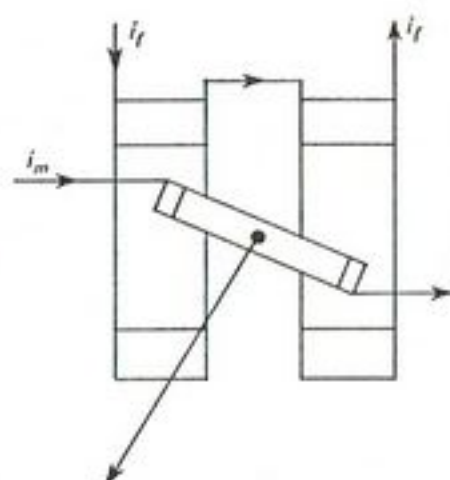
più un termine sinusoidale di pulsazione 2ω.

Per correnti periodiche non sinusoidali, la coppia media è pari alla somma delle coppie medie prodotte dalle armoniche corrispondenti di i_f ed i_m, essendo mediamente nulle le coppie fra correnti di pulsazione diversa.

Se lo strumento è in aria, si avranno coppie più piccole e consumi più elevati, rispetto agli strumenti magnetoelettrici; il fattore k dipende tuttavia solo dalla geometria delle bobine ed assicura perciò alla precisione dello strumento buona permanenza nel tempo. Esso non dipende dalla frequenza, almeno fintantoché il valore di M non sia influenzato dalle correnti indotte in parti metalliche adiacenti le bobine.

Lo strumento è invece sensibile ai campi magnetici di origine esterna, isofrequenziali con la corrente i_m. Si adottano, in alcuni casi, opportune schermature magnetiche, in altri equipaggi astatici, cioè dotati di un doppio sistema di bobine, disposte in modo da eliminare gli effetti di un campo uniforme.

Se il circuito magnetico delle bobine contiene un nucleo ferromagnetico, si possono aumentare le coppie e ridurre sia i consumi, sia l'effetto dei campi di origine esterna. Si ha però una variazione di M con la frequenza, che dipende dalla caratteristica del materiale impiegato.

Un altro importante esempio di equipaggio a prodotto è dato dallo

strumento ad *induzione* (fig. 3-7) dove il flusso φ_A prodotto dall'elettromagnete fisso A, alimentato da una corrente i_A investe delle linee della corrente i_{2B} indotta, in un disco conduttore mobile, dall'elettromagnete fisso B, dando luogo ad una coppia proporzionale al prodotto $\varphi_A i_{2B}$. Reciprocamente l'azione del flusso φ_B con la corrente i_{2A} indotta dall'elettromagnete A dà luogo ad una coppia proporzionale al prodotto $\varphi_B i_{2A}$. Per avere corrente indotta, i flussi φ_A e φ_B devono essere variabili nel tempo.

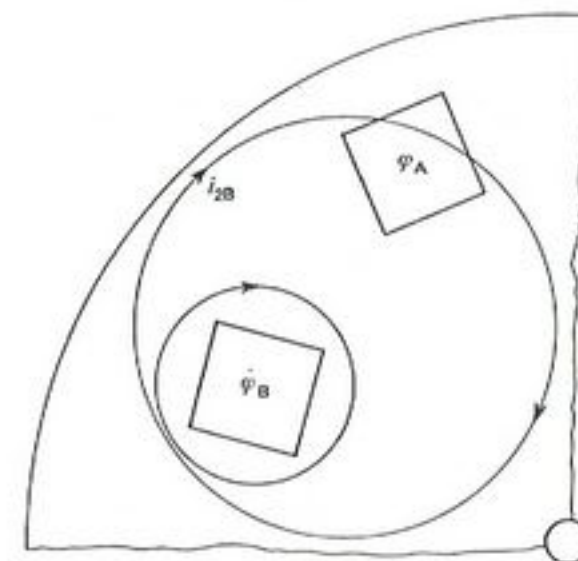



Fig. 3-7

3-1,7. *Equipaggi a quoziente.*

Si consideri uno strumento dotato di due sistemi motori, fra loro rigidamente connessi, che, alimentati dalle grandezze x_1 e x_2, diano luogo a due coppie motrici proporzionali rispettivamente ad x_1 e x_2, secondo funzioni diverse $k_1(\delta)$ e $k_2(\delta)$ della posizione δ dell'equipaggio; sia cioè:

$$C_1 = x_1 k_1(\delta)\,; \qquad C_2 = x_2 k_2(\delta)\,.$$

In assenza di altre coppie, la condizione di equilibrio:

$$C_1 + C_2 = 0$$

stabilisce un legame fra la posizione δ dell'equipaggio e la grandezza:

$$y = \frac{x_1}{x_2} = -\frac{k_2(\delta)}{k_1(\delta)} = f(\delta)\,.$$

Lo strumento è perciò in grado di misurare il rapporto di due grandezze (logometro); naturalmente, perché non vi sia un eccessivo errore dovuto agli attriti, si dovranno avere valori sufficientemente elevati di C_1 e di C_2.

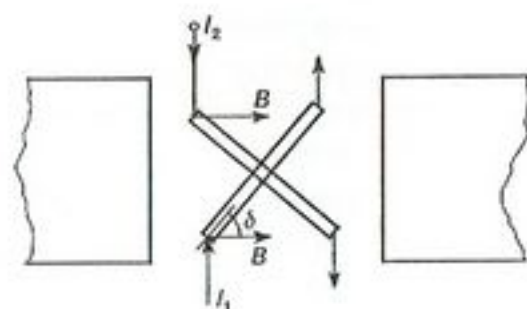



Fig. 3-8

Fig. 3-9

L'esempio più noto è dato dal logometro magnetoelettrico a campo uniforme (fig. 3-8) dove è:

$$C_1 = B \cos \delta n_1 S I_1$$
$$C_2 = B \operatorname{sen} \delta n_2 S I_2$$

e quindi:

$$y = \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} \operatorname{tg} \delta \, .$$

Scale più uniformi e campi più intensi si ottengono nelle costruzioni del tipo di fig. 3-9 dove il magnete, interno alle bobine, crea una distribuzione disuniforme di induzione al traferro.

3-2. **Criteri costruttivi.**

3-2,1. *Classe di precisione.*

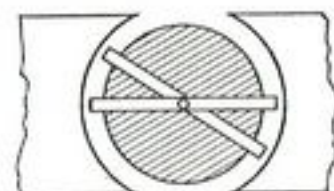
Per quanto riguarda le prestazioni, le condizioni di funzionamento, ecc. gli strumenti elettromeccanici sono generalmente costruiti in conformità alle regole stabilite dagli Enti di normalizzazione nazionali o internazionali (vedi 2-2,5). In particolare, queste regole fissano i requisiti per stabilire l'appartenenza di uno strumento ad una determinata *classe di precisione*.

Le classi più importanti sono le seguenti:

classe 0,05 e 0,1 per strumenti «campioni» da laboratorio;

classi 0,2 e 0,5 per strumenti da laboratorio, per misure di controllo;

classi 1-1,5 - 2,5 - 5 ecc. per strumenti industriali da quadro.

In via generale, il valore dell'indice caratteristico di una classe rappresenta l'ampiezza della fascia di incertezza (vedi 1-6,3), espressa in percento del fondo scala, valida per ogni punto della scala stessa, in condizioni prefissate. È da notare che talvolta il sovrapporsi di sfavorevoli condizioni limiti di funzionamento può portare ad errori eccedenti tale limite.

Strumenti di diversa classe hanno, ovviamente, diversi requisiti dal punto di vista costruttivo, dovendo tenere in diverso conto le varie grandezze d'influenza.

3-2,2. *Coppia d'attrito.*

La [3-1] è valida in assenza di coppie dovute all'attrito; queste infatti introducono nella condizione di equilibrio un termine aggiuntivo C_a che può risultare sia positivo che negativo, essendo sempre di segno tale da opporsi al moto.

La posizione di equilibrio è perciò determinata dalla relazione:

$$C_m = C_r \pm C_a \qquad [3\text{-}9]$$

entro una fascia d'incertezza, la cui ampiezza dipende dal valore della coppia d'attrito C_a rispetto alla coppia resistente o, il che è praticamente lo stesso, rispetto a quella motrice.

Per caratterizzare uno strumento e definirne in modo sintetico la maggiore o minor qualità, si può far riferimento al valore del rapporto fra la coppia motrice e quella d'attrito; poiché questa dipende dal peso p dell'equipaggio mobile, si può in prima approssimazione impiegare come indice di qualità il valore del rapporto C_m/p. Come ordine di grandezza, uno strumento di classe c ha un rapporto fra la coppia motrice di fondo scala (in g·cm) e il peso della parte mobile (in g) pari a $0{,}1/c$.

Nella pratica, si usano indici un poco diversi che tengono conto della più complessa relazione esistente fra peso e coppia d'attrito; il più diffuso è il fattore di qualità (di Keinath):

$$\Gamma = 10 \frac{C_m}{p^{1,5}}$$

che esprimendo C_m e p nelle unità sopraricordate, raggiunge per i migliori strumenti valori intorno all'unità.

Il miglioramento dell'indice di qualità di uno strumento si può ottenere, generalmente, solo con l'impiego di materiali di caratteristiche pregiate, con lavorazioni più accurate, ovvero con un aumento del consumo proprio dello strumento.

3-2,3. *Sospensioni.*

Il valore della coppia d'attrito dipende in massima parte dal tipo delle sospensioni e dalla loro esecuzione. Gli strumenti più comuni hanno l'equipaggio mobile montato su *perni* cilindrici in alluminio, con punte

riportate in acciaio indurito, a forma conica, levigate a sfera nelle loro parti terminali (fig. 3-10).

Questi perni appoggiano su supporti in pietra dura (zaffiri artificiali) il cui fondo, accuratamente levigato, ha forma emisferica con raggio R due o tre volte maggiore di quello r della punta.

La superficie d'appoggio risulta un cerchio di raggio a, il cui valore, funzione dei raggi r e R, dei moduli di elasticità dei materiali costituenti il perno ed il supporto, oltre che del carico F applicato ad essi, risulta dell'ordine di qualche micron.

Le dimensioni della superficie d'appoggio devono rappresentare un compromesso fra l'esigenza di ridurre le coppie d'attrito, che risultano proporzionali al raggio a, e di mantenere in limiti ammissibili le sollecitazioni dei materiali, che sono inversamente proporzionali ad a^2.

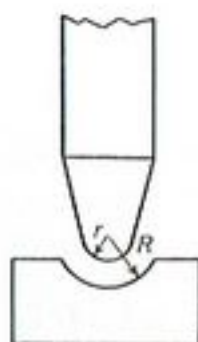



Fig. 3-10

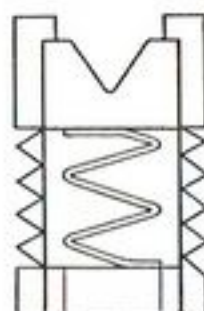



Fig. 3-11

Il buono stato delle sospensioni si controlla battendo leggermente sullo strumento, per verificare che esso non modifichi la sua posizione di equilibrio. Oltre all'aumento della coppia d'attrito, il consumo di un supporto provoca un'incertezza nella posizione dell'asse del perno, che dà luogo ad un errore di lettura, detto errore di traboccamento.

Il pericolo di danneggiamenti dovuti ad urti e vibrazioni può essere ridotto adottando supporti ammortizzati mediante molle (fig. 3-11).

La *sospensione a nastri tesi* è realizzata con due nastri metallici (in platino-nichel o rame-berillio), lunghi circa 10 mm, sottoposti, a mezzo di molle, ad uno sforzo di trazione che assicura la posizione dell'organo mobile (fig. 3-12). I nastri hanno inoltre il compito di fornire la coppia antagonista e spesso anche di addurre corrente alla parte mobile.

Non essendovi parti in moto relativo, la coppia d'attrito risulta molto piccola (si riduce ai soli attriti molecolari dei nastri e delle loro giunzioni); con queste sospensioni si possono perciò impiegare, a parità di altre condizioni, coppie motrici notevolmente minori (da 100 a 1000 volte più

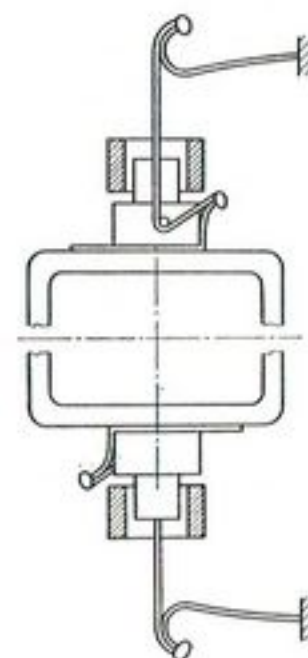
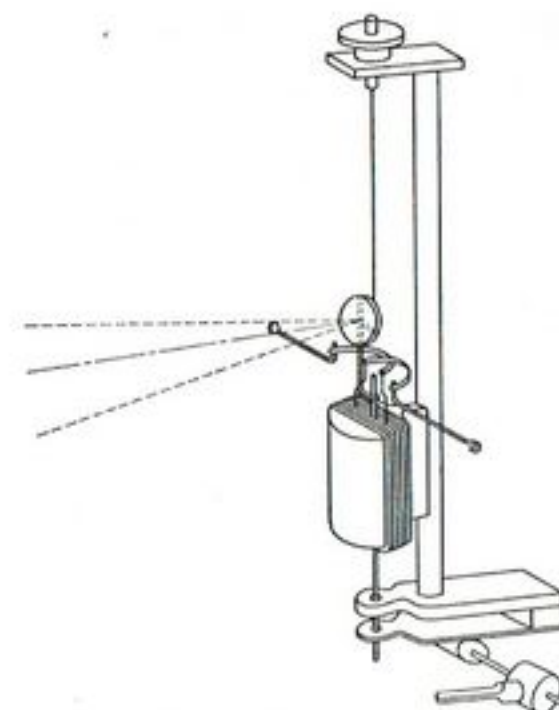



Fig. 3-12 Fig. 3-13

piccole) di quelle di uno strumento a perni. L'equipaggio mobile risulta elastico e capace di sopportare urti e vibrazioni, purché le sue escursioni trasversali siano limitate da appositi arresti.

La sospensione a nastri tesi richiede cure costruttive e scelte di materiali tali da renderla, allo stato attuale, notevolmente più costosa della sospensione a perni; essa è però oggetto di continui perfezionamenti in piccoli, ma importanti dettagli, e va estendendosi, dagli apparecchi di maggior pregio, cui era riservata fino a pochi anni or sono, anche a strumenti di più largo impiego.

La *sospensione a filo* (fig. 3-13) è realizzata mediante un sottile filo di quarzo o di metallo che sostiene la parte mobile e le fornisce contemporaneamente la coppia antagonista; questo tipo di sospensione, che consente coppie ancora minori che non quella a nastri tesi, risulta però delicato ed ingombrante. Per assicurare la corretta posizione della parte mobile, occorre che lo strumento sia messo in una ben definita posizione, mediante bolla di livello; l'equipaggio, assai sensibile agli urti, deve essere meccanicamente bloccato durante ogni trasporto.

Strumenti particolari, con pesi dell'equipaggio mobile superiori ai 10 grammi, hanno sospensioni speciali a perni cilindrici orizzontali o verticali in parte scaricati da sospensioni magnetiche.

Gli strumenti a rotazione continua (come gli integratori) sostituiscono spesso la punta del perno inferiore con una sfera di rotolamento.

3-2,4. *Molle.*

La coppia resistente è generalmente fornita attraverso un sistema di molle, che hanno spesso anche il compito di addurre corrente all'organo mobile; più raramente si sfrutta l'azione della gravità.

Negli strumenti con sospensioni a perni, le molle sono costituite da spirali piatte di bronzo fosforoso, fissate con un estremo al telaio e con l'altro al perno dell'equipaggio mobile; per una molla di lunghezza l, altezza b e spessore s, la coppia necessaria ad una rotazione δ risulta:

$$C_r = \frac{E}{12}\frac{bs^3}{l}\delta\,;$$

la sollecitazione massima nel materiale, che lavora a flessione, vale in corrispondenza:

$$\sigma = \frac{6C_r}{bs^2}\,;$$

per mantenere tale sollecitazione al di sotto del limite σ_M di elasticità, si ricava la relazione:

$$\frac{l}{s} > \frac{E}{2\sigma_M}\delta_M$$

che impone di adottare molle lunghe ($l = 100 \div 200$ mm) e di piccolo spessore (dei centesimi di mm); si richiede infatti, con $\sigma_M < 3$ kg/mm^2 = $30 \cdot 10^6$ N/m^2 $E = 10^{11}$ N/m^2 e $\delta_M = \pi/2$, un rapporto l/s maggiore di 3000.

L'altezza b va invece tenuta sufficientemente elevata (da 10 a 30 volte s) per avere una sezione sufficiente al passaggio della corrente.

La coppia resistente fornita dalle molle diminuisce di circa 0,4‰ per ogni grado di aumento della loro temperatura; ciò comporta anche un limite alla corrente che le può percorrere, limite che risulta di alcune decine, al massimo un centinaio di milliampere.

Le variazioni di temperatura fanno anche variare la lunghezza di una molla; ciò si traduce in uno spostamento dello zero che può essere compensato, dall'esterno, mediante la rotazione dell'estremo collegato al telaio; più spesso le molle sono due, avvolte in senso contrario, in modo sia di compensare l'azione della temperatura ambiente e del loro riscaldamento, sia di facilitare l'adduzione di corrente.

Quando cessi la sollecitazione, dopo una permanenza sufficientemente lunga ai valori di fondo scala, la molla deve riportare l'indice a zero, senza apprezzabili effetti di isteresi elastica né di variazione termica.

La coppia prodotta da una sospensione a filo, o a nastri tesi, può valutarsi in modo analogo; per il materiale, che lavora a torsione, intervengono

il modulo di elasticità tangenziale G, che è pari a circa $0{,}4E$ e il massimo sforzo di taglio τ_M; per un filo circolare di diametro d, si ha:

$$C_r = \frac{\pi d^4}{32l}G\delta\,;$$

$$\tau = \frac{16}{\pi}\frac{C_r}{d^3}\,; \qquad \frac{l}{d} > \frac{G}{2\tau_M}\delta_M\,.$$

Per un filo di sezione rettangolare di lati b ed a (con $b \gg a$) si ha:

$$C_r = \frac{ba^3}{3l}G\delta\left(l - 0{,}6\frac{a}{b}\right);$$

più complesse relazioni legano la dimensione maggiore b alla sollecitazione massima, in funzione del rapporto a/b. A parità di coppia, una forma rettangolare presenta una sezione maggiore di quella circolare.

Le stesse relazioni valgono per nastri tesi: per essi è però da considerare in modo prevalente lo sforzo di trazione necessario a tener l'organo mobile nella sua posizione, sforzo che può risultare dell'ordine di qualche centinaio di grammi e che impone perciò notevoli sollecitazioni meccaniche al materiale; spesso i punti più deboli, ai fini delle deformazioni anelastiche o dell'isteresi, sono gli attacchi dei nastri ai punti fissi ed alla parte mobile; essi vanno perciò studiati e realizzati con particolari cure.

Si noti che nelle molle a nastro, come del resto in quelle a spirale, le coppie, e quindi le sollecitazioni, sono proporzionali alla rotazione per unità di lunghezza δ/l. Ciò induce ad utilizzarle per angoli di rotazione piccoli, dell'ordine di $10 \div 15°$ per cm di lunghezza, con adeguata disposizione dell'indice.

3-2,5. *Scale.*

La scala di uno strumento è composta da un insieme di tratti numerati, sul quale può essere letta la posizione di un indice di riferimento. Tratti e numeri sono tracciati, abitualmente in nero su fondo bianco, su un tratto rettilineo o ad arco di cerchio la cui lunghezza può essere compresa fra alcune decine e qualche centinaio di mm.

I requisiti di una scala sono diversi, a seconda del differente uso dello strumento; negli apparecchi industriali, da quadro, la lettura deve poter essere eseguita rapidamente, da una certa distanza, mentre ragioni di costo e di spazio impongono scale di lunghezza limitata; per l'errore di lettura possono però facilmente essere tollerati valori intorno al $\pm 1\%$.

Negli strumenti di controllo e di precisione, si tende invece a ridurre l'incertezza di lettura a valori dell'ordine di un decimo dell'indice di classe,

a spese di maggiori dimensioni degli strumenti e di maggiore attenzione richiesta all'operatore.

Ricerche sperimentali hanno permesso di constatare che la miglior risoluzione di cui è capace un normale operatore, in condizioni medie di pratica e di illuminamento, può essere stimata equivalente ad un arco di circa 2 minuti. La lunghezza L della scala risulta perciò proporzionale alla massima distanza di lettura e inversamente proporzionale all'errore ammissibile.

Un operatore « medio » ottiene i migliori risultati apprezzando sulla scala frazioni dell'intervallo minimo dell'ordine di 1/5. Questa frazione rappresenta perciò l'ultima cifra significativa leggibile; per un errore dell'1% è perciò, ad es., sufficiente suddividere l'intera scala in 20 intervalli.

Per facilitare la lettura, le divisioni sono di almeno due altezze, più alte quelle corrispondenti a numeri interi, più piccole, in genere metà, quelle intermedie.

Gli errori grossolani di lettura possono essere evitati dalla semplificazione della numerazione; si preferiscono per il fondo scala i valori della serie: 10 - 15 - 20 - 30 - 40 - 60 - 80 e loro multipli o sottomultipli per potenze di 10, mentre è consigliata la numerazione per gradini di 2, 5, 10 sia per gli intervalli maggiori che per quelli minori.

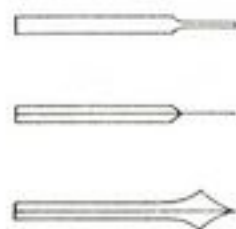
L'andamento della scala può — a seconda del tipo di strumento — essere lineare, quadratico, contratto (verso l'inizio, verso il fondo scala, verso entrambi) a zero centrale, a zero soppresso, ecc.

Un'appropriata lunghezza di scala si può ottenere, con dimensioni d'ingombro ridotte, adottando, invece delle scale usuali, con arco di circa 90°, scale rettilinee o circolari fino a 270°.

3-2,6. *Indici.*

Anche la forma e le dimensioni dell'indice sono in relazione con il massimo errore di lettura ammissibile e quindi con la classe di precisione dello strumento. Tanto più la punta dell'indice è sottile e tanto meglio definita è la lettura: essa risulta però più faticosa, specie ad una certa distanza. Si hanno perciò, per strumenti da quadro, punte a forma di lancia, per strumenti da controllo punte a forma di lama o a filo teso (fig. 3-14).

Fig. 3-14

Quando il piano dell'indice non coincide con quello della scala, si presenta un'incertezza nella lettura (parallasse); per evitarla ci si deve porre sulla verticale dell'indice stesso, disponendo uno specchio nelle vicinanze della scala e controllando che l'indice si sovrapponga alla sua immagine.

L'indice è generalmente di alluminio con lunghezza fino a qualche decina di cm; per il corretto moto dell'equipaggio esso deve essere contrappesato rispetto all'asse di rotazione, in modo che l'indicazione non cambi (p. es. di più del 3%) mutando la posizione dello strumento.

Delle leggere molle arrestano il moto dell'indice agli estremi della scala.

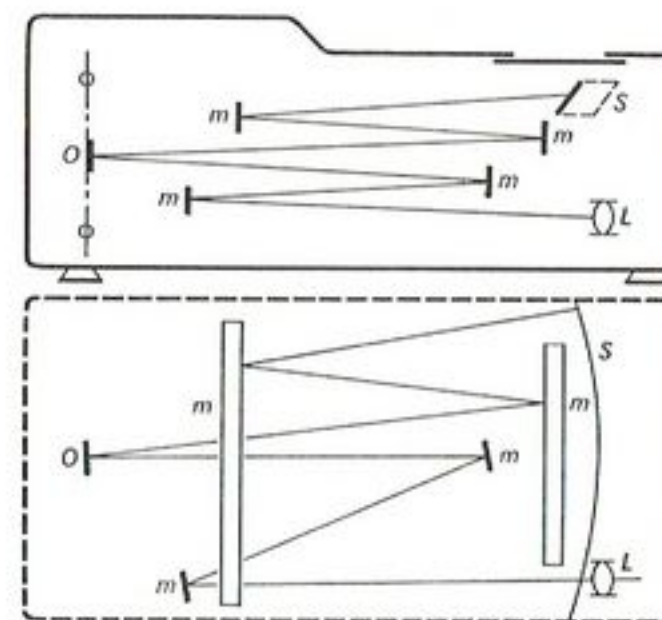



Fig. 3-15
Strumento a raggio luminoso: L = lampada; O = specchio dell'organo mobile; S = scala graduata; m = specchi fissi.

L'indice metallico può essere, in molti casi, sostituito da un raggio luminoso che, riflesso da uno specchietto solidale con l'organo mobile, fornisce su una scala trasparente un'immagine, provvista di un segno di riferimento. L'indice luminoso ha il vantaggio della leggerezza, della lunghezza (il raggio luminoso può compiere, per mezzo di specchi, percorsi dell'ordine del metro in custodie di strumenti normali (fig. 3-15)) e dell'assenza di

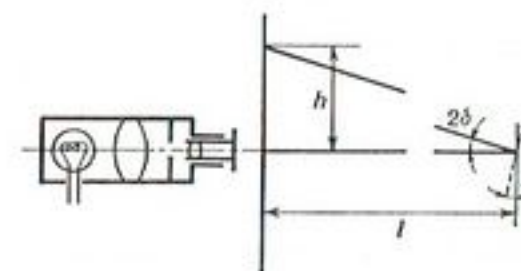



Fig. 3-16

parallasse. Lo strumento richiede un dispositivo di alimentazione della sorgente luminosa; questo sistema è generalmente adottato in unione con sospensioni a nastri o a filo. In alcuni casi la scala può anche essere separata dallo strumento.

Si noti che alla rotazione dell'angolo δ dello strumento corrisponde (fig. 3-16) una deviazione:

$$h = l \tan 2\delta ;$$

per una deviazione di 100 mm è sufficiente quindi un angolo di 0,05 radianti (1,5°) quando la scala è posta una distanza l pari ad un metro.

3-2,7. *Custodie.*

Anche dal punto di vista delle custodie si può fare una distinzione fra strumenti industriali da quadro, e strumenti di precisione, da laboratorio. Questi sono infatti quasi sempre portatili, dotati di un loro contenitore in legno o in materia plastica stampata, provvisto di morsetti facilmente accessibili, spesso commutabili per più portate.

Gli strumenti da quadro hanno pure una custodia protettiva, ma risultano legati, per quanto riguarda la loro posizione di funzionamento, l'accessibilità dei morsetti ecc., al loro montaggio su una superficie in genere verticale.

Dal punto di vista della loro precisione, è talvolta importante precisare se essa viene alterata dal montaggio su pannello di materiale magnetico o non magnetico.

Quanto alle forme, rettangolare, circolare, da incasso, sporgente, ecc., ai motivi tecnici si sovrappongono spesso considerazioni di estetica.

In ogni caso, le custodie devono assicurare una protezione degli organi interni contro la polvere e l'umidità atmosferica e consentire contemporaneamente lo sviluppo del calore prodotto; spesso gli organi addizionali, che danno luogo alla maggior potenza dissipata, sono separati dal resto dello strumento, pur essendo interni allo stesso contenitore. Per potenze maggiori di qualche watt, essi sono spesso totalmente esterni.

Ogni strumento di un certo pregio è dotato di sigillo di chiusura, che costituisce una garanzia contro le manomissioni.

3-2,8. *Contrassegni.*

Oltre alla indispensabile numerazione della scala, ogni strumento porta un certo numero d'indicazioni e di simboli, che ne individuano le caratteristiche e le prestazioni.

Le indicazioni più frequenti, spesso previste dalle norme, sono le seguenti:

– numero di matricola dello strumento; esso serve a riconoscere l'apparecchio, i suoi eventuali accessori, la sua tabella di taratura, ecc.;

– nome del costruttore e marchio, che indica secondo quali norme è stato garantito lo strumento;

– grandezza misurata ed eventuale costante di lettura;

– indice della classe di precisione;

– tipo di strumento, indicato da un segno grafico convenzionale (alcuni esempi sono riportati in Tabella 3-1);

– tipo di circuito a cui può essere connesso (in corrente continua, alternata monofase, trifase, ecc., con eventuale campo di frequenze d'impiego);

– posizione prevista per il quadrante (verticale, orizzontale, inclinato);

– tensione di prova, indicata, in kV, da un numero in una stella; in assenza di numero, la tensione di prova fra i vari conduttori isolati è dell'ordine di 500 V.

Oltre a queste indicazioni, sugli strumenti portatili o a portate multiple, i singoli morsetti e le varie posizioni dei commutatori hanno le opportune indicazioni.

I morsetti amperometrici, destinati cioè alla connessione in serie su un circuito, si distinguono in genere per la loro maggior sezione. Quelli voltmetrici, destinati cioè alle connessioni fra punti a potenziale diverso, si caratterizzano invece per il loro isolamento contro i contatti accidentali.

3-3. **Il moto degli strumenti.**

3-3,1. *Funzione di trasferimento dell'equipaggio mobile.*

Si consideri l'equipaggio mobile di uno strumento, libero di ruotare intorno al suo asse; la posizione angolare δ che esso assume, rispetto alla posizione di riposo, è data, istante per istante, dall'equilibrio delle seguenti coppie, agenti su di esso:

– una coppia motrice C_m, funzione del tempo, in quanto legata alla generica grandezza x da misurare;

– una coppia elastica di richiamo, che si supporrà proporzionale all'angolo δ di rotazione, secondo un coefficiente M;

A) **Tipi di strumenti di misura** (*)	
A magnete fisso e bobina mobile	
A magnete fisso e bobina mobile come misuratore di rapporto	
A ferro mobile	
Elettrodinamico	
Elettrodinamico come misuratore di rapporto	
Elettrodinamico con ferro	
A induzione	
Termico, a filo caldo	
Termico, a lamina bimetallica	
Elettrostatico	
A lamelle vibranti	
Termocoppia	
Strumento a bobina mobile a termocoppia	

Tab. 3-1

(*) I simboli qui elencati, quando vengano racchiusi in un cerchio indicano che gli strumenti sono schermati contro i campi magnetici esterni, oppure resi insensibili ad essi mediante opportuna disposizione astatica.

Strumento a bobina mobile con raddrizzatore	
Apparecchiatura elettronica nel circuito di misura	
Apparecchiatura elettronica nei circuiti ausiliari	
B) **Circuiti nei quali lo strumento può essere inserito**	
A corrente continua	—
A corrente alternata	~
C) **Simboli diversi**	
Strumento da usare col quadrante verticale	⊥
Strumento da usare col quadrante orizzontale	
Strumento da usare col quadrante inclinato	∠
Dispositivo di regolazione dello zero (in corrispondenza del comando del dispositivo di regolazione)	
Tensione di prova: 500 V	☆
Tensione di prova: > 500 V, p. es. 2 kV	

– una coppia di attrito viscoso, che si supporrà proporzionale alla velocità di rotazione dell'equipaggio, secondo un coefficiente N; si trascurano invece le altre coppie d'attrito;

– una coppia d'inerzia, legata alla presenza del momento di inerzia J dell'equipaggio mobile, rispetto al suo asse di rotazione.

La posizione istantanea dell'equipaggio può quindi essere ricavata dalla soluzione dell'equazione:

$$J\frac{d^2\delta}{dt^2} + N\frac{d\delta}{dt} + M\delta = C_m$$

che esprime appunto il bilancio delle diverse coppie.

Assumendo la coppia motrice come grandezza d'entrata e l'angolo di rotazione come grandezza d'uscita, lo strumento può essere rappresentato da un sistema con funzione di trasferimento:

$$G(p) = \frac{\delta(p)}{C_m(p)} = \frac{1}{p^2J + Np + M}$$

che risulta del secondo ordine con:

$$\frac{1}{M} = G_0 = \text{fattore di conversione in regime continuo;}$$

$$\sqrt{\frac{M}{J}} = \mu = \text{pulsazione caratteristica;}$$

$$\frac{N}{2\sqrt{MJ}} = z = \text{fattore di smorzamento.}$$

Le risposte di un tale sistema alle varie forme di segnale d'ingresso sono state già illustrate in 1-5,4. In particolare risulta evidente la funzione del termine dovuto allo smorzamento viscoso, che permette di evitare eccessive oscillazioni nella risposta, senza influire sulle condizioni di regime continuo.

3-3,2. *Requisiti dinamici di uno strumento indicatore.*

Uno strumento indicatore deve assumere rapidamente la sua posizione di regime, senza oscillazioni di ampiezza eccessiva intorno ad essa, anche quando la coppia motrice sia applicata bruscamente, al limite con l'andamento di una funzione a gradino.

Per un sistema del secondo ordine esistono, come si è visto in 1-5,4, delle condizioni di smorzamento che consentono di raggiungere la situazione di regime senza oscillazioni o in un tempo minimo. Le norme tuttavia ammettono sia che l'indice compia una sovraelongazione, pur limitandola al 30% del valore di regime, sia che si avvicini a questo valore con un moto oscillatorio, la cui ampiezza sia ridotta a non più di 0,75% dopo 4 secondi (fig. 3-17). Ciò consente di vedere se l'indice è libero di muoversi o se risulta frenato da qualche causa accidentale (attrito di strisciamento).

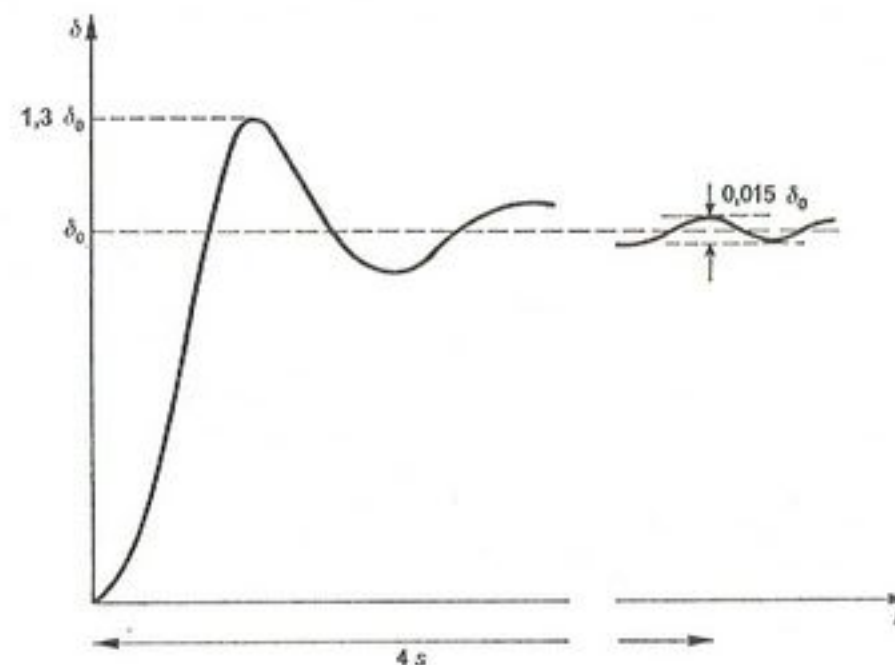



Fig. 3-17

Esaminando la caratteristica di un sistema del secondo ordine, si ricava che, per limitare la prima sovraelongazione al 30%, occorre un fattore di smorzamento z non inferiore a 0,38; d'altra parte, un sistema con tale smorzamento riduce la sua ampiezza di oscillazione allo 0,75% in poco più di due periodi. Da ciò si ricava il valore minimo per la pulsazione caratteristica che risulta dell'ordine di 3,5 rad/s.

Un limite massimo alla pulsazione μ per l'equipaggio mobile di uno strumento può invece essere imposto dall'esigenza di misurare il *valore medio* di una coppia periodica di pulsazione Ω. In questo caso è infatti necessario che le risposte non contengano le componenti alternative che, pur avendo valor medio nullo, rendono periodica anche l'elongazione, impedendo la lettura del valore medio; ciò comporta la condizione:

$$g(\omega) \ll 1 \qquad \text{per} \qquad \omega > \Omega\,;$$

ad esempio, fissando:

$$g(\omega) < 10^{-3}$$

si ottiene:

$$\Omega > 30\mu \, .$$

Quanto più piccola deve essere la $g(\Omega)$, tanto più piccola deve risultare la pulsazione μ rispetto ad Ω; ciò comporta talvolta la difficoltà di realizzare strumenti indicatori di precisione con le condizioni di smorzamento sopra indicate.

3-3,3. *Smorzatori a fluido.*

L'opportuno valore dello smorzamento viene realizzato mediante smorzatori a fluido (generalmente ad aria) od elettromagnetici.

Nello smorzatore ad aria, una ventola o pistone (fig. 3-18) si muove, con piccolo gioco, in un condotto chiuso, in modo da forzare l'aria ad uscire nello spazio fra il pistone e le pareti del contenitore, dissipandovi energia per attrito. La differenza di pressione che può in tal modo provocarsi con giochi dell'ordine del millimetro fra pistone e pareti, risulta dell'ordine di 0,03÷0,04 N/m² per rad/s; il coefficiente N può quindi assumere valori di qualche decimo di grammo centimetro per rad/s ed è fortemente influenzato dal grado di lavorazione della varie parti.

Fig. 3-18

Gli smorzatori a liquido (acqua o più spesso olio di glicerina) possono fornire coppie di smorzamento più elevate di quelle degli smorzatori ad aria. Essi hanno tuttavia lo svantaggio di una maggiore inerzia, data la massa del liquido che partecipa al moto, e soprattutto di una marcata variabilità del coefficiente di smorzamento con la temperatura. La coppia prodotta da uno smorzatore a fluido risulta solo approssimativamente proporzionale alla velocità di rotazione; tale approssimazione è però più che sufficiente per gli usi pratici, dove la messa a punto viene eseguita sperimentalmente, sulla base dei requisiti indicati in 3-3,2.

In parecchi strumenti moderni lo stesso organo che provoca la coppia motrice (p. es. una bobina mobile) assume anche la funzione di smorzatore; esso viene a questo scopo racchiuso in una camera, in genere di resina stampata.

3-3,4. *Smorzatori elettromagnetici.*

Lo smorzamento elettromagnetico può assumere due differenti forme, a seconda che l'organo mobile sia investito, o meno, da un forte campo magnetico esterno.

Nel primo caso, lo smorzamento può essere assicurato da una bobina che può anche esistere, nello strumento, per altre funzioni, come ad esempio per fornire la coppia motrice. Nel suo moto nel campo magnetico, si induce in essa una f.e.m., proporzionale alla velocità di rotazione; la corrente i che ne risulta ha segno tale da opporsi al moto che l'ha provocata.

Per una bobina rettangolare di sezione S e con n spire chiuse sulla resistenza R, in un campo d'induzione B, radiale ed uniforme, si ha:

$$i = \frac{BSn}{R}\frac{d\delta}{dt}$$

$$N = \frac{BnSi}{\frac{d\delta}{dt}} = \frac{1}{R}(BSn)^2 = \frac{k^2}{R} \qquad [3\text{-}10]$$

essendo k la costante di proporzionalità fra coppia e corrente (vedi 3-1,3).

Lo smorzamento può risultare molto efficace se la resistenza R assume valori convenientemente bassi, condizione non sempre compatibile con gli altri requisiti a cui deve soddisfare la bobina mobile di uno strumento. Talvolta lo smorzamento è fornito dal telaio di supporto della bobina vera e propria, realizzato in alluminio e chiuso con un filo di resistenza opportuna.

Quando non esiste un campo magnetico proprio, si ricorre a smorzatori con magneti permanenti; la parte mobile acquista allora la forma di una lamina o disco conduttore (in genere di alluminio) che si muove fra le espansioni polari del magnete (fig. 3-19).

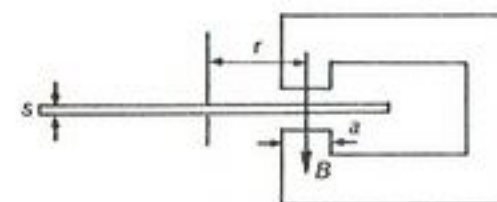



Fig. 3-19

Con lo stesso procedimento usato più sopra si può calcolare la forza elettromotrice:

$$e = arB \cdot \frac{d\delta}{dt}$$

mentre la resistenza del percorso delle linee di corrente risulta direttamente proporzionale alla resistività ϱ del materiale e inversamente al suo spessore s.

Lo smorzamento N può assumere valori di un'ordine di grandezza maggiori di quelli ottenibili con gli smorzatori a fluido; esso cresce al crescere del raggio r fino ad un massimo che si verifica quando il magnete è disposto a circa l'80% del raggio del disco.

Un'analoga azione frenante si ha se l'induzione è fornita da un elettromagnete in c.a.; in tal caso si sovrappongono sul disco le correnti indotte trasformatoricamente — che non danno però luogo a coppie — e quelle indotte per effetto del movimento; l'azione frenante risulta proporzionale al quadrato del valore efficace dell'induzione, sempreché sia trascurabile la reattanza del percorso delle linee di corrente.

3-3,5. *Integratori.*

Un sistema meccanico, del tipo descritto nei precedenti paragrafi, può divenire un integratore quando manchi della coppia elastica di richiamo ($M = 0$). In tal caso si ha infatti:

$$\bar{\delta}(p) = \frac{1}{p(Jp + N)} \bar{C}_m(p)$$

e se si assume come segnale d'entrata la grandezza:

$$x(t) = \int_0^t C_m \, dt$$

per cui è:

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{C}_m(p)}{p}$$

risulta:

$$\bar{\delta}(p) = \frac{1}{N} \frac{1}{p\frac{J}{N} + 1} \bar{x}(p) . \qquad [3\text{-}11]$$

Nei riguardi della grandezza integrale x, il sistema si riduce pertanto ad una funzione di trasferimento del primo ordine con costante di tempo:

$$T = \frac{J}{N}$$

e fattore di conversione $1/N$, legato solo al coefficiente della coppia di attrito viscoso; per assicurare che questa sia realmente proporzionale alla

velocità di movimento, lo smorzamento è, in tal caso, eseguito quasi esclusivamente per via elettromagnetica.

Un simile sistema è in grado — come già si è visto — di seguire fedelmente il valore della grandezza integrale x, quando le sue variazioni avvengono in tempi grandi rispetto a T. Gli integratori pongono problemi particolari per la lettura dell'angolo δ, quando esso debba consistere in più giri dell'organo mobile. Essa può venire attuata mediante un numeratore ad ingranaggi capace di indicare il numero di giri interi, ed eventuali frazioni di giro, compiuti dal disco.

3-3,6. *Strumenti selettivi.*

La caratteristica del secondo ordine di un equipaggio mobile consente la realizzazione di strumenti selettivi, nel campo delle frequenze fino a qualche centinaio di periodi, senza l'interposizione di filtri elettrici. Ciò è particolarmente comodo per la realizzazione di rivelatori di zero per correnti alternate.

Come si è visto in 1-5,4, ciò si ottiene facendo un sistema del secondo ordine con smorzamento molto piccolo (z dell'ordine di $10^{-2} \div 10^{-3}$) e facendo coincidere la pulsazione ω della coppia impressa con quella per cui la risposta presenta un massimo, cioè praticamente con la pulsazione caratteristica dell'equipaggio mobile.

Si ha, a questo modo, dalla [1-43]:

$$g_M \cong \frac{1}{2z} \qquad \text{per} \qquad \omega \cong \mu \, ;$$

per la generica armonica di ordine n, si ha invece:

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{(1 - n^2)^2 + (2zn)^2}} \cong \frac{1}{n^2 - 1} \, ;$$

il rapporto fra la fondamentale e la terza armonica risulta, ad esempio:

$$\frac{g_3}{g_M} = \frac{2z}{3^2 - 1} = \frac{z}{4}$$

che può essere dell'ordine di qualche millesimo.

Il limite di funzionamento di un simile sistema selettivo è dato dalla difficoltà di ottenere pulsazioni caratteristiche elevate con coppie motrici sufficienti.

La regolazione della pulsazione caratteristica avviene in genere mediante variazione della coppia resistente.

3-4. **Principali strumenti indicatori.**

3-4,1. *Milliamperometri e millivoltmetri in c.c.*

Lo strumento preferito, per la sua precisione e basso consumo, è quello magnetoelettrico (3-1,3) che è intrinsecamente un *milliamperometro* con un limite superiore nella portata (dell'ordine di 100 mA) imposto dal riscaldamento delle molle ed un limite inferiore (dell'ordine dei μA o frazione) imposto dalla difficoltà di ridurre in proporzione il diametro del filo, che costituisce la bobina, e quindi il suo peso.

La resistenza R_i dello strumento (bobina e molle) varia con la temperatura θ, secondo un coefficiente α di temperatura che è dell'ordine di 4×10^{-3}/K; per ottenere una relazione univoca fra la deviazione e la tensione V applicata ai morsetti d'ingresso (ossia per fare un *millivoltmetro*) occorre inserire una rete di resistenze tale che, detto:

$$R_e = \frac{V}{I}$$

il rapporto fra la tensione applicata e la corrente I che percorre lo strumento (fig. 3-20), sia:

$$\frac{dR_e}{d\theta} = 0 \quad \text{almeno per:} \quad \alpha\theta \ll 1 \, .$$

Fig. 3-20

Due schemi possibili sono mostrati in fig. 3-21 e 3-22; essi contengono sia resistori (a, a') con coefficiente di temperatura α, sia resistori (b, b') (praticamente) invariabili con la temperatura [1].

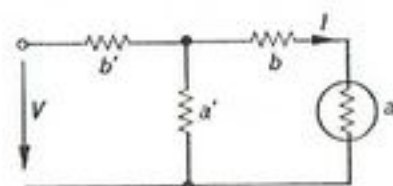



Fig. 3-21

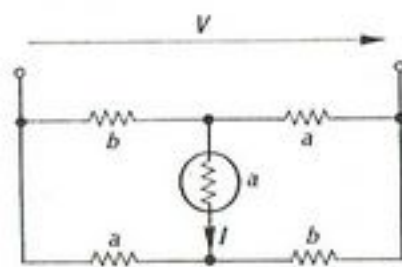



Fig. 3-22

[1] La compensazione si ottiene, nello schema di fig. 3-21 quando sia $aa' = bb'$; nello schema di fig. 3-22, per $a = 3b$.

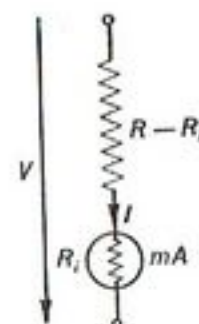



Fig. 3-23

3-4,2. *Voltmetri e amperometri per c.c.*

Un *voltmetro* per tensione continua è formato da un milliamperometro con in serie una resistenza addizionale, invariabile con la temperatura (fig. 3-23) in modo che sia:

$$C = kI = (k/R)V;$$

se la tensione V da misurare è molto maggiore del consumo R_iI del milliamperometro, le variazioni di questo con la temperatura producono un effetto trascurabile. Talvolta è trascurabile anche il consumo stesso, cioè la stessa resistenza addizionale può essere usata con più milliamperometri aventi resistenze R_i diverse.

Si realizzano facilmente strumenti a più portate, eseguendo più prese sul resistore addizionale corrispondente alla portata massima desiderata. La portata del milliamperometro costituisce il consumo del voltmetro.

In forma duale, si può realizzare un *amperometro*, inviando la corrente da misurare in uno shunt e misurando la caduta di tensione corrispondente con un *millivoltmetro* (fig. 3-24). Con un unico millivoltmetro ed una serie di shunt si ottengono più portate; poiché però lo shunt dovrà in generale avere quattro morsetti, la commutazione di portate non è così semplice come per i voltmetri.

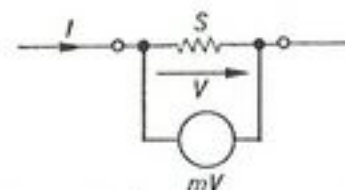



Fig. 3-24

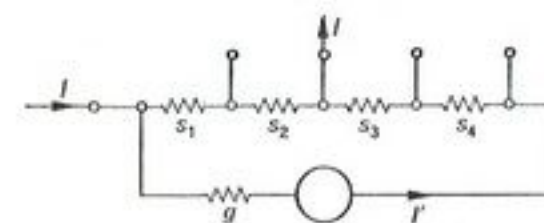



Fig. 3-25

Un altro schema, generalmente usato per strumenti meno precisi, è quello di fig. 3-25; nella generica posizione r, lo strumento è percorso dalla corrente I' quando nel circuito circola la corrente:

$$I = \frac{g + \sum_1^n s_i}{\sum_1^r s_i} I' \, .$$

Perché il rapporto I/I' sia invariabile con la temperatura devono essere costanti sia le resistenze s_i, sia la g, che comprende perciò, oltre alla resi-

stenza R_t del milliamperometro, un'adeguata resistenza addizionale, indipendente dalla temperatura. Il consumo dello strumento risulta pertanto in genere più elevato.

Con lo stesso equipaggio si costruiscono allora strumenti detti universali, cioè voltmetri e amperometri per più portate (fig. 3-26).

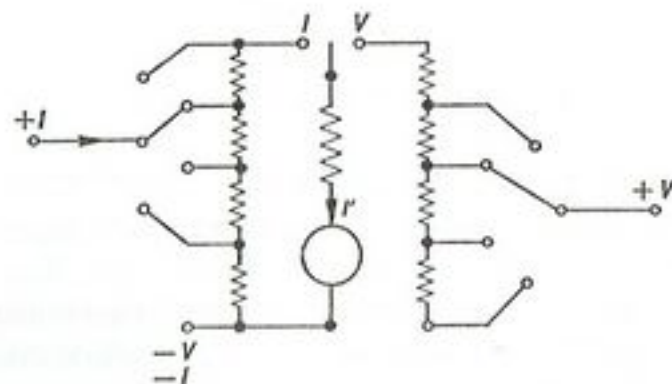



Fig. 3-26

3-4,3. *Amperometri per c.a.*

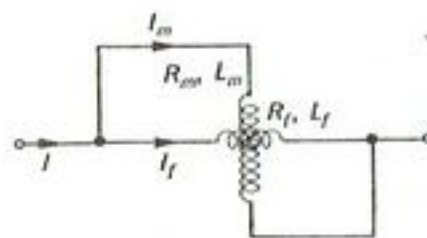
Per le misure di correnti alternate si usano strumenti elettrodinamici, ferromagnetici o termici: con i primi si ottengono gli strumenti più precisi, generalmente a due portate, la cui taratura in c.c. è valida anche per frequenze industriali; con i secondi si hanno strumenti più semplici e robusti, da quadro, ad una sola portata e per un ristretto campo di frequenze; gli strumenti termici sono i più delicati, ma possono essere utilizzati in un ampio campo di frequenze.

Fig. 3-27

Negli strumenti elettrodinamici, la corrente I da misurare viene ripartita fra le due bobine (fig. 3-27), in modo che la quota I_m che percorre la bobina mobile non superi il limite imposto dal riscaldamento delle molle. La ripartizione fra le due bobine è dettata, in corrente continua, dalle loro resistenze R_f e R_m; ponendo pertanto:

$$\alpha = \frac{R_m}{R_f} = \frac{I_f}{I_m}$$

si avrà, in base a [3-7]:

$$C = kI_fI_m = k\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}I^2 = k'I^2$$

dove il coefficiente k' è funzione solo del rapporto α fra le resistenze e non dei loro valori assoluti; esso non varia, perciò, se le bobine, riscaldandosi, si mantengono fra loro alla stessa temperatura.

Se la corrente I è sinusoidale, di pulsazione ω, intervengono nella ripartizione le reattanze ωL_m e ωL_f delle due bobine; è allora:

$$\frac{\dot{I}_f}{\dot{I}_m} = \frac{R_m + j\omega L_m}{R_f + j\omega L_f} = \alpha\frac{1 + j\dfrac{\omega L_m}{R_m}}{1 + j\dfrac{\omega L_f}{R_f}}.$$

Per conservare, indipendentemente da ω, il rapporto delle correnti I_f e I_m e la loro concordanza di fase, è necessario sia:

$$\frac{L_m}{R_m} = \frac{L_f}{R_f}.$$

Tale condizione è solo approssimata, perché non tiene conto della mutua induttanza M fra le bobine, che è variabile con la posizione dell'equipaggio. Si può dimostrare che ciò comporta un errore che cresce col quadrato della frequenza e che, dipendendo dal segno di M, è positivo all'inizio e negativo verso il fondo scala. È questo errore che limita l'impiego degli amperometri elettrodinamici alle frequenze industriali (fino a 500-1000 Hz).

Gli amperometri elettrodinamici si costituiscono in genere per due portate, l'una doppia dell'altra, suddividendo la bobina fissa in due parti che vengono messe in serie o in parallelo.

Per piccole portate, inferiori al centinaio di mA, lo strumento elettrodinamico può essere costruito con le due bobine in serie; è allora sempre:

$$C = kI^2$$

essendo I il valore efficace della corrente. Questo strumento risulta però sempre di consumo elevato. Per correnti sopra la decina di A, si preferisce ricorrere a trasformatori di misura (5-3).

Gli strumenti termici possono avere più portate ricorrendo a particolari artifici o ad appositi shunt che assicurano che solo una determinata frazione della corrente da misurare percorra il filo, indipendentemente dal valore della frequenza.

3-4,4. *Voltmetri per c.a.*

Per misurare tensioni alternate si usano milliamperometri elettrodinamici o ferromagnetici, con adeguati resistori in serie, nel campo delle frequenze industriali, ovvero strumenti termici o elettrostatici, più delicati ma adatti per frequenze anche più elevate.

Dallo schema di fig. 3-28 si vede chiaramente come negli strumenti elettrodinamici e ferromagnetici, la relazione fra tensione e coppia:

$$C = kI^2 = k\frac{V^2}{Z^2} = k'V^2$$

sia influenzata dalla frequenza, per la presenza di Z in una parte reattiva, indispensabile alla produzione della coppia. Ne risultano strumenti con un campo limitato di frequenza (fino al kHz per gli elettrodinamici, qualche centinaio di Hz per i ferromagnetici), a consumo abbastanza elevato (raramente inferiore alla decina di mA) e per portate non inferiori a 50÷100 V.

Fig. 3-28

Salendo con i valori di portata, cresce corrispondentemente la potenza dissipata nel resistore addizionale; per tensioni sopra i 500 V si ricorre perciò preferibilmente a trasformatori di misura (5-3).

È interessante la possibilità di usare strumenti elettrostatici, inseriti direttamente, per la misura di tensioni anche molto elevate ($10^4 \div 10^5$ V).

3-4,5. *Wattmetri elettrodinamici.*

Si consideri uno strumento elettrodinamico, inserito come in fig. 3-29 in un circuito in c.a. sinusoidale; la bobina fissa è percorsa dalla corrente $\dot{I}_f = \dot{I}$, mentre la corrente I_m nella bobina mobile può essere assunta, in prima approssimazione:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{V}}{R_v}. \qquad [3\text{-}12]$$

In tal caso, l'angolo β fra $\dot{I}_f$ e $\dot{I}_m$ coincide con l'angolo φ fra $\dot{V}$ ed $\dot{I}$ e si ha una coppia media:

$$C = kI_f I_m \cos\beta = \frac{k}{R_v} VI\cos\varphi = k'P; \qquad [3\text{-}13]$$

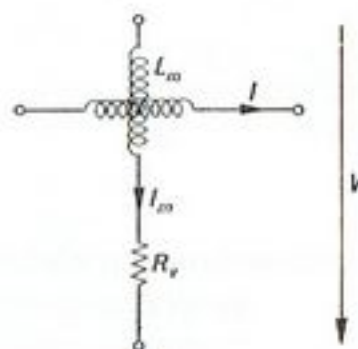



Fig. 3-29

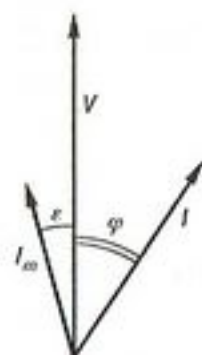
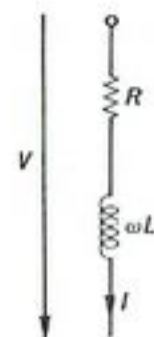



Fig. 3-30

lo strumento misura quindi la potenza P, cioè è un wattmetro a scala lineare, con costante k' valida, in particolare, sia in c.c., sia in c.a., anche non sinusoidale, fino alle frequenze per cui resta valida l'ipotesi [3-12].

Questa ipotesi trascura l'angolo ε esistente fra la corrente $\dot{I}_m$ e la tensione $\dot{V}$ (1); la presenza di ε equivale ad un errore sull'angolo φ (fig. 3-30) che comporta un errore sulla potenza:

$$E_r = dP = \frac{d}{d\varphi}(VI\cos\varphi)\cdot\varepsilon = -\varepsilon VI \operatorname{sen}\varphi$$

ovvero si ha un errore relativo (errore di fase):

$$\frac{dP}{P} = -\varepsilon \operatorname{tang}\varphi \qquad [3\text{-}14]$$

che è espresso in percento, se l'angolo ε è in centiradianti. Quando l'angolo ε è dovuto solo alla presenza della reattanza della bobina mobile, è:

$$\varepsilon = -\frac{\omega L_m}{R_v};$$

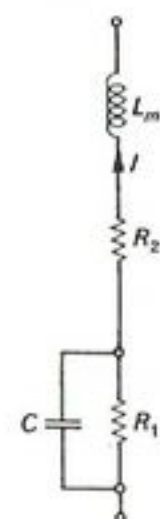



Fig. 3-31

vi possono essere schemi più complessi (fig. 3-31 con $C = L_m/R_1^2$), con cui si può estendere l'impiego di un wattmetro fino a frequenze di qualche kHz, mantenendo per ε (in ctr) un valore inferiore a quello dell'indice di classe.

Un wattmetro con valori nominali, rispettivamente di tensione, corrente e fattore di potenza, V_0, I_0, $\cos\varphi_0$, va in fondo scala per la potenza:

$$P_0 = V_0 I_0 \cos\varphi_0;$$

poiché raramente i tre valori nominali si presentano contemporaneamente, specie se $\cos\varphi_0 = 1$ la maggior parte degli strumenti ammette dei sovraccarichi di tensione e di corrente fino a valori V_M, I_M, specificati dal costruttore.

Sono da ricordare i *wattmetri per basso cos φ*, (per es. con $\cos\varphi_0 = 0,1$) nei quali viene mantenuta una alta sovraccaricabilità ed un piccolo errore di fase, uniti a un ridotto consumo, per facilitare le misure a basso fattore di potenza.

Infatti, poiché il fattore di potenza deve essere considerato, nella misura della potenza, come una grandezza d'influenza, le variazioni (1-6,3) che si ammettono, a tensione e corrente nominali, quando questa grandezza varia nel suo campo d'impiego (ossia fra $\cos\varphi_0$ e zero) devono

(1) Per rispettare una convenzione di carattere generale (vedi 5-1,4), l'angolo ε è assunto positivo se I_m precede V.

essere minori dell'indice di classe; deve perciò essere:

$$E_f < \varepsilon V_0 I_0 < c P_0/100$$

da cui si deriva (per ε in centiradianti):

$$\varepsilon < c \cos \varphi_0 .$$

3-4,6. *Altri tipi di wattmetri.*

Con strumenti a caratteristica quadratica, come gli strumenti termici ed elettrostatici, si può eseguire il prodotto di due grandezze, secondo il principio già indicato in 1-4,2, e quindi misurare una potenza.

Nello schema di fig. 3-32 un'armatura a due settori, a potenziale zero, è libera di ruotare fra due coppie di armature fisse, a potenziale rispettivamente v_1 e v_2; se la costruzione è simmetrica, le variazioni di capacità conseguenti ad una rotazione δ sono uguali e di segno opposto, per cui è:

$$c_m = \frac{1}{2} \frac{dC}{d\delta} (v_1^2 - v_2^2) = k(v_1^2 - v_2^2)$$

Essendo:

$$v_1 = v + \frac{1}{2} Ri$$

$$v_2 = v - \frac{1}{2} Ri ,$$

la coppia istantanea risulta:

$$c_m = k(v_1^2 - v_2^2) = 2kRvi = k'p .$$

Analogamente si può mostrare, per lo schema di fig. 3-33 che, trascurando i consumi, è:

$$i_v = \frac{v}{2R + r}$$

$$i_a = \frac{S}{S + 2r} i$$

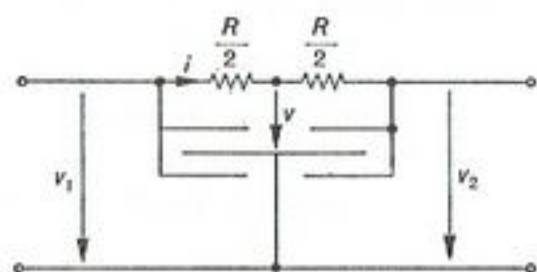



Fig. 3-32

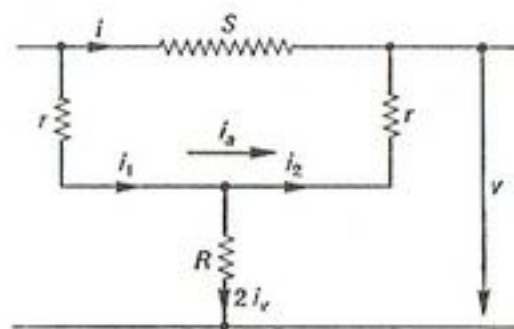



Fig. 3-33

e quindi:

$$i_1^2 - i_2^2 = (i_v + i_a)^2 - (i_v - i_a)^2 = \frac{4S}{(2R + r)(S + 2r)} vi = k'p .$$

Lo strumento risulta molto semplice se, anziché a filo caldo, è costruito mediante convertitori termici (vedi 5-4,5); altri schemi utilizzano trasformatori di tensione e di corrente.

In ogni caso questi wattmetri hanno la caratteristica di misurare la potenza di un circuito, indipendentemente dalla frequenza e dalla forma delle tensioni e correnti in gioco; sono insensibili ai campi magnetici esterni e possiedono limitati errori di fase. Risultano però delicati e di elevato consumo.

3-5. **Rivelatori di zero.**

3-5,1. *Galvanometri magnetoelettrici.*

Si designano col nome di galvanometri quegli strumenti magnetoelettrici costruiti per correnti molto piccole, generalmente inferiori al microampere, privi di taratura e precisione proprie e spesso anche sprovvisti di una propria scala. Essi risultano adatti ad impieghi particolari, dove la taratura non è necessaria (come, ad esempio nei rivelatori di zero) o deve avvenire di volta in volta, essendo funzione anche di parametri esterni allo strumento (come, ad esempio, nelle misure balistiche).

Un galvanometro è, costruttivamente, simile ad uno strumento magnetoelettrico e può essere realizzato con sospensioni sia a filo che a nastri tesi, sia — più raramente — a perni. Quando l'angolo di rotazione dell'equipaggio mobile è ridotto a pochi gradi, si può ottenere un'elevata induzione al traferro, concentrandovi il flusso con disposizioni del tipo illustrato in fig. 3-34.

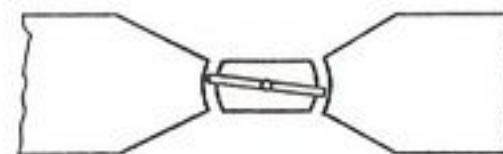



Fig. 3-34

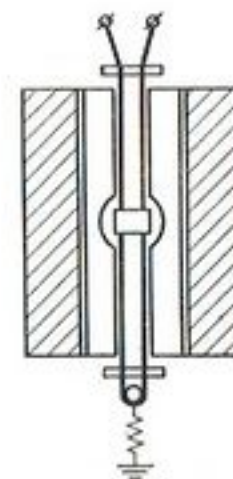



Fig. 3-35

La bobina mobile può assumere forme e dimensioni molto diverse, che influiscono sul momento d'inerzia dell'equipaggio e quindi sulla sua frequenza caratteristica, che può andare da frazioni di Hz a qualche decina di kHz. Un piccolo momento d'inerzia si ottiene con equipaggio bifilare (fig. 3-35).

3-5,2. *Galvanometri rivelatori di zero.*

Nell'impiego come rivelatore di zero per correnti continue, un galvanometro è caratterizzato — come già si è visto in 1-6,6 — dalla sua sensibilità; si suole distinguere una sensibilità amperometrica, usualmente espressa in A (o in μA) per divisione, una sensibilità voltmetrica, in V (o μV) per divisione, e una sensibilità wattmetrica che risulta pari al prodotto delle due precedenti.

Con le notazioni già usate, essendo la coppia motrice:

$$C_m = BSnI = kI = k\frac{V}{R}$$

e quella resistente:

$$C_r = M\delta$$

tenendo conto del fattore H che pone in relazione l'elongazione λ sulla scala con la deviazione angolare δ dell'equipaggio ($\lambda = H\delta$), si ha, per la sensibilità emperometrica:

$$S_A = \frac{I}{\lambda} = \frac{M}{kH}$$

e per quella voltmetrica:

$$S_V = \frac{V}{\lambda} = S_A R\,.$$

Si deve però notare che la resistenza R dell'equipaggio mobile risulta, a parità di peso della bobina, proporzionale al quadrato del suo numero n di spire; si possono quindi ottenere, a parità delle altre caratteristiche costruttive, galvanometri con valori diversi di sensibilità amperometrica, usando equipaggi con diverso numero di spire e quindi di resistenza diversa. Risulta però in ogni caso, per la sensibilità wattmetrica:

$$S_w = S_A \cdot S_V = \frac{M^2 R}{B^2 S^2 n^2 H^2} = \frac{M^2}{B^2 S^2 H^2} R_0$$

con $R_0 = R/n^2$ indipendente dal numero di spire della bobina.

La sensibilità wattmetrica può raggiungere $10^{-11} \div 10^{-15}$ W per una divisione; i valori più piccoli possono essere raggiunti solo disponendo di induzioni elevate e basse coppie resistenti, cioè impiegando materiali magnetici di alta qualità, circuiti magnetici accuratamente studiati, sospensioni a filo di grande lunghezza. Uno strumento molto sensibile è però sempre delicato, sia termicamente che meccanicamente; esso può essere anche soggetto ad instabilità nella sua posizione di riposo, se ad esempio la sua coppia resistente risulta compensata da piccoli squilibri sia meccanici che magnetici (p. es. impurità magnetiche nella bobina) creando zone di equilibrio indifferente.

Esiste un limite al valore della sensibilità di un galvanometro, dovuto alla presenza dei moti irregolari dell'equipaggio per il moto browniano delle particelle d'aria con cui esso viene a contatto; questo limite è dell'ordine di 10^{-20} W/div^2.

3-5,3. *Galvanometri in c.a.*

Quando la bobina di uno strumento magnetoelettrico è percorsa da una corrente sinusoidale, del tipo $I_M \operatorname{sen}\omega t$, la deviazione istantanea segue anch'essa una legge sinusoidale, della stessa pulsazione:

$$\delta = \delta_M \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) = G(\omega) I_M \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

la cui ampiezza e fase dipendono dai valori assunti rispettivamente dal modulo $G(\omega)$ e dall'argomento $\varphi(\omega)$ della funzione di trasferimento dell'equipaggio mobile, per la pulsazione ω.

Perché $G(\omega)$ non assuma valori troppo piccoli, lo strumento deve avere una pulsazione caratteristica dello stesso ordine di grandezza, o maggiore di ω; questi strumenti hanno quindi equipaggi con piccola inerzia, formati generalmente da due fili paralleli (fig. 3-35), ed indice luminoso. La pulsazione caratteristica dipende, oltre che dalla costante delle molle, dalla lunghezza della parte mobile fra i punti fissi.

Per frequenze superiori ad una decina di Hz, l'elongazione può essere resa visibile sfruttando la persistenza delle immagini sulla retina; l'immagine dell'indice appare sulla scala come una striscia luminosa di ampiezza proporzionale a δ_M: questa disposizione è usata soprattutto nei *galvanometri a vibrazione*, usati come rivelatori di zero selettivi per c.a.

Lo strumento è reso selettivo accordando la sua pulsazione caratteristica μ mediante regolazione della coppia resistente; dato lo smorzamento molto basso, l'indicazione è elevata per correnti di pulsazione $\omega = \mu$ e assai ridotta per correnti di pulsazione diversa.

3-5,4. *Elettrodinamometro.*

Se si alimenta una delle bobine di uno strumento elettrodinamico con una corrente sinusoidale di valore efficace I_1, e si fa percorrere l'altra bobina da una corrente I_2 della stessa frequenza, ma variabile in ampiezza e fase, si ha una coppia nulla per:

$$I_1 I_2 \cos\beta = 0 \;;$$

lo strumento è quindi in grado di controllare l'annullamento della $I_2 \cos\beta$, cioè della componente di I_2 nella direzione di I_1.

Uno strumento così impiegato può costituire un rivelatore di zero sia per $\cos\beta$, che per I_2; variando però la fase di I_1 è possibile controllare quale delle due condizioni sia verificata. Lo strumento è selettivo in quanto non dà luogo a coppia se la corrente I_2 non è della stessa frequenza di I_1.

Per ottenere induzioni più elevate di quelle che si realizzano nei normali strumenti elettrodinamici, si fa ricorso a nuclei in ferro o a bobine fisse di forma piatta che concentrano il campo nella limitata zona di movimento della bobina mobile (fig. 3-36). Si possono così raggiungere sensibilità amperometriche dell'ordine di $10^{-6} \div 10^{-9}$ A/mm.

Fig. 3-36

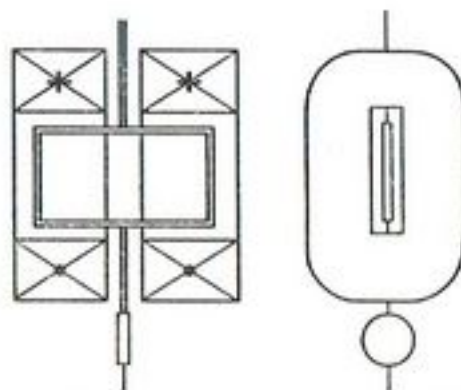
Se le bobine non sono, a riposo, esattamente nella posizione in cui sia $M=0$, si ha una coppia dovuta alle correnti indotte per mutua induzione sulla bobina mobile, quando questa è chiusa su un circuito passivo esterno; essa assume perciò una posizione di zero diversa dalla posizione di riposo (falso zero), che rimane valida, a parità di I_1, per il funzionamento su un circuito esterno, anche contenente delle f.e.m., ma con le stesse caratteristiche di resistenza e reattanza.

3-5,5. *Galvanometri ferromagnetici.*

Se la lamina di uno strumento ferromagnetico è interessata da un'induzione del tipo:

$$b = B_0 + B_M \operatorname{sen} \omega t \,,$$

la forza di attrazione cui essa è soggetta risulta:

$$f = b^2 = (B_0 + B_M \operatorname{sen} \omega t)^2 = B_0^2 + \frac{B_M^2}{2} - \frac{B_M^2}{2} \cos 2\omega t + 2B_0 B_M \operatorname{sen} \omega t \qquad [3\text{-}15]$$

e contiene perciò, oltre ad una parte costante, un termine di pulsazione ω e un termine di pulsazione doppia, le cui ampiezze stanno fra loro nel rapporto $4B_0/B_M$. Questa proprietà può essere convenientemente sfruttata per creare galvanometri da impiegare come rivelatori di zero per c.a. o come oscillografi.

In entrambi i casi, la parte mobile è costituita da un ago (fig. 3-37) di materiale magnetico per magneti permanenti, sottoposto al campo costante di un magnete, inserito nel circuito magnetico di eccitazione; in qualche caso, la coppia resistente può essere fornita in tutto o in parte da un altro magnete, la posizione del quale determina anche la frequenza di risonanza della parte mobile. Quando il sistema meccanico è accordato sulla pulsazione ω, con smorzamenti molto piccoli, l'effetto della forza con pulsazione 2ω risulta trascurabile; si ha quindi una buona sensibilità (fino a 10^{-2} µA e 10 µV/mm a 50 Hz) e selettività.

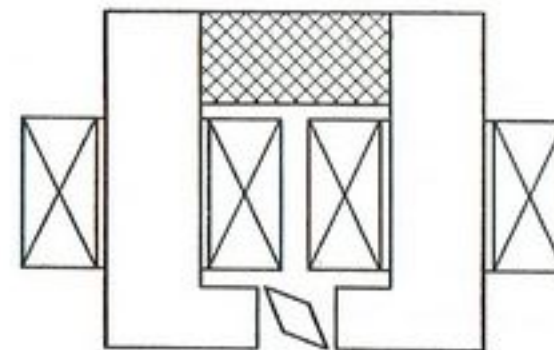



Fig. 3-37

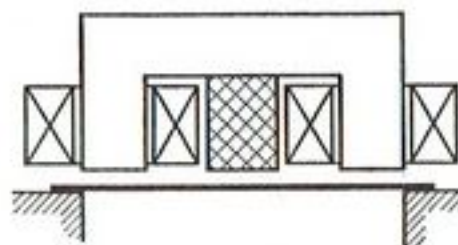
L'impiego come equipaggio oscillografico è limitato a frequenze di qualche centinaio di Hz; occorre in ogni caso tenere elevato il valore di B_0 rispetto a B_M per rendere trascurabili le deformazioni introdotte dal termine di seconda armonica della forza agente.

3-5,6. *Cuffia telefonica.*

Sullo stesso principio dei galvanometri ferromagnetici funziona anche la *cuffia telefonica*, assai usata come semplice e pratico rivelatore di zero per frequenze acustiche. Essa è costituita da una lamina, sottoposta all'azione combinata di un magnete permanente e delle bobine percorse dalla corrente da rivelare (fig. 3-38).

Fig. 3-38

Al tendere di B_M a zero, per il ter-

mine della [3-15] di pulsazione 2ω, proporzionale a B_M^2, anche la derivata tende a zero, mentre il termine di pulsazione ω assicura una sensibilità finita anche nell'intorno dello zero.

La selettività, per l'impiego come rivelatore di zero, è affidata alle caratteristiche dell'orecchio dell'operatore che riceve, sotto forma di onda acustica, le vibrazioni impresse all'aria dalla lamina, nel suo movimento. L'orecchio umano ha anche una caratteristica di sensibilità di tipo logaritmico che evita l'impiego di variatori di sensibilità.

3-6. **Alcuni strumenti speciali.**

3-6,1. *Galvanometro balistico.*

Un galvanometro dicesi balistico quando sia di caratteristiche adatte alla misura di impulsi di corrente o di f.e.m.; queste caratteristiche possono essere compendiate (vedi 1-5,5), in un valore opportunamente basso della pulsazione caratteristica μ e in un conveniente valore del fattore di smorzamento z. La misura avviene infatti attraverso la lettura della deviazione massima dello strumento, durante il moto transitorio che segue l'applicazione della grandezza impulsiva; la velocità con cui l'indicazione, raggiunto il suo valore massimo, se ne allontana dipende dai parametri della funzione di trasferimento: come mostrato in 1-5,5, il tempo T a disposizione per la lettura, entro un prefissato margine di errore relativo, è inversamente proporzionale a μ e cresce al crescere di z. Poiché il tempo T deve essere dell'ordine almeno del secondo, il periodo proprio dell'equipaggio mobile:

$$\tau = \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M}}$$

deve essere dell'ordine delle decine di secondi; ciò può ottenersi sia mediante un elevato momento di inerzia J, sia collegando, in parallelo alla bobina, un condensatore di opportuna capacità.

3-6,2. *Misura di impulsi di corrente.*

Si consideri un galvanometro in cui la coppia motrice sia proporzionale alla corrente i che percorre la bobina secondo la $C = ki$; nel caso di misura di un impulso di corrente di valore Q, la risposta dell'equipaggio mobile diviene:

$$\delta(p) = QG(p) = \frac{\frac{k}{M}Q}{p^2\frac{J}{M} + \frac{N}{M}p + 1} = \frac{G_0 Q}{\frac{p^2}{\mu^2} + \frac{2z}{\mu}p + 1}.$$

Il fattore k_q, che lega il valore del primo massimo δ_M della indicazione alla carica Q, può essere scritto nella forma (vedi 1-5,5):

$$k_q = \frac{\delta_M}{Q} = G_0\mu f_1(z);$$

la funzione $f_1(z)$ è riportata in fig. 3-39; in generale il valore di k_q è dato per uno strumento, in condizioni di circuito aperto ($z = 0, f_1 = 1$) o di smorzamento critico ($z = 1, f_1 = 1/\varepsilon$); al crescere di $z, f_1(z)$ tende al valore $1/2z$.

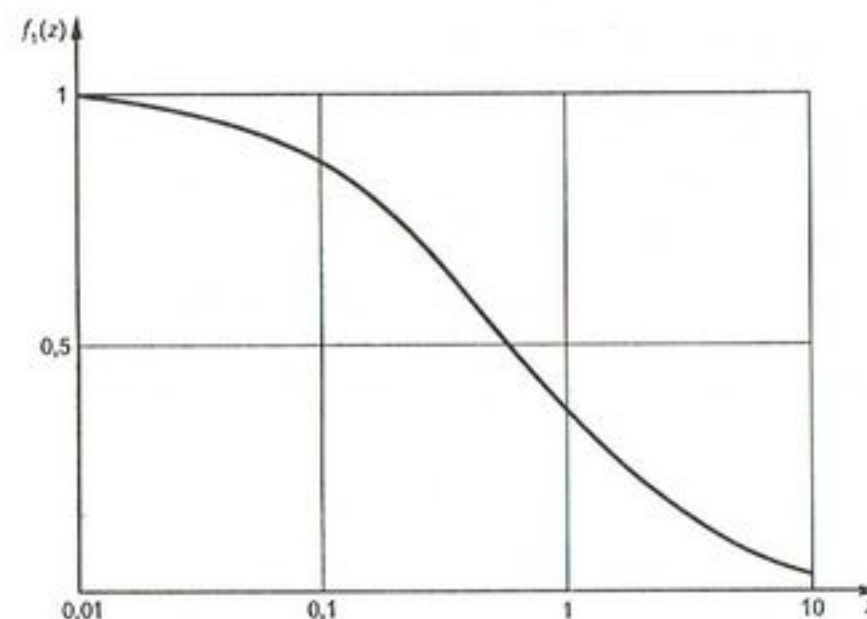



Fig. 3-39

La legge di proporzionalità fra la δ_M e la carica Q può anche ricavarsi facilmente, nel caso di smorzamento nullo, dalle seguenti considerazioni energetiche: all'istante di applicazione dell'impulso Q, si può scrivere:

$$J\frac{d\delta}{dt} + N\delta + M\int_0^t \delta\, dt = kQ$$

ma, non essendo ancora iniziato il moto dello strumento, si può porre $\delta = 0$ e quindi:

$$J\left[\frac{d\delta}{dt}\right]_{t=0} = kQ;$$

corrispondentemente, risulta immagazzinata nell'equipaggio l'energia cinetica:

$$W = \frac{1}{2}J\left[\frac{d\delta}{dt}\right]_{t=0}^2 = \frac{1}{2}\frac{k^2Q^2}{J}.$$

Questa energia sarà, in assenza di smorzamento, tutta trasformata in energia elastica, quando la deviazione avrà raggiunto il suo valore massimo δ_M; sarà quindi:

$$\frac{1}{2}M\delta_M^2=\frac{1}{2}\frac{k^2Q^2}{J}$$

da cui si ottiene:

$$\delta_M=\frac{kQ}{\sqrt{MJ}}=\frac{k}{M}\sqrt{\frac{M}{J}}\,Q=G_0\mu Q\,.$$

Nel caso di smorzamento diverso da zero, la deviazione massima rimane proporzionale a Q secondo un fattore minore di 1, funzione dello smorzamento stesso. Questo fattore potrebbe ricavarsi teoricamente da misure di smorzamento ma si preferisce tarare di volta in volta il galvanometro balistico nel suo stesso circuito di misura: lo smorzamento è infatti funzione della totale resistenza del circuito in cui è chiuso lo strumento.

3-6,3. *Misure di impulsi di f.e.m.*

Il comportamento di un galvanometro balistico, nella misura di impulsi di f.e.m. di valore $\Delta\phi$, può ricavarsi direttamente dalle considerazioni precedenti, tenendo conto che tale impulso mette in gioco la carica:

$$Q=\frac{\Delta\phi}{R}\,.$$

Si ha pertanto, tenendo conto dei legami fra i vari parametri (vedi 3-3,1):

$$\delta_M=(k/NR)\,2zf_1(z)\,\Delta\Phi=(k/NR)f_2(z)\,\Delta\Phi$$

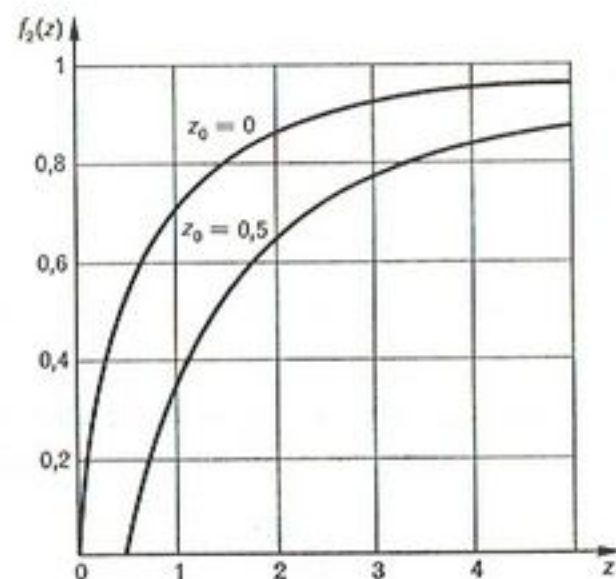



Fig. 3-40

essendo $f_2(z)$ una funzione delle caratteristiche meccaniche dell'equipaggio mobile dipendente dal solo coefficiente z. Supponendo presente solo lo smorzamento dovuto alle correnti indotte per il moto della bobina, ossia [3-10]:

$$N=\frac{k^2}{R}$$

si ha:

$$k_\phi=\frac{\delta_M}{\Delta\phi}=\frac{1}{k}f_2(z)\,.$$

La funzione $f_2(z)$ è rappresentata in fig. 3-40; essa ha valore crescente al crescere di z, al contrario di quanto avviene per la misura delle cariche; dalla stessa figura si vede anche come si modifica il fattore k_ϕ (il cui inverso è sensibilità di flusso) qualora si tenga conto di uno smorzamento z_0, indipendente da R.

In generale, il valore di k_ϕ (o del suo inverso) è fornito nelle condizioni di smorzamento critico ($z=1$); in pratica, si ricorre anche qui ad una taratura nelle condizioni d'impiego (vedi 8-4,7).

3-6,4. *Flussometro.*

La misura sia di quantità di carica sia di variazioni di flusso concatenato può avvenire per mezzo di integratori, costituiti, come si è visto in 3-3,5, da equipaggi privi di coppia elastica di richiamo. Uno strumento di questo tipo (detto quantometro o flussometro) ha, nel suo movimento, la sola coppia resistente dovuta allo smorzamento (sia viscoso sia elettromagnetico); esso si arresta, cessato il transitorio, in una posizione finale δ_M proporzionale alla quantità di carica che lo ha attraversato.

La sospensione è realizzata mediante filo di seta, l'adduzione di corrente mediante nastri in argento, tali da non produrre coppie resistenti; in pratica, lo strumento tende sempre a tornare, molto lentamente, verso una posizione di equilibrio, ma il tempo disponibile per la lettura risulta molto maggiore di quello di un galvanometro balistico.

La costante strumentale è funzione del coefficiente di smorzamento: lo strumento deve quindi essere tarato, in analogia con quanto avviene per un galvanometro balistico, nel circuito d'impiego.

STRUMENTI ELETTROMAGNETICI

3-6,5. *Equipaggi per integratori.*

Quando si voglia integrare nel tempo una grandezza, misurandola con uno strumento elettromagnetico o elettrodinamico che compia più giri, occorre disporre di un sistema motore che fornisca, per ogni posizione

angolare dell'equipaggio mobile, una coppia proporzionale alla grandezza da integrare. La bobina mobile deve perciò essere realizzata con un avvolgimento a tamburo, del tipo di quello usato per le macchine a c.c., e, come questo, fornito di commutatore a lamelle, in modo da rendere attive le spire che si trovano nella zona a cui compete la coppia massima. La corrente nella bobina mobile dipende non solo dalla tensione V applicata, ma anche dalla f.e.m. E indotta dal movimento, che è proporzionale all'induzione prodotta dalla parte fissa e alla velocità ω di rotazione; questa f.e.m. costituisce una causa di coppia frenante che deve risultare piccola rispetto alla coppia motrice.

La fig. 3-41 mostra un esempio di equipaggio elettrodinamico; il peso non indifferente dell'equipaggio mobile e la presenza delle spazzole, striscianti sul collettore, sono cause di notevoli attriti e rendono questo tipo di equipaggio nettamente inferiore a quello ad induzione; esso è perciò applicato solo per misure in corrente continua. Per alleggerire la parte mobile e ridurre gli attriti dovuti alle spazzole, il rotore può essere sostituito da un disco, appoggiato su uno strato di mercurio (fig. 3-42); la corrente è introdotta alla periferia, mediante il contatto col mercurio, ed estratta al centro; il campo del magnete permanente o delle bobine fisse è assiale.

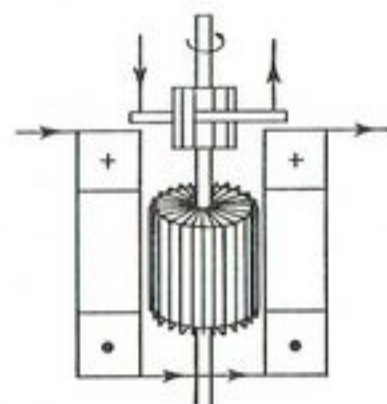
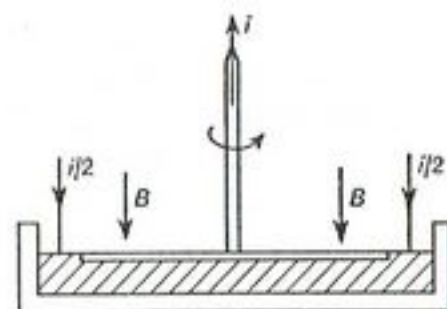



Fig. 3-41

Fig. 3-42

3-6,6. *Frequenziometro a lamelle.*

L'azione prodotta da uno strumento ferromagnetico, alimentato da una corrente alternata di pulsazione ω, è costituita da una coppia pulsante,

che comprende anche un termine periodico di pulsazione 2ω; se la parte mobile è costituita da una lamina di materiale ferromagnetico, fissata ad un estremo e libera di oscillare (fig. 3-43), la sua ampiezza di oscillazione risulterà maggiore quando la sua pulsazione caratteristica μ_0 sia prossima alla pulsazione 2ω della forza impressa.

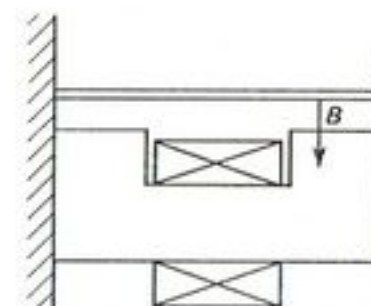



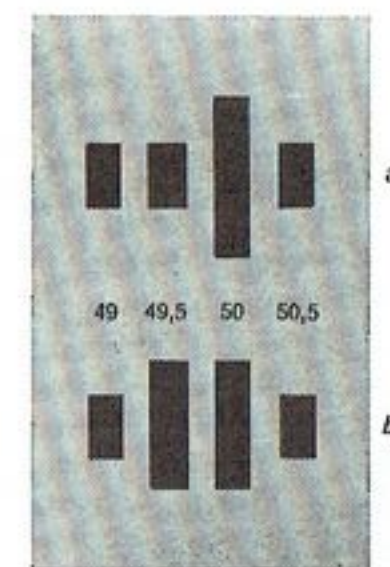
Fig. 3-43

La pulsazione caratteristica di una lamina dipende dal valore e dalla distribuzione delle sue masse e dalle proprietà elastiche del materiale di cui è formata; si possono perciò ottenere pulsazioni caratteristiche di valore diverso per diverse lamine simili, disponendo piccoli pesi sulle loro estremità libere; si realizza così una serie di lamine con pulsazioni caratteristiche opportunamente scalate, in modo da coprire un intero campo di frequenze da misurare.

L'estremità delle lamine viene colorata, in modo da distinguere chiaramente quale sia la lamina che abbia l'oscillazione maggiore (fig. 3-44 *a*); i valori di frequenza, intermedi a quelli corrispondenti a due lamine contigue, si determinano per interpolazione delle rispettive ampiezze di oscillazione (fig. 3-44 *b*). La selettività delle singole lamine è affidata allo smorzamento, che è dovuto sia agli attriti, tanto interni che esterni, della lamina vibrante, sia alle correnti indotte in essa dal suo moto nel campo prodotto dalla bobina; le differenze di pulsazione caratteristica fra una lamina e la successiva sono raramente al di sotto dell'1%.

Fig. 3-44

Si realizzano in questo modo frequenziometri nel campo fra una decina e un migliaio di Hz; generalmente ogni singolo strumento comprende però un campo molto ristretto di frequenza (p. es. $\pm 20\%$ intorno al valore centrale); la bobina è alimentata in derivazione dal circuito su cui si esegue la misura, con l'interposizione di un'impedenza variabile, per diversi valori di tensione.

La calibrazione della lamella deve essere eseguita singolarmente ma rimane stabile nel tempo, e poco influenzata dalla temperatura; l'indicazione è praticamente indipendente dal valore della tensione di alimentazione, dalla presenza in essa di armoniche, nonché da campi magnetici

estranei. Per i valori delle singole lamine si possono garantire scarti inferiori a $0,1 \div 0,2\%$; non altrettanto si può però garantire per i valori interpolati.

3-7. **Registratori.**

3-7,1. *Caratteristiche dei registratori su carta.*

Si ha spesso interesse a registrare i valori che una grandezza assume in funzione del tempo o, più in generale, di un'altra grandezza. In linea di principio, da ogni strumento indicatore si può ottenere un registratore, dotando il suo indice di una punta scrivente che lascia una traccia permanente su un foglio che scorre con velocità costante.

In relazione alla velocità di scrittura realizzabile, si possono distinguere i registratori in tre categorie:

1) *registratori lenti*, per scrittura continua o discontinua con velocità di avanzamento della carta di alcuni centimetri all'ora: sono i più usati per le misure di esercizio negli impianti;

2) *registratori veloci*, per scrittura continua con velocità di avanzamento di qualche centimetro al minuto; essi trovano impiego per la registrazione di alcuni tipi di transitori lenti (applicazioni mediche, meccaniche, ecc.);

3) *oscillografi*, per registrazioni a velocità superiore, ossia dove interessa osservare i valori istantanei di fenomeni, periodici o transitori, in tempi inferiori a qualche secondo.

La precisione che si può ottenere da una registrazione dipende sia dallo strumento impiegato, sia dalle caratteristiche di scrittura (grossezza della traccia, deformabilità della carta, ecc.). Generalmente non sono richiesti errori inferiori a qualche percento.

Il movimento della carta può essere azionato da un motore ad orologeria, ricaricabile a mano o elettricamente; per registrazioni veloci, si utilizza generalmente un motore elettrico; la trasmissione del moto è assicurata da un sistema di ruote dentate che consente di ottenere più rapporti di velocità.

Talvolta il moto della carta è comandato da una seconda grandezza elettrica indipendente da quella misurata dallo strumento, in modo che l'indice tracci una curva corrispondente alla relazione fra le due grandezze (registratore a coordinate). Un miglior risultato si ottiene tenendo fermo il foglio di carta e azionando l'indice lungo due assi ortogonali

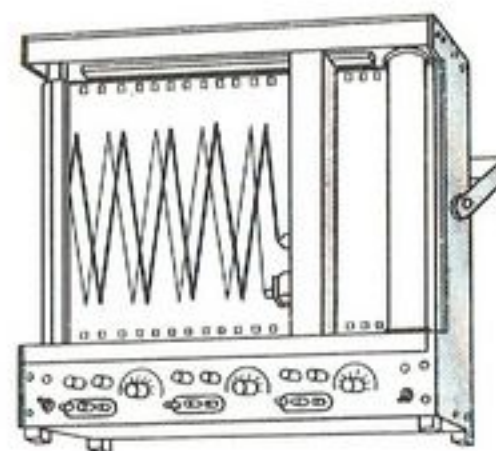



Fig. 3-45

con due dispositivi registratori simili, comandati rispettivamente dalle due grandezze (figura 3-45).

La fedeltà della registrazione, per fenomeni transitori o periodici, dipende soprattutto dalla risposta dell'equipaggio mobile; questo possiede generalmente, come tutti gli strumenti, una funzione di trasferimento del secondo ordine, caratterizzata da una frequenza caratteristica ($\mu/2\pi$) e da un fattore di smorzamento z. La frequenza caratteristica può variare, per registratori lenti, da frazioni di periodo al minuto a qualche periodo al secondo, scende per i registratori veloci a qualche centinaio di periodi al secondo per arrivare, negli oscillografi (elettromagnetici) ad alcuni kHz. Per le registrazioni di fenomeni con frequenze più elevate si fa ricorso agli oscilloscopi (od oscillografi) a raggi catodici (vedi 4-3).

3-7,2. *Sistemi di scrittura.*

Sono oggi utilizzati svariati sistemi di scrittura, a seconda dei diversi requisiti di finezza di traccia, semplicità e durata di uso, velocità di scrittura (lunghezza massima di traccia nitida, nell'unità di tempo) ecc.; i principali sono i seguenti:

a) *registrazione* (per punti) *ad archetto cadente*; l'indice è libero di ruotare ma, ad intervalli prefissati da un dispositivo ad orologeria, esso viene premuto sulla carta con interposizione di un nastro inchiostrato; questo sistema si presta per registrazioni lente, ma consente scritture multiple, sulla stessa carta, con nastri di colorazione diversa;

b) *registrazione a penna*; l'indice è dotato di un pennino e di un serbatoio d'inchiostro; questo deve entrare per capillarità nella punta, rimanervi fluido, per poi asciugare rapidamente sulla carta. Con questo sistema si ottengono sia registrazioni lente che veloci; la traccia prodotta è abbastanza sottile ($\sim 0,2$ mm) ma può poi diffondersi sulla carta, per effetto dell'umidità ambiente. L'attrito del pennino è sempre piuttosto elevato e il serbatoio richiede di essere periodicamente ricaricato;

c) *registrazione a scrittura indiretta*; utilizza carta di particolari caratteristiche su cui l'indice esercita un'azione termica o chimica, lasciandovi una traccia visibile; sono pure utilizzate carte metallizzate su cui l'indice,

portato in tensione, provoca una leggera traccia di bruciatura. Questi metodi, avendo attriti minori, si prestano in genere per strumenti più rapidi e più precisi; essi evitano anche la ricarica del sistema scrivente; sono però in genere molto più costosi;

d) la registrazione fotografica è utilizzata per le più elevate velocità di scrittura; l'indice è sostituito da un raggio luminoso che viene a cadere su un'emulsione sensibile; per evitare il ritardo dovuto allo sviluppo e al fissaggio dell'immagine, si adottano talvolta carte sensibili all'ultravioletto (con lampade a quarzo) o a sviluppo quasi immediato.

3-7,3. *Sistemi di moto per gli equipaggi.*

Per la lettura di una registrazione sono evidentemente preferibili le scale a coordinate ortogonali; è perciò opportuno che il moto dell'indice sia, in ogni punto, normale a quello della carta. Ciò si può ottenere, entro certi limiti, con dispositivi meccanici opportuni; la fig. 3-46 illustra alcuni esempi che hanno però tutti l'inconveniente di aumentare il peso e gli attriti della parte mobile.

Per avere strumenti di precisione sufficiente, occorre perciò in generale disporre di elevate coppie motrici, adottando p. es. equipaggi magnetoelettrici o elettrodinamici con ferro. A questi equipaggi si conferiscono in

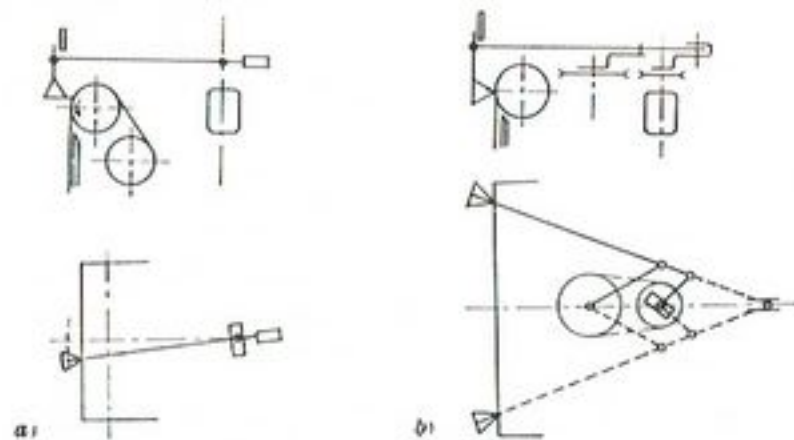



Fig. 3-46

genere periodi propri di oscillazione dell'ordine di alcuni secondi e un forte coefficiente di smorzamento; essi risultano adatti per registratori lenti.

Per svincolarsi dai problemi di attrito e di consumo risultano convenienti i dispositivi a servomotore (fig. 3-47), che funzionano sul principio dei sistemi a retroazione. Il contatto mobile (C) è in posizione di equilibrio quando la coppia prodotta dallo strumento (che è del tipo elettrodinamico, per l'esempio in figura), è uguale a quella, prodotta dalle

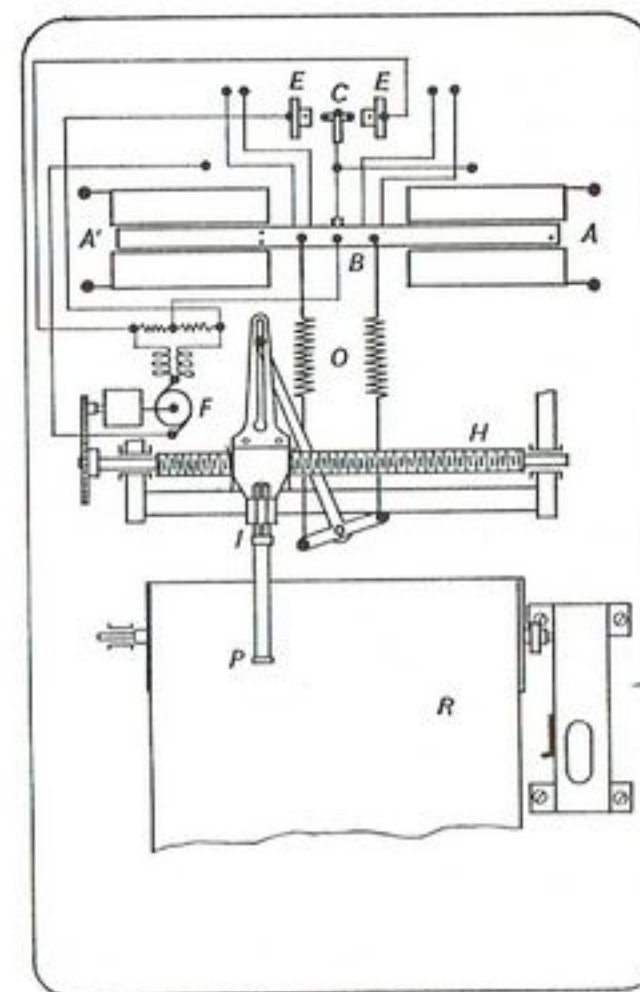



Fig. 3-47

Registratore a servomotore: A = bobine fisse; B = braccio mobile; C = contatto mobile; E = contatto fisso; F = motore c.c.; H = vite di guida del carrello; I = carrello; O = molle; P = penna scrivente; R = foglio per la registrazione.

molle (O), che risulta funzione della posizione dell'indice scrivente. Quando le due coppie non si fanno equilibrio, si chiude uno dei due contatti (E) e si eccita l'avvolgimento di campo di un motorino in c.c. (F), che sposta il carrello porta indice lungo la vite (H).

La posizione raggiunta dallo strumento dipende perciò dall'equilibrio della coppia sul contatto mobile, mentre la potenza necessaria a vincere gli attriti è fornita dal servomotore; il sistema deve risultare stabile, cioè non deve causare autooscillazioni.

3-7,4. *Oscillografi elettromagnetici.*

Come si è visto in 3-5,3, uno strumento magnetoelettrico percorso da una corrente sinusoidale $i = I_M \operatorname{sen} \omega t$, assume una deviazione istantanea:

$$\delta = G(\omega) I_M \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

la cui ampiezza e fase sono legate al modulo e all'argomento della funzione di trasferimento $\dot{G}(\omega)$ dell'equipaggio mobile. Perché la deviazione δ rappresenti correttamente il valore istantaneo della corrente i, in modo indipendente da ω, la pulsazione propria dell'equipaggio deve risultare (vedi 1-5,4):

$$\mu > 1{,}6\omega$$

e lo smorzamento z deve avere valori compresi fra 0,65 e 0,70.

Un'elevata frequenza caratteristica si ottiene mediante equipaggi bifilari a minimo momento d'inerzia; a parità di inerzia è necessario aumentare la coppia elastica di richiamo e quindi la costante amperometrica; ne deriva, in generale, che gli equipaggi adatti alla registrazione delle frequenze più elevate richiedono una maggior corrente, a parità di deviazione, di quelli per frequenze più basse.

Lo smorzamento viene in genere ottenuto immergendo l'equipaggio in olio di glicerina. La sua viscosità è variabile con la temperatura e ciò influisce sul valore dello smorzamento.

Si adottano anche dispositivi di smorzamento elettromagnetici, regolabili ed indipendenti dalla temperatura, ma che influiscono sulla costante amperometrica degli equipaggi.

L'equipaggio oscillografico può funzionare da milliamperometro o, con adeguate resistenze in serie e parallelo, da voltmetro o da amperometro; per la registrazione fedele di fenomeni a frequenza elevata, è naturalmente necessario rendere uniforme la risposta in frequenza anche per gli organi di regolazione. Questi oscillografi sono spesso denominati elettromagnetici per distinguerli da quelli a raggi catodici.

L'osservazione visuale del movimento di un equipaggio, per moti periodici, può effettuarsi disponendo un sistema di specchi rotanti [(C) di fig. 3-48] con opportune velocità, in modo da far apparire permanenti su uno schermo semitrasparente (vetro smerigliato) una serie di immagini ricorrenti.

Più spesso si ricorre alla registrazione fotografica, su carta sensibile che avanza in direzione normale al moto dei raggi, mossa da un motore a velocità regolabile. Per fissare la scala dei tempi, si registra contemporaneamente un marcatempo a frequenza fissa (p. es. 100 o 1000 Hz). Sulla stessa striscia di carta sensibile possono essere simultaneamente registrate, con opportuni sistemi ottici, più grandezze (in qualche caso fino a 12).

La registrazione di transitori di breve durata viene realizzata negli oscillografi a grande velocità di registrazione (fino a 15 m/s) predisponendo (fig. 3-48) la quantità voluta di carta sensibile (H) e tenendo in rotazione i rulli (L e L') per l'avanzamento della carta; al segnale di partenza, questi

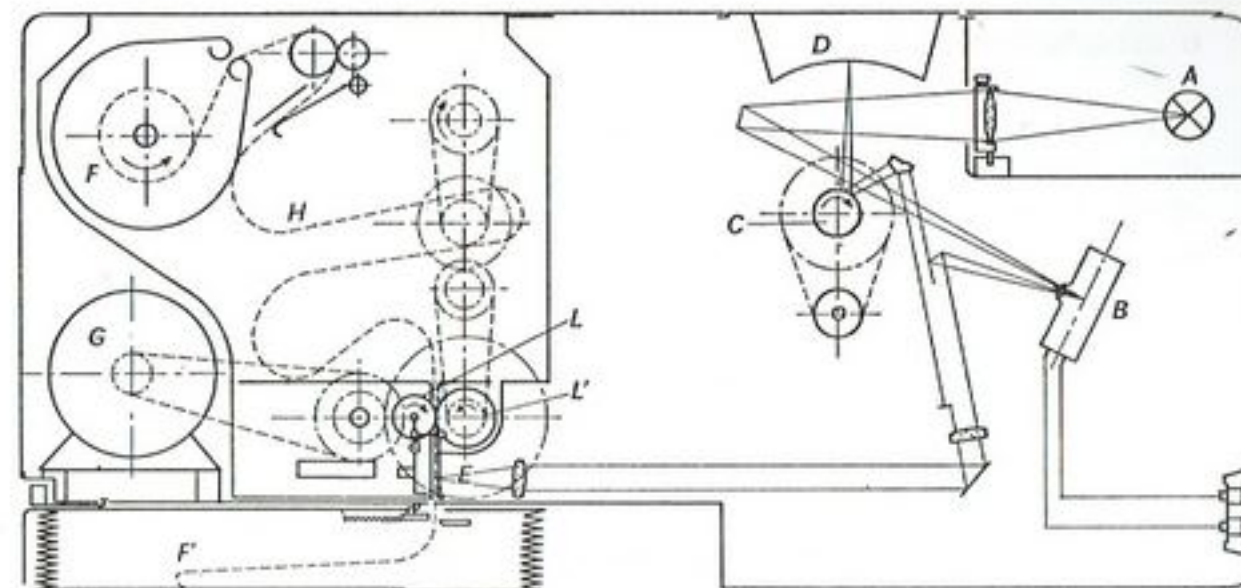



Fig. 3-48
Oscillografo elettromagnetico a registrazione fotografica: A = sorgente luminosa; B = equipaggio magnetoelettrico; C = specchio rotante; D = vetro smerigliato per osservazione; E = immagine per registrazione; F, F' = serbatoi della carta; G = motore di trascinamento della carta; H = carta sensibile; L, L' = rulli di trascinamento.

rulli si avvicinano, trascinando la carta fino a che, esaurita la lunghezza prefissata, la tensione stessa della carta interrompe il trascinamento.

Si evitano così effetti d'inerzia e perciò di disuniforme velocità della registrazione, nonché spreco di carta.

La sorgente luminosa [(A) di fig. 3-48] può essere una normale lampada a incandescenza o, per registrazioni veloci, una lampada a vapori di mercurio ad alta pressione.

Capitolo IV

STRUMENTI ELETTRONICI

4-1. **Amplificatori di misura.**

4-1,1. *Aspetti generali.*

Le apparecchiature elettroniche vengono, di anno in anno, sempre maggiormente impiegate nelle misure, non solo nel campo delle alte frequenze, dove non possono essere sostituite da altri tipi di strumenti, ma anche per correnti continue e a bassa frequenza; esse presentano, anzi, per alcune applicazioni in questi campi, caratteristiche di precisione comparabili con quelle dei metodi di zero (vedi Capitolo VII), pur consentendo la maneggevolezza e la facilità di impiego proprie degli strumenti di misura a lettura diretta.

Si usa definire come elettronici quegli apparecchi di misura che impiegano circuiti anomali con sorgenti di alimentazione ausiliaria (escludendo cioè ad esempio gli strumenti a raddrizzatori).

Un apparecchio elettronico è pertanto riconducibile allo schema generale di fig. 4-1; all'ingresso si ha la grandezza x da misurare, che deve fornire una potenza P_1. Questa, grazie alle proprietà dei circuiti elettronici, può essere contenuta entro valori molto piccoli; la potenza P_2, associata al segnale di uscita e quella necessaria al funzionamento delle varie parti dell'apparecchio sono fornite praticamente solo dalla potenza P erogata dalla sorgente esterna. Le carat-

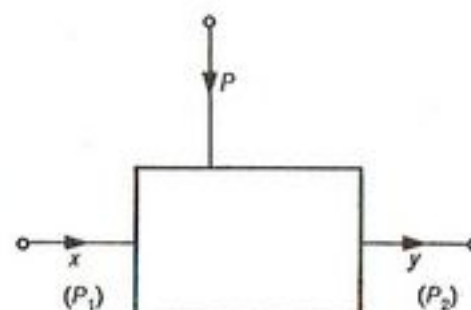



Fig. 4-1

teristiche di questa sorgente sono comprese fra le grandezze d'influenza o le sorgenti di disturbi propri dell'apparecchio.

I circuiti elettronici possono avere scopi diversi: negli strumenti analogici essi hanno generalmente il compito di amplificare il valore della grandezza d'entrata o della potenza che essa può erogare; negli strumenti numerici, essi provvedono alla conversione della grandezza da misurare in una serie di segnali, che vengono sottoposti a conteggio; possono inoltre dar luogo a diverse forme di conversione del segnale da misurare (conversione di frequenza, campionamento, ecc.) con tecniche particolari, che possono essere realizzate con l'elevata rapidità di risposta propria dei componenti elettronici.

Dal punto di vista costruttivo, si possono distinguere le apparecchiature a tubi elettronici, quelle a semiconduttori e quelle a circuiti integrati a diverso livello; queste differenze non si limitano solo agli aspetti costruttivi (ingombro, assorbimento di potenza, dissipazione di calore) ma hanno anche diretto riferimento alle caratteristiche di funzionamento e di precisione, in conseguenza del diverso grado di stabilità e di robustezza dei componenti, del diverso peso degli elementi parassiti, ecc.

L'evoluzione tecnologica ha permesso la costruzione in serie di questi apparecchi con un alto grado di affidabilità, ossia con una bassa probabilità di guasto per un lungo periodo di funzionamento, fattore questo molto importante, specie nelle applicazioni industriali.

4-1,2. *Amplificatori di misura.*

Un amplificatore di misura è un'apparecchiatura elettronica che consente di fornire, ad una coppia di morsetti d'uscita, una potenza elettrica i cui parametri (tensione o corrente) sono direttamente legati ai valori della tensione presente ai morsetti d'ingresso.

La funzione di trasferimento di un amplificatore ideale di tensione è:

$$\frac{V_u}{V_i} = G \qquad [4\text{-}1]$$

dove G è una costante, indipendente dalla forma del segnale, detto guadagno di tensione; esso viene spesso espresso anche in *decibel* (d*b*):

$$G(\text{d}b) = 20 \log \frac{V_u}{V_i}.$$

Analogamente possono definirsi dei guadagni in corrente o in potenza.

Per un'amplificatore reale il guadagno è funzione della frequenza secondo un andamento che determina la banda passante dell'amplificatore.

La funzione di trasferimento più semplice è del tipo:

$$G = \frac{G_0}{1 + pT}$$

che rappresenta un passabanda con amplificazione costante entro 3 db fino alla pulsazione $\omega = 1/T$.

In realtà, compaiono in uscita anche dei segnali con frequenze diverse da quella del segnale d'entrata (distorsione); ciò è dovuto alla non linearità delle caratteristiche dei circuiti attivi impiegati per l'amplificatore e costituisce un limite superiore per i valori delle tensioni d'ingresso e d'uscita.

Un limite inferiore è invece imposto dal rumore dovuto all'amplificatore stesso ed in particolare modo al suo stadio d'entrata (vedi 4-1,7).

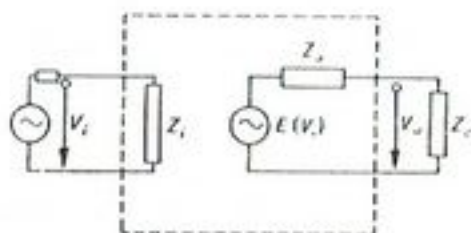



Fig. 4-2

Dal punto di vista circuitale, un amplificatore può ridursi allo schema equivalente di fig. 4-2; esso è caratterizzato, per quanto riguarda l'entrata, dall'impedenza Z_i che l'amplificatore presenta ai segnali d'ingresso; ai morsetti d'uscita si ha invece l'impedenza d'uscita Z_u e la f.e.m. E (a circuito aperto).

La f.e.m. E risulta, in uno stadio che funzioni con caratteristica lineare, proporzionale alla tensione V_i presente al suo ingresso; il fattore di proporzionalità dipende sia dalle caratteristiche proprie degli elementi anomali presenti nell'amplificatore, sia dai parametri dei circuiti ad essi collegati. In alcuni casi può essere conveniente una rappresentazione con sorgenti di corrente anziché di tensione.

L'impedenza d'ingresso Z_i è generalmente elevata e può essere convenientemente aumentata mediante l'impiego di circuiti di retroazione o con l'impiego di componenti speciali (tubi elettrometrici, transistori ad effetto di campo ecc.) fino a valori di $10^{10} \div 10^{15}$ ohm.

L'impedenza d'uscita Z_u è praticamente quella dell'ultimo stadio dell'amplificatore; essa è generalmente dell'ordine dei kΩ, ma può essere ridotta con una conveniente retroazione. Il massimo trasferimento di potenza su un carico d'impedenza Z_c si può realizzare con un'opportuna scelta

del rapporto Z_c/Z_u, o mediante un trasformatore che agisca come adattatore d'impedenza.

4-1,3. *Impiego della retroazione.*

Negli amplificatori elettronici si fa grande impiego della retroazione, per limitare l'influenza delle caratteristiche degli elementi impiegati, spesso fortemente variabili con le condizioni d'impiego, specie con la temperatura. Si realizzano così guadagni più limitati come valore, ma più costanti nel tempo e con minor distorsione; se la rete di retroazione è composta di pure resistenze, si ottiene anche una banda di frequenze più ampia.

Nello schema di fig. 4-3, in cui si effettua una retroazione di tensione H, la tensione V_i' sull'impedenza d'ingresso Z_i risulta:

$$V_i' = \frac{V_i}{1 + HG} \ll V_i\,;$$

nella stessa proporzione viene quindi ridotta la corrente d'ingresso, ossia appare aumentata l'impedenza d'ingresso dell'amplificatore.

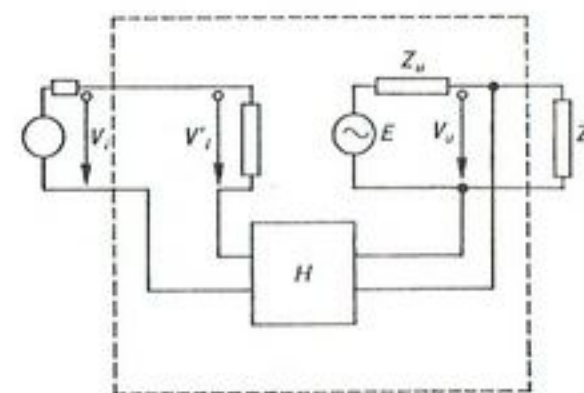



Fig. 4-3

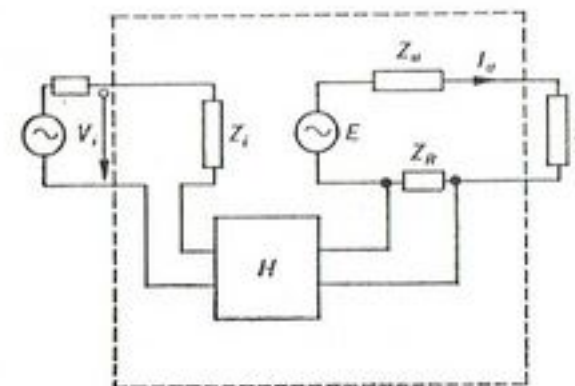
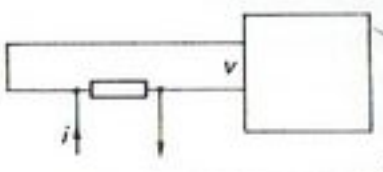
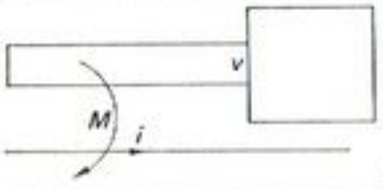
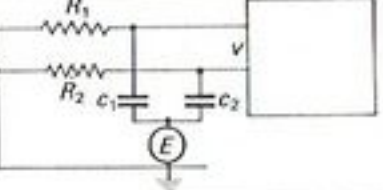
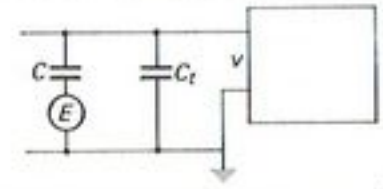
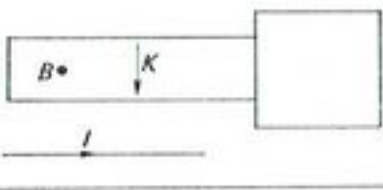
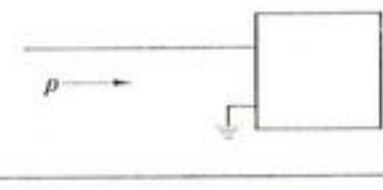
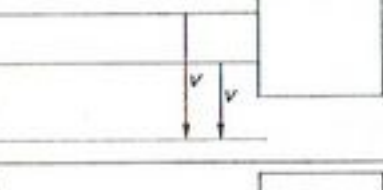
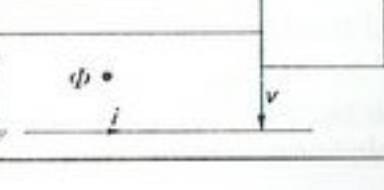



Fig. 4-4

Per quanto riguarda l'impedenza d'uscita, basta osservare che essa provoca una variazione ΔG nell'amplificazione, al variare della corrente assorbita dal carico; questa variazione viene ridotta dalla retroazione, sempre nel rapporto $(1 + HG)$.

In altri casi si usa una retroazione di corrente (fig. 4-4) che consente di ottenere una corrente d'uscita proporzionale alla tensione d'entrata ed indipendente praticamente dal carico. Ciò è molto utile, ad esempio, nel trasferimento a distanza di segnali.

4-1,4. *Limitazioni degli amplificatori di misura.*

Il comportamento di un amplificatore può essere influenzato da diversi fattori, quali la temperatura delle sue parti, l'ampiezza e frequenza dei segnali applicati, la presenza di fenomeni parassiti.

Le variazioni di temperatura comportano delle variazioni nei parametri dei tubi e dei transistori; per i primi, la temperatura di funzionamento è soprattutto legata al riscaldamento prodotto dai filamenti. È necessario che sia assicurato un efficace smaltimento del calore prodotto (spesso mediante ventilazione) e le misure possono essere eseguite, con la miglior precisione garantita, solo dopo un adeguato tempo dall'accensione. Per i transistori, più sensibili alla temperatura ma che dissipano potenze molto più piccole, si ricorre in genere a circuiti compensatori.

L'ampiezza massima dei segnali in un amplificatore dipende sia dal campo di funzionamento lineare dei suoi elementi, sia dalla massima potenza che esso può smaltire senza dar luogo a sensibili effetti di temperatura o addirittura al danneggiamento di qualche elemento circuitale.

Per funzionare in regime lineare, è necessario provvedere alla polarizzazione dei vari componenti attivi e quindi al trasferimento, da uno stadio all'altro dell'amplificatore, della sola componente relativa al segnale. Ciò comporta reti di accoppiamento che eliminano la componente costante dovuta alla polarizzazione, ma introducono una variabilità del guadagno in funzione della frequenza. A limitare la banda passante di un amplificatore concorre inoltre la presenza di capacità parassite che possono sussistere fra i vari terminali.

I segnali parassiti costituiscono un limite inferiore ai valori del segnale utile, nei vari stadi e principalmente nello stadio d'ingresso. Essi possono avere origine sia interna che esterna all'apparecchiatura stessa: fra i segnali di origine esterna (o interferenze) vanno segnalate le tensioni indotte, induttivamente o capacitivamente, dalla presenza di linee elettriche di potenza, o di apparecchi elettrici, specie se funzionanti a frequenza elevata o con forti correnti impulsive.

Tabella 4-1

a) circolazione di una corrente I nelle connessioni $v = Zi$ Z = impedenza di trasferimento delle connessioni)	*a*)
b) accoppiamento induttivo: $v = pMi$	*b*)
c) accoppiamento capacitivo con sorgente al potenziale E: $v = E/(1 + pC_1R_1) - E/(1 + pC_2R_2)$	*c*)
d) accoppiamento capacitivo di conduttore aperto: $v = EC/(C + C_t)$	*d*)
e) radiazione elettromagnetica di una corrente I a frequenza f (MH$_z$): $B \cong 4{,}2\ 10^{-9}\ I\ f\ (T)$ $K \cong 1{,}2\ I\ f\ (v/m)$	*e*)
f) potenza di rumore irradiata da un corpo alla temperatura (assoluta od equivalente) T sulla banda di frequenza B: $p \cong 1{,}4\ T\ B\ 10^{-23}$	*f*)
g) tensione di modo comune per impedenza di terra Z_t $v = Z_t i$	*g*)
h) tensione di modo comune per accoppiamento induttivo: $v = p\ \Phi\ 1$	*h*)

La Tabella 4-1 fornisce gli schemi semplificati che giustificano le principali cause d'interferenza; alcune di esse producono direttamente una tensione in ingresso (modo differenziale), mentre altre conducono ad un potenziale comune per entrambi i morsetti d'ingresso (modo comune). Questi schemi mostrano anche come, per una valutazione quantitativa e per predisporre adeguate protezioni, occorra considerare la distanza fra la sorgente di disturbo esterna e lo strumento, ed il modo del loro accoppiamento, che è particolarmente dovuto ai collegamenti, che vanno perciò accuratamente disposti (con conduttori intrecciati, cavi coassiali, connessioni corte, schermi, ecc.). A queste cause si aggiungono gli effetti della non equipotenzialità dei punti di terra (vedi 4-1,5); disturbi di origine interna sono il rumore e la deriva.

4-1,5. *Collegamenti a massa.*

Nella maggior parte degli strumenti elettronici ci si preoccupa di mettere « a massa » o « a terra » dei punti del circuito di misura, allo scopo di limitare i disturbi esterni. Le espressioni usate sono spesso generiche e non riflettono la reale importanza del problema.

Si consideri un apparecchio elettronico, completo della sua alimentazione, tutto contenuto entro un involucro metallico M (fig. 4-5); sia l'entrata che l'uscita (che hanno in comune il punto 3) presentano delle capacità rispetto ad M; in queste capacità possiamo in prima approssimazione conglobare l'effetto dei conduttori e dei vari elementi circuitali che compongono l'apparecchio.

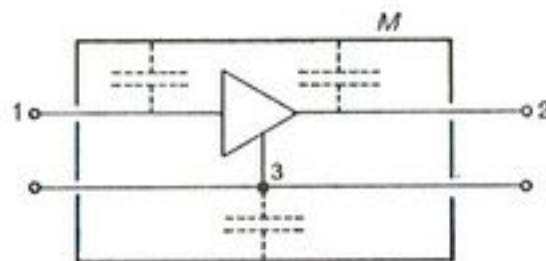



Fig. 4-5

Si riconosce chiaramente l'esistenza di un effetto di retroazione capacitiva fra l'uscita e l'ingresso, retroazione che può essere annullata connettendo il punto comune 3 all'involucro M. Questo involucro (detto generalmente massa dell'apparecchio) assume anche funzioni di schermo elettrostatico ed elettromagnetico rispetto ai campi esterni, sia a frequenza industriale, sia a frequenza elevata. Per essere efficaci, i collegamenti a massa devono essere percorsi da correnti trascurabili ed essere corti e a bassa impedenza.

Inoltre, perché i potenziali delle singole parti siano ben definiti ed indipendenti dalla presenza di oggetti o linee a diverso potenziale, si fa in modo che la massa sia vincolata al potenziale di terra, ossia collegata ad un elettrodo che sia a potenziale fisso, indipendentemente dalla circolazione in esso di correnti. Questo elettrodo è generalmente un'astra-

zione, che può essere realizzata in pratica con un'approssimazione tanto migliore quanto minori sono le cadute di tensione che vi sono prodotte dalla circolazione di correnti.

Uno schema di principio è quello di fig. 4-6. La grandezza da misurare è rappresentata dal generatore equivalente di tensione V con impedenza interna Z; uno dei suoi estremi è collegato alla massa e, tramite una impedenza Z_{ct}, alla terra (massa a potenziale zero). L'impedenza Z_{ct} si può generalmente ricondurre, in assenza di collegamenti diretti, ad una resistenza e ad una capacità fra loro in parallelo.

Lo stesso si può dire per l'apparecchio di misura. Nella « maglia di terra », formata da Z_{ct}, R_c, Z_{mt}, e Z_t, può sussistere una sorgente di tensione V_t che — a seconda delle situazioni — può assumere valori da qualche frazione a qualche centinaio di mV, in una banda più o meno ampia di frequenze. Si vede come, anche cortocircuitando il segnale utile V, si ha ai morsetti dell'impedenza Z_i dello strumento un segnale di disturbo proporzionale a V_t secondo un rapporto legato alle impedenze dei diversi rami delle maglie su cui si chiude V_t.

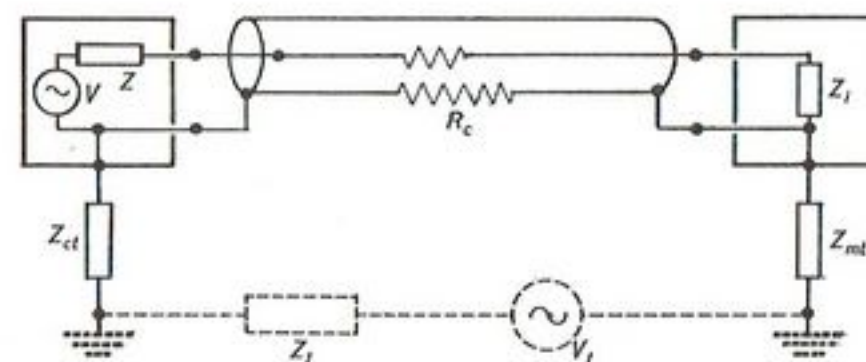



Fig. 4-6

Si potrebbe pensare di eliminare questo disturbo aprendo un collegamento verso terra (Z_{ct} o Z_{mt} infinito); ciò non è sempre possibile, per ragioni di sicurezza di funzionamento della rispettiva apparecchiatura, e per la presenza di capacità, in particolare verso la rete di alimentazione, che limitano il valore massimo raggiungibile per Z_{ct}, Z_{mt}.

Per limitare i disturbi dovuti alla circolazione di corrente nei collegamenti fra la massa dei diversi strumenti è allora necessario provvedere gli apparecchi di misura di un ulteriore schermo. L'insieme assume allora l'aspetto schematizzato in fig. 4-7 dove tutte le varie parti, comprese le connessioni, risultano schermate.

Se il segnale d'entrata è riferito ad un certo potenziale (ad es. quello del punto A in fig. 4-7), per limitare le correnti che circolano nello schermo

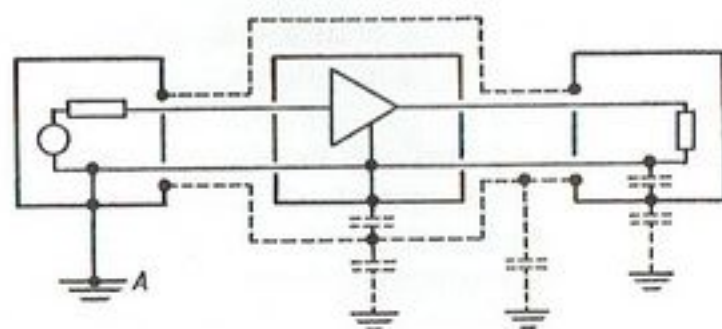



Fig. 4-7

ed evitare che esse circolino nei conduttori che portano il segnale d'ingresso, occorre che lo schermo sia collegato al punto A e solo a quello.

Quando non sia possibile avere una perfetta equipotenzialità nello schermo, una particolare cura deve essere posta affinché siano evitati segnali di disturbo nelle sezioni dove il segnale è ad un livello più basso.

Per quanto riguarda le alimentazioni che provengono dalla rete a f.i., si può limitare l'effetto di capacità, ma non eliminarlo del tutto, disponendo opportuni schermi fra gli avvolgimenti. Gli strumenti più delicati, quelli cioè che devono rivelare segnali molto piccoli, rispetto ai livelli di disturbo, sono perciò alimentati da sorgenti interne a batteria.

4-1,6. *Deriva.*

Per l'amplificazione di segnali continui o lentamente variabili, è necessario ricorrere ad amplificatori capaci di trasferire anche segnali continui, con schemi tali da presentare, all'uscita, una d.d.p. nulla, in assenza del segnale d'ingresso; in pratica, questa condizione non può però essere mantenuta per lungo tempo, perché le condizioni di funzionamento dei diversi elementi variano, più o meno lentamente, nel tempo. Si manifesta allora un lento slittamento della condizione di zero rilevata all'uscita (deriva) che può essere ricondotto ad un segnale parassita equivalente di bassa frequenza ai morsetti d'ingresso.

Talvolta, per limitare la deriva di un amplificatore per c.c., si effettua in esso una conversione da continua in alternata e, dopo l'amplificazione, un raddrizzamento da alternata in continua. Esistono anche particolari circuiti compensatori della deriva.

Analoghi fenomeni di deriva, di minore entità, possono presentarsi anche negli amplificatori in c.a. e, in generale, in ogni tipo di trasduttore comprendente elementi attivi. Essi sono tanto minori quanto minore è l'amplificazione alle basse frequenze.

4-1,7. *Rumore.*

Un limite alla precisione di uno strumento elettronico è sempre costituito dal suo livello di rumore, intendendo come tale ogni disturbo aleatorio che tende a mascherare il segnale d'ingresso. Il rumore ha diverse origini, la più importante delle quali è l'agitazione termica degli elettroni presenti nei conduttori che non siano alla temperatura dello zero assoluto: questo ed altri tipi di rumore possono rappresentarsi con un generatore equivalente che emette nella intera banda di frequenza Δf un segnale parassita di valore efficace E_n.

Ad esempio, un resistore reale R può essere meglio rappresentato, a temperatura ambiente, da uno schema del tipo di fig. 4-8 in cui è presente un generatore di rumore di tensione:

$$E_n = 0{,}13\ \sqrt{R\,\Delta f} \qquad nV; \qquad [4\text{-}2]$$

Fig. 4-8

il valore da picco a picco della tensione di rumore può essere assunto circa 5 volte il suo valore efficace.

La [4-2] mostra come il livello di rumore, all'ingresso di un amplificatore dipenda dalla resistenza della sorgente che lo alimenta e dalla banda di frequenza in cui opera l'amplificatore. Esistono anche altre sorgenti di rumore la cui intensità cresce al diminuire della frequenza, con una legge del tipo $1/f$.

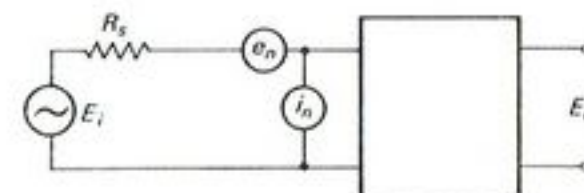



Fig. 4-9

Un amplificatore reale aggiunge, al rumore della sorgente, quello proprio delle sue parti. Esso può essere considerato come la risultante di un amplificatore ideale, privo di rumore, più un generatore di tensione di rumore e_n in serie, ed un generatore di corrente di rumore i_n collegato in parallelo (fig. 4-9). Se la sorgente che fornisce il segnale utile è dotata di resistenza interna R_s elevata, l'effetto predominante è generalmente quello del generatore di corrente; viceversa se la resistenza R_s è di valore basso.

Esiste in questi casi, dato l'amplificatore, una resistenza ottimale della sorgente, che si dimostra essere;

$$R_{s(ott)} = e_n/i_n$$

che non corrisponde, in generale, alla resistenza ottimale per l'adattamento in potenza. Talvolta, per migliorare l'adattamento al rumore, si usa in ingresso un opportuno trasformatore, che però può comportare altri inconvenienti (come interferenze indotte magneticamente, diminuzione della banda passante, ecc.).

In ogni caso, anche il rumore proprio dell'amplificatore può sempre ricondursi ad una sorgente equivalente all'ingresso, di valore efficace E_2, dimodoché la tensione totale di rumore E_t risulta:

$$E_t^2 = E_n^2 + E_2^2 .$$

Per rendersi conto dell'errore introdotto dal rumore, consideriamo la misura di una tensione di ingresso di valore efficace E_i; il valore di uscita sarà:

$$E_u = G\sqrt{E_i^2 + E_t^2} = GE_i\sqrt{1 + \frac{1}{d^2}}$$

con un errore che diminuisce al crescere del rapporto:

$$d = \frac{E_i}{E_t}$$

detto anche rapporto segnale/disturbo.

La riduzione del rumore costituisce quindi un problema importante, specie nella misura di segnali di piccola ampiezza o dove è richiesta una elevata precisione. Essa può essere ottenuta con tecniche varie, fra le quali si ricordano:

a) la riduzione della banda passante, quando ciò non interferisca con la buona trasmissione del segnale;

b) la modulazione del segnale su una frequenza portante più elevata, che può essere poi filtrata, eliminando in particolare il rumore del tipo $1/f$;

c) con i segnali ripetitivi, si usano metodi di integrazione, in cui la parte utile del segnale viene sovrapposta N volte, mentre il rumore, se di tipo bianco, cresce con $\sqrt{N}$. Analoghi risultati possono essere ottenuti con tecniche di correlazione.

4-1,8. *Amplificatori differenziali.*

Gli amplificatori differenziali sono caratterizzati da una coppia di morsetti d'ingresso, *ab*, distinti dalla massa *M* (fig. 4-10); analogamente si ha,

rispetto ad un riferimento non a massa, per la coppia di morsetti di uscita *AB*, uno dei quali è collegato a massa.

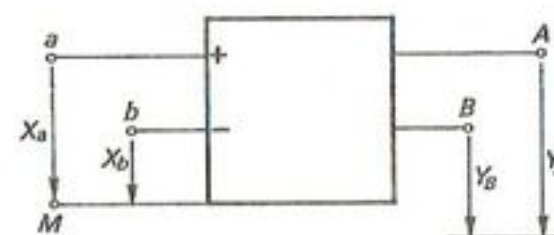



Fig. 4-10

Un amplificatore perfetto ha:

$$y_A - y_B = A_d(x_a - x_b)$$

indipendentemente dai valori di x_a e x_b; esso fornisce all'uscita *AB* un segnale che dipende solo dalla differenza delle tensioni ai morsetti *ab*; il guadagno A_d è detto guadagno di modo differenziale (D*M*).

In realtà il valore della grandezza d'uscita dipende anche dai valori di x_a e x_b, e non solo dalla loro differenza, a causa delle inevitabili dissimmetrie fra i canali di amplificazione e della non linearità dei dispositivi di amplificazione; si ha quindi:

$$y_A - y_B = A_d(x_a - x_b) + A_c(x_a + x_b) .$$

Si definisce come fattore di reiezione al modo comune il rapporto:

$$C = \frac{A_d}{A_c}$$

che, nei buoni strumenti differenziali deve essere dell'ordine di parecchie decine di d*b* (ossia $10^3 \div 10^4$). Esso si misura facilmente applicando la stessa grandezza d'entrata, prima fra i morsetti *ab* e poi fra questi morsetti, chiusi in comune, e la massa. Un amplificatore differenziale riduce nel rapporto *C* l'influenza di disturbi comuni ai segnali x_a e x_b.

L'uso di un amplificatore differenziale con un solo segnale d'ingresso fra *b* e massa (o fra *a* e massa) comporta in uscita un segnale di segno opposto (o dello stesso segno); tale disposizione si chiama configurazione invertente (o non invertente).

4-1,9. *Amplificatori operazionali.*

Un amplificatore operazionale è costituito da un amplificatore per c.c. a guadagno molto elevato ($10^5 \div 10^6$) e di grande impedenza d'ingresso, con opportuni circuiti all'ingresso e in retroazione. Esso permette di effettuare,

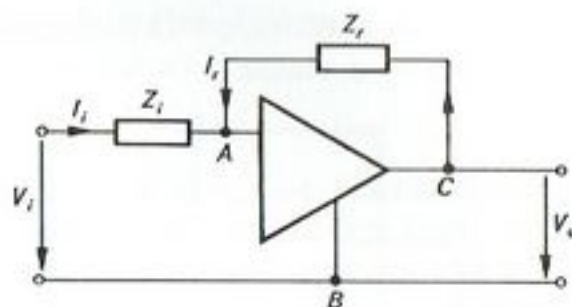



Fig. 4-11

con notevole precisione, varie operazioni (somma, integrazione, ecc.). Il principio di funzionamento può essere compreso facilmente, ammettendo le condizioni ideali (guadagno infinito) nello schema di fig. 4-11.

Ad una tensione V_u d'uscita finita corrisponde una tensione V_{AB} nulla; il punto A è quindi al potenziale zero. La corrente assorbita dall'amplificatore è pure nulla: si ha perciò:

$$\frac{\dot{V}_i}{\dot{Z}_i} = \dot{I}_i = -\dot{I}_r = -\frac{\dot{V}_u}{\dot{Z}_r}$$

e perciò:

$$\frac{\dot{V}_u}{\dot{V}_i} = -\frac{\dot{Z}_r}{\dot{Z}_i}. \qquad [4\text{-}3]$$

Il guadagno dipende perciò dalle sole impedenze $\dot{Z}_i$ e $\dot{Z}_r$ e, nel caso esse siano delle resistenze, risulta reale e negativo; con un'opportuna scelta delle Z_i si può invece realizzare una funzione di trasferimento di tipo prefissato, in particolare un filtro.

Fra le varie applicazioni ricordiamo:

a) *Sommatore* (fig. 4-12).

Applicando la [4-3] a n ingressi tutti resistivi si ha, per i valori istantanei:

$$i_1 + i_2 \ldots + i_n = -i_r$$

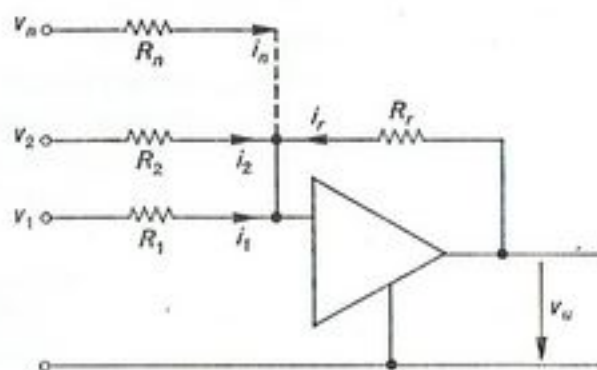



Fig. 4-12

e quindi:

$$v_u = -\left(\frac{R_r}{R_1}v_1 + \frac{R_r}{R_2}v_2 + \ldots \frac{R_r}{R_n}v_n\right)$$

Si ottiene cioè la somma pesata (in particolare la somma dei valori istantanei se tutte le R_i sono uguali) degli n segnali d'ingresso.

b) *Integratore*.

Nello schema di fig. 4-13, essendo:

$$i_1 = \frac{v_i}{R} \qquad i_r = C\frac{dv_u}{dt}$$

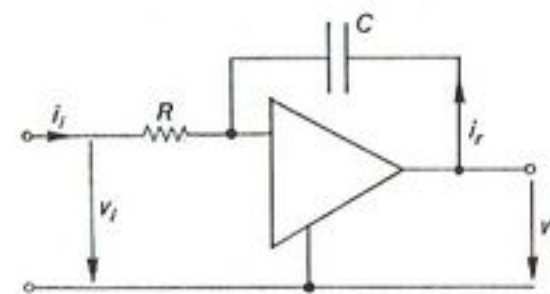



Fig. 4-13

si ottiene:

$$v_u = -\frac{1}{RC}\int v_i\,dt\,;$$

la tensione di uscita è perciò proporzionale all'integrale della tensione d'ingresso; in particolare si ottiene, da un ingresso continuo, un'uscita linearmente crescente nel tempo (rampa).

c) In generale, se fra il punto C e il punto A dello schema di fig. 4-11 inseriamo una rete che comporti una corrente i_r secondo una qualsivoglia funzione di V_u:

$$i_r = f(V_u)$$

mentre la corrente d'ingresso è $i = V_i/R$, si ha:

$$V_u = -f^{-1}(V_i/R)$$

ossia la tensione d'uscita è legata alla tensione d'ingresso dalla funzione inversa di quella che lega V_u a i_r.

Si possono, in questo modo, ottenere filtri con particolari funzioni di trasferimento; è però più interessante l'uso di circuiti non lineari.

Per esempio, con un diodo a giunzione, in cui, in una particolare zona di funzionamento, è:

$$i = a e^{-(bV_u)},$$

si ottiene un amplificatore logaritmico, tale cioè da realizzare la relazione:

$$V_u = -b \ln (V_i/V_{i0});$$

un tale amplificatore consente di eseguire prodotti, quozienti, elevamenti a potenza ecc.

Usando nel circuito di retroazione un componente che vari la sua resistenza in funzione di una tensione esterna V_c, si ottiene un amplificatore a guadagno variabile, comandato da V_c. Sullo stesso principio funzionano gli amplificatori a guadagno programmabile.

d) Isolatore.

Nel circuito di fig. 4-14, un amplificatore operazionale ad entrata differenziale ha la tensione di uscita direttamente riportata ad un ingresso; essendo:

$$V_u = G(V_1 - V_2) = G(V_1 - V_u)$$

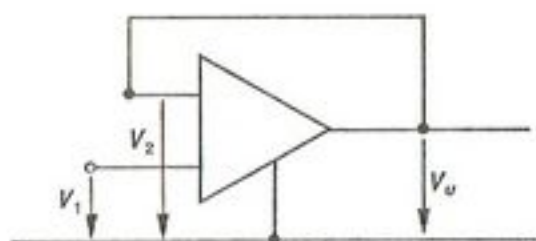



Fig. 4-14

si ha:

$$V_u = \frac{G}{1+G} V_1 \simeq V_1 \qquad \text{quando } G \simeq \infty .$$

L'amplificatore ha guadagno positivo unitario; si dimostra che ha anche, nella ipotesi di $G = \infty$, impedenza di entrata infinita e impedenza d'uscita nulla ([1]).

([1]) In generale, la funzione di trasferimento di un amplificatore operazionale, con due ingressi (uno + ed uno −, ossia uno non invertente ed uno invertente) si calcola imponendo alla rete che collega i vari terminali le condizioni:

$$i_+ = i_- = 0; \qquad v_+ = v_-;$$

conseguenti all'ipotesi di guadagno infinito.

Nel circuito di fig. 4-15 supponiamo che i due amplificatori siano collegati come isolatori (guadagno +1) pur essendo, per semplicità, non rappresentata la relativa connessione; essendo:

$$\dot{I}_i = -\dot{I}_c = -j\omega C(\dot{V}_u - \dot{V}_i)$$

e d'altra parte:

$$\dot{V}_u = (1-\alpha)\dot{V}_i$$

si ottiene:

$$\dot{I}_i = j\omega\alpha C\dot{V}_i .$$

L'impedenza d'ingresso del sistema è quindi simile a quello di una capacità αC, variabile spostando il cursore sul potenziometro R.

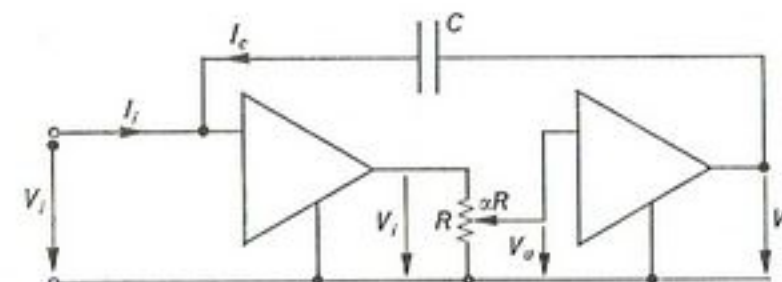



Fig. 4-15

I limiti di funzionamento degli amplificatori operazionali non sono imposti, in pratica, dalla realizzabilità delle ipotesi di guadagno e impedenza d'ingresso infiniti; essi sono piuttosto dovuti alla presenza di segnali parassiti in ingresso, che possono essere configurati come generatori di f.e.m. e di corrente ai morsetti d'entrata. Questi generatori, che agiscono anche in assenza di segnale impresso (*offset*), richiedono sistemi di compensazione piuttosto complessi, data la loro natura, spesso di tipo aleatorio, e la loro dipendenza, per esempio, dalla temperatura.

4-2. **Strumentazione elettronica analogica.**

4-2,1. *Voltmetri elettronici.*

Un voltmetro elettronico è costituito, nella maggior parte dei casi, da un amplificatore elettronico e da uno strumento elettromeccanico di uscita. L'amplificatore fornisce allo strumento una corrente continua proporzionale al segnale d'ingresso da misurare; lo strumento è perciò, in generale, un milliamperometro magnetoelettrico. Per realizzare strumenti a portate

multiple, l'amplificatore è generalmente preceduto da un divisore a più rapporti.

Le principali caratteristiche di un simile apparecchio sono l'elevata impedenza d'ingresso, la banda di frequenza possibile per i segnali in c.a., l'elevata amplificazione, che ne consente l'impiego in campi non raggiungibili dagli strumenti elettromeccanici.

La precisione che si raggiunge è, nella grande maggioranza dei casi, nell'ambito di qualche percento.

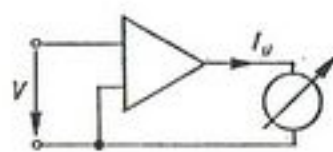
4-2,2. *Voltmetri per tensioni continue.*

Per la misura di tensioni continue non troppo piccole, si impiegano generalmente schemi del tipo di fig. 4-16 che utilizzano amplificatori a banda limitata, di elevata stabilità con resistenza d'ingresso fino a $10^8 \div 10^{10}$ Ω.

Essi hanno tuttavia un limite inferiore di tensione (dell'ordine dei decimi di volt) al di sotto del quale si fa sentire in modo sensibile la deriva.

Fig. 4-16

Per la misura di tensioni continue di valore inferiore (millivoltmetri, microvoltmetri) si devono impiegare opportuni amplificatori con convertitore continua-alternata; la ristretta banda di frequenza di tali amplificatori riduce l'effetto del rumore ed elimina, per la sua bassa frequenza, la deriva, consentendo di misurare tensioni fino a 10^{-9} V.

Con questi strumenti si possono realizzare anche amperometri e rivelatori di zero, con sensibilità fino a $10^{-12} \div 10^{-14}$ A/div.

4-2,3. *Voltmetri per c.a.*

Negli strumenti per la misura del valore di cresta (vedi 5-4,2) o del valore medio (vedi 5-4,1) di una tensione alternata, la semplice introduzione di un amplificatore, nel primo caso per c.c. (fig. 4-17 *a*), nel secondo per c.a. (fig. 4-17 *b*), consente di ottenere le portate e l'impedenza d'ingresso desiderate; questi strumenti hanno, naturalmente, le stesse caratteristiche degli elementi di cui sono composti (voltmetri di cresta o a valore medio).

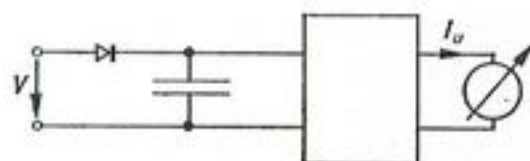



Fig. 4-17 *a*

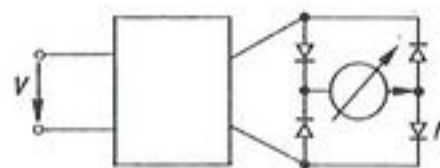



Fig. 4-17 *b*

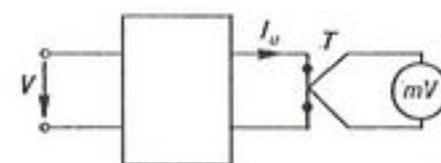
Lo schema più comune è quello a valore medio, con larga banda di frequenze (fino a qualche MHz) per tensioni fino a 1 mV; particolare cura deve esser posta nel divisore d'ingresso, perché esso risulti fedele su tutta la gamma di frequenze, nelle varie posizioni del commutatore, che possono essere influenzate dall'impedenza d'ingresso del primo stadio.

Normalmente l'impedenza d'ingresso del voltmetro non supera i 10 MΩ, con in parallelo qualche decina di pF.

Fig. 4-18

In generale la scala di tutti gli strumenti indica il valore efficace, per onde sinusoidali. Più rari sono gli strumenti che misurino realmente il valore efficace; essi si basano su una rivelazione di tipo quadratico, in uscita dell'amplificatore (fig. 4-18); questo rivelatore può essere costituito da una termo coppia o da appositi generatori di funzione a diodi.

La precisione di tali dispositivi può essere aumentata mediante l'impiego di opportuni schemi di retroazione. In quello di fig. 4-19 la f.e.m. prodotta dalla termocoppia T_1 è compensata, tramite l'amplificatore c.c. ad alto guadagno G_2, da quella fornita da un'identica termocoppia T_2. La misura è perciò fornita dalla lettura della corrente che percorre T_2.

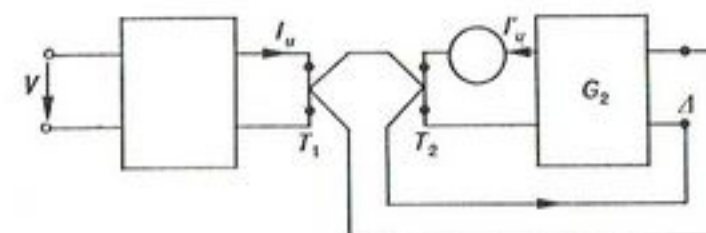



Fig. 4-19

4-2,4. *Voltmetri selettivi. Analizzatori.*

Se, in un voltmetro elettronico a valor medio, del tipo precedentemente descritto, si impiega un amplificatore con una banda di frequenza molto ristretta intorno al valore f_0, lo strumento indica solo il valore delle componenti di frequenza f_0.

Per ottenere diversi valori noti di f_0, con una buona selettività, si impiega un filtro nel circuito di reazione, che elimina la retroazione alla frequenza f_0; spesso tali filtri sono, specie per basse frequenze, del tipo a doppio *T* (vedi 7-6,5) con capacità o resistenze variabili sui vari lati.

In altri casi, si genera nello strumento una tensione di frequenza variabile f_e che va a modulare la tensione da misurare; l'onda risultante è appli-

cata ad un amplificatore accordato sulla frequenza fissa f_0; in tal modo viene misurata solo la componente a frequenza f tale che sia:

$$f_e - f = f_0 .$$

La selettività può essere resa elevata con l'uso di filtri a quarzo, essendo f_0 costante; la frequenza di misura viene modificata agendo su f_e.

Mediante un voltmetro selettivo a frequenza variabile è possibile eseguire l'analisi armonica di un'onda deformata (analizzatori d'onda) determinando separatamente l'ampiezza delle diverse componenti.

Alcuni sistemi consentono di tracciare l'intero spettro di un segnale composto, con la diversa intensità delle varie componenti.

4-2,5. *Wattmetri elettronici.*

Sistemi wattmetrici elettronici possono ottenersi mediante circuiti moltiplicatori analogici (vedi 4-1,9) che non consentono tuttavia di ottenere buone precisioni, specie per misure a basso fattore di potenza. Migliori risultati hanno dato i sistemi a divisione di tempo (vedi 5-5,6), con i quali si sono costruiti wattmetri e contatori per frequenza industriale che rispondono ai requisiti della classe 0,1.

Il circuito di fig. 4-20 corrisponde invece ad un'estensione del principio illustrato in 1-4,2, perché sovrappone alle due grandezze alternative a, b, una tensione continua C, usando solo circuiti sommatori e quadratori ed un dispositivo finale per ottenere il valore medio. Risulta:

$$\frac{1}{T}\int_0^T ((a-b+C)^2-(a+b)^2)\,\mathrm{d}t = C^2 - 4\frac{1}{T}\int_0^T ab\,\mathrm{d}t\,;$$

lo strumento segna zero quando il valore medio del prodotto ab uguaglia $C^2/4$. Questa uguaglianza si può facilmente ottenere con un circuito a retroazione.

Con un'opportuna scelta degli elementi quadratori e del sistema di rivelazione e retroazione (lo stesso convertitore termico è commutato sulle

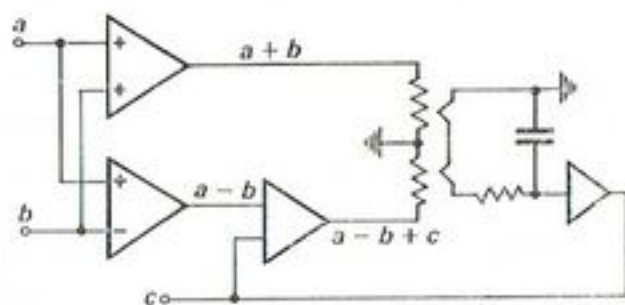



Fig. 4-20

due uscite e viene rivelata la assenza di variazione di segnale nella commutazione), si sono ottenuti, con questo schema, wattmetri di alta precisione (errori di qualche ppm sul fondo scala) alle frequenze industriali, con riferimento alla misura della tensione continua C, che può essere confrontata con il campione di f.e.m.

Si noti che lo strumento può servire a misurare non solo potenze, ma anche tensioni e correnti (con adeguati derivatori resistivi) in valore efficace, costituendo così uno strumento di trasferimento fra le misure in continua e quelle in alternata.

4-2,6. *Rivelatori di zero elettronici.*

La possibilità degli strumenti elettronici di misurare tensioni e correnti molto piccole li rende adatti a costituire dei rivelatori di zero; essi raggiungono infatti sensibilità molto più elevata degli altri rivelatori di zero per corrente alternata (cuffia telefonica e galvanometri a vibrazione) e, nelle realizzazioni più recenti, anche dei rivelatori di zero per c.c., con i vantaggi di alta impedenza interna.

Nell'uso in c.a. la selettività è assicurata da opportuni circuiti filtro; l'amplificazione è regolabile per ridurre la sensibilità fuori dall'equilibrio; i circuiti sono accuratamente schermati per eliminare l'effetto delle capacità parassite. Molti di questi rivelatori di zero hanno alimentazione autonoma a batteria, per evitare i disturbi che l'alimentazione dalla rete può comportare (rumore, variazioni e ondulazioni sulle tensioni di alimentazione, accoppiamenti induttivi e capacitivi).

Il limite di sensibilità viene generalmente imposto dalla presenza di rumore e di disturbi esterni; come si è visto in 4-1,7 la tensione di rumore dipende sostanzialmente dalla resistenza delle sorgenti e dalla banda di frequenza.

Per rivelatori in c.c. si potrebbe pensare di ridurre la banda utile di frequenza, ma ciò comporta lentezza dello strumento con conseguente difficoltà di raggiungimento dell'equilibrio e maggiore influenza della deriva.

4-2,7. *Altri strumenti elettronici.*

Mediante l'impiego di opportuni schemi, si realizzano altri tipi di strumenti elettronici di caratteristiche particolari; fra i più usati ricordiamo i voltmetri a banda pesata, cioè voltmetri con prefissate funzioni di trasferimento non uniformi nella banda di frequenze volute; i distorsiometri, che eliminano dal segnale la componente fondamentale, misurando solo il residuo delle armoniche; i voltmetri ad uscita logaritmica; i voltmetri per impulsi, ecc.

Per avere degli amperometri, si dispone generalmente uno shunt resistivo, sul quale si misura la caduta di tensione, provocata dalla corrente da misurare; l'uso di un amplificatore ad elevato guadagno, controreazionato (fig. 4-21) consente di ridurre a valori minimi il consumo dello strumento, evitando gli errori dovuti alle componenti reattive dello shunt o alla capacità d'ingresso dello strumento.

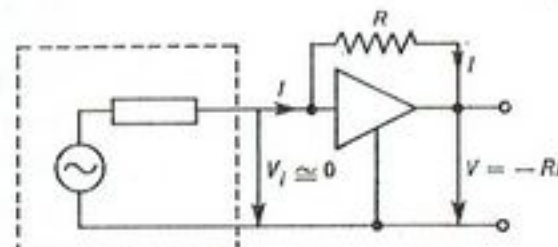



Fig. 4-21

Con semplici circuiti elettronici si realizzano anche ohmmetri, in vasti campi di valori.

Altri tipi di strumenti possono essere costruiti su principi diversi, in particolare utilizzando i circuiti elettronici come interruttori comandati, o come multivibratori. Un esempio semplice è fornito dai frequenzimetri, nei quali un multivibratore funziona ad ogni periodo della frequenza da misurare, producendo un segnale di corrente di area costante. Il valore medio della corrente d'uscita risulta perciò proporzionale alla frequenza da misurare.

In modo analogo funzionano dei fasometri.

4-2,8. *Amplificatori di carica.*

Si consideri lo schema di fig. 4-22; una qualsiasi variazione dq della carica presente sul condensatore C_1 richiama una analoga variazione di carica nel condensatore C ossia una variazione di tensione di uscita:

$$-\mathrm{d}e = \frac{1}{C}\mathrm{d}q$$

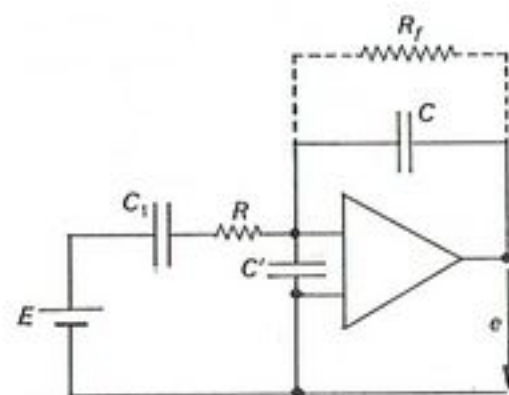



Fig. 4-22

La variazione di carica all'ingresso può essere dovuta sia a variazioni della tensione continua E, sia a variazioni della capacità C_1, sia a produzione di carica su di essa per effetto, ad esempio, piezoelettrico.

Lo schema permette di misurare variazioni di carica, rendendole indipendenti dalla capacità C' esistente all'ingresso dell'amplificatore (p. es. dei cavi che collegano C_1 all'amplificatore).

È in genere necessaria una resistenza di retroazione R_f per evitare che l'integrazione della deriva porti l'amplificatore in saturazione.

4-3. **Oscilloscopio a raggi catodici.**

4-3,1. *Uso dell'oscilloscopio.*

L'oscilloscopio a raggi catodici (o.r.c.) è attualmente uno degli apparecchi più versatili e di più largo impiego; esso consente di rappresentare graficamente, in funzione del tempo, svariate grandezze elettriche, comunque sia complessa la loro forma, in un campo molto vasto di frequenze.

Le informazioni fornite sulla grandezza misurata sono perciò molto più numerose di quelle ottenibili da un qualsiasi strumento indicatore e sono soprattutto presentate in una forma semplice, che spesso non richiede elaborazione o interpretazione.

L'utilità dell'uso di un oscilloscopio cresce a mano a mano che si misurano grandezze di forma non semplice, ossia non sinusoidali, o transitorie come è sempre più frequente nelle applicazioni tecniche e nelle ricerche.

I moderni oscilloscopi sono veri e propri strumenti di misura, in quanto alle loro indicazioni corrispondono valori garantiti entro prefissati limiti d'errore della grandezza in esame e degli intervalli di tempo, secondo diverse portate commutabili dall'esterno. Essi sono costituiti dal tubo a raggi catodici, che serve da organo di visualizzazione, da una serie di amplificatori per la grandezza da misurare e di base di tempi per la sua scansione in funzione del tempo, con opportuni dispositivi di sincronizzazione e comando.

Associando all'o.r.c. delle tecniche digitali di memorizzazione ed elaborazione del segnale (vedi 4-7) si ottengono strumenti che forniscono, del segnale misurato, contemporaneamente un'immagine visiva ed una caratterizzazione numerica (valori istantanei, intervalli di tempo, valori medi, efficaci, spettri di frequenza, ecc.).

4-3,2. *Caratteristiche del tubo a r.c.*

Il tubo a raggi catodici è costituito da un recipiente a vuoto spinto (fig. 4-23) nel quale un filamento riscaldato emette elettroni; questi, accelerati da un opportuno campo elettrico e focalizzati da un sistema di lenti elettrostatiche, in modo da costituire un fascio sottile, vengono inviati su uno schermo fluorescente, dove producono un punto luminoso.

Se il fascio di elettroni viene sottoposto, durante il suo percorso, ad un campo elettrico (o magnetico) normale alla direzione del moto, esso modifica la sua traiettoria, dando luogo ad uno spostamento del punto luminoso sullo schermo. Questo spostamento può essere facilmente calcolato, in

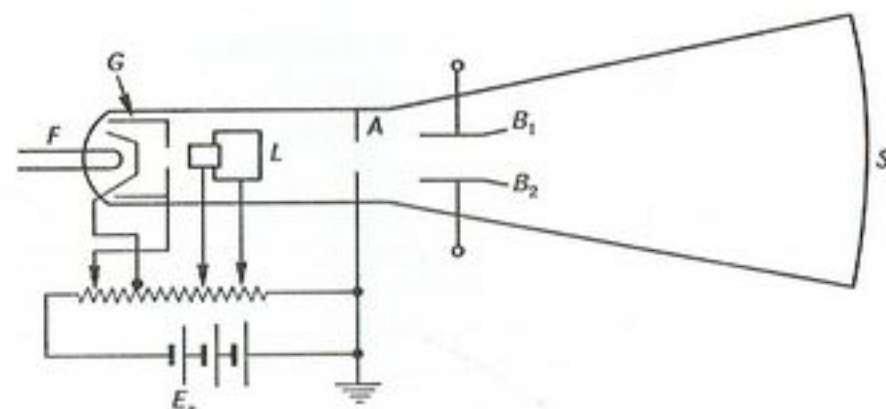



Fig. 4-23

Tubo a raggi catodici: F = filamento emettitore; G = griglia; L = lenti elettrostatiche; A = anodo; B_1, B_2 = placche deviatrici; S = schermo fluorescente; E_a = sorgente di tensione continua di accelerazione e focalizzazione.

prima approssimazione, con le seguenti considerazioni (fig. 4-24): l'elettrone, di carica e e massa m, possiede, una volta oltrepassato l'anodo A che gli ha fornito il lavoro eE, la velocità v_0, ricavabile dalla relazione:

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = eE \,;$$

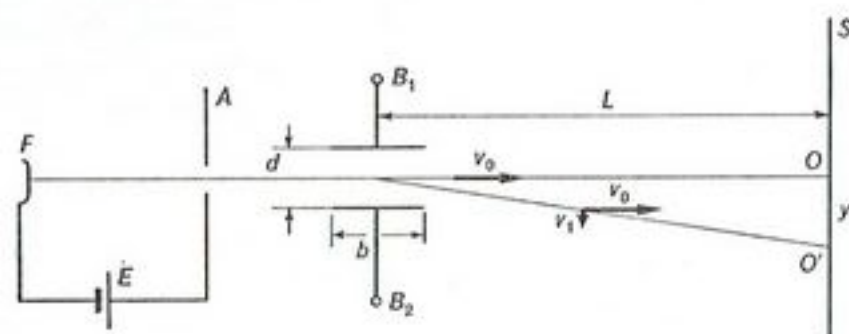



Fig. 4-24

per effetto di questa velocità (che è dell'ordine dei 10^7 m/s) l'elettrone attraversa lo spazio b, interessato dagli elettrodi $B_1 B_2$ (placche di deflessione) nel tempo:

$$t = \frac{b}{v_0} \,;$$

se agli elettrodi è applicata una tensione V che crea un campo uniforme V/d, l'elettrone è assoggettato, durante il tempo t, ad una forza, e quindi ad un'accelerazione:

$$a = \frac{eV}{md} \,;$$

esso acquista quindi una velocità v_1, normale alla sua traiettoria iniziale:

$$v_1 = at = \frac{e}{m} \frac{V}{d} \frac{b}{v_0} \,.$$

Nella traiettoria successiva, che prosegue rettilinea, l'elettrone incontrerà lo schermo non più nel punto O, ma nel punto O', per cui è:

$$y = \frac{v_1}{v_0} L = \frac{e}{m v_0^2} \frac{bL}{d} V = \frac{bL}{2dE} V \,. \qquad [4\text{-}4]$$

La deviazione sullo schermo risulta quindi proporzionale alla tensione V applicata alle placche di deflessione, secondo un fattore che dipende dalle dimensioni geometriche del tubo ed è inversamente proporzionale alla tensione anodica E (tensione di accelerazione). Con tensioni di accelerazione dell'ordine dei kV si ottengono costanti strumentali di qualche volt per millimetro.

Analogamente si può calcolare l'effetto di un campo magnetico normale al piano del disegno; la deviazione y risulta proporzionale all'induzione B (supposta uniforme sulla lunghezza b) ed inversamente proporzionale alla velocità v_0 e quindi a $\sqrt{E}$; si possono ottenere deviazioni di alcuni millimetri con induzioni dell'ordine di 10^{-4} T.

La relazione [4-4], fra la deviazione y e la tensione V, è valida anche per i valori istantanei, poiché il raggio elettronico non possiede inerzia apprezzabile. La tensione deve però restare praticamente costante per lo intervallo di tempo t durante il quale l'elettrone attraversa le placche deflettrici; questo tempo è dell'ordine di 10^{-9} s e consente quindi di impiegare la [4-4] per frequenze fino a circa 10^8 Hz.

La capacità di una coppia di placche deflettrici è dell'ordine di alcuni picofarad; il tubo a raggi catodici presenta così i vantaggi di consumo ridotto e di largo campo di frequenze d'impiego, propri degli strumenti elettrostatici, a cui infatti può assimilarsi.

4-3,3. *Impiego del tubo a r.c. negli oscilloscopi.*

Le proprietà del tubo a raggi catodici sono per lo più sfruttate utilizzando due coppie di placche deflettrici, agenti secondo due assi ortogonali; a queste placche vengono applicate due tensioni, rispettivamente V_x e V_y, che risultano, attraverso opportuni sistemi di misura, proporzionali a due diverse grandezze. Il punto luminoso descrive perciò sullo schermo una curva che esprime la relazione fra queste due grandezze. I valori delle coordinate della curva possono essere dedotti, sia attraverso una registra-

zione fotografica sia attraverso una lettura diretta, se l'immagine luminosa sullo schermo è sufficientemente persistente, o se viene ripetuta periodicamente, in modo da apparire permanente.

Fra le più comuni applicazioni del tubo a raggi catodici, comandato su due assi da due grandezze generiche, possiamo citare il tracciamento delle caratteristiche di componenti non lineari (tubi elettronici, scaricatori, mate-

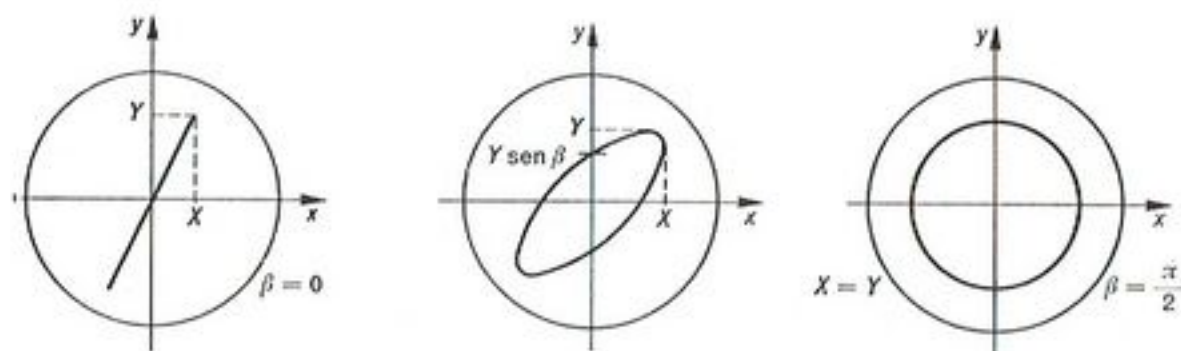



Fig. 4-25

riali magnetici); il confronto in ampiezza e fase di due tensioni sinusoidali isofrequenziali $X \operatorname{sen} \omega t$ e $Y \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$, che danno luogo ad ellissi (figura 4-25); il confronto della frequenza di due tensioni sinusoidali $X \operatorname{sen} \Omega t$ e $Y \operatorname{sen} \omega t$, per mezzo delle figure di Lissajous (fig. 4-26) ecc.

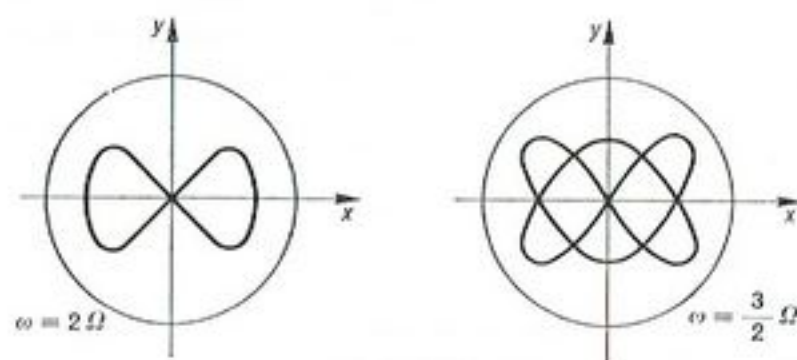



Fig. 4-26

Nella maggior parte delle applicazioni, si vuole invece esaminare l'andamento della V_y nel tempo; si applica perciò all'asse x una tensione variabile linearmente nel tempo. Se V_y è una funzione periodica, di periodo T, la V_x può avere la forma di fig. 4-27, con periodo AC multiplo intero di T; nel tratto da A a B, il raggio percorre tutta la larghezza dello schermo, con velocità uniforme; nel tratto BC esso torna rapidamente indietro, per ricominciare il ciclo; durante questo intervallo la luminosità è attenuata, applicando una tensione negativa ad un elettrodo del tubo (fig. 4-28).

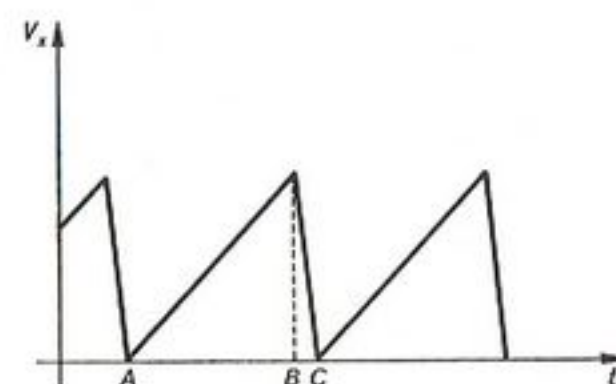



Fig. 4-27

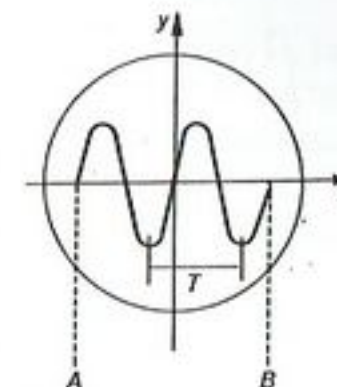



Fig. 4-28

Se la V_y ha un andamento transitorio, l'asse dei tempi deve far percorrere al raggio tutta la lunghezza dello schermo in un tempo AB prefissato per poi tornare in posizione di riposo (figg. 4-29 e 4-30).

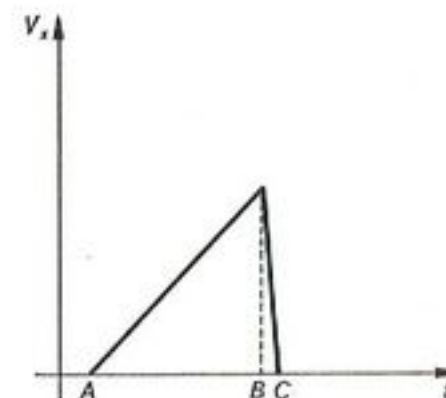



Fig. 4-29

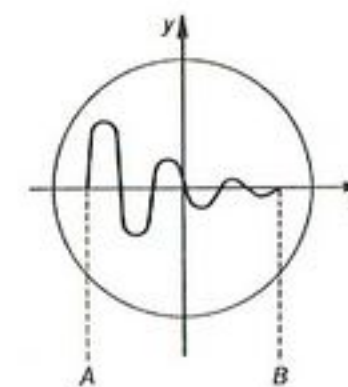



Fig. 4-30

4-3,4. *Base dei tempi e sincronizzazione.*

La tensione V_x dell'asse dei tempi è generalmente fornita da un generatore incorporato nell'oscilloscopio stesso (base dei tempi o generatore a denti di sega) sostanzialmente un generatore di tensione a rampa [4-1,9*b*].

La durata del tempo di spazzolamento AB è fissata dai parametri del circuito stesso, mentre il comando d'inizio dello spazzolamento è fornito da un apposito segnale (sincronizzazione). La tensione V_x ha allora l'andamento di fig. 4-31, dove possono essere variati indipendentemente gli intervalli di tempo AB e BA', agendo rispettivamente sui parametri del generatore di denti di sega e sul dispositivo di sincronizzazione; durante il tempo BA' la luminosità del raggio viene soppressa. Ciò consente di osservare la parte di un fenomeno che maggiormente interessa, con la velocità di spazzolamento più opportuna, come mostra l'esempio della fig. 4-32.

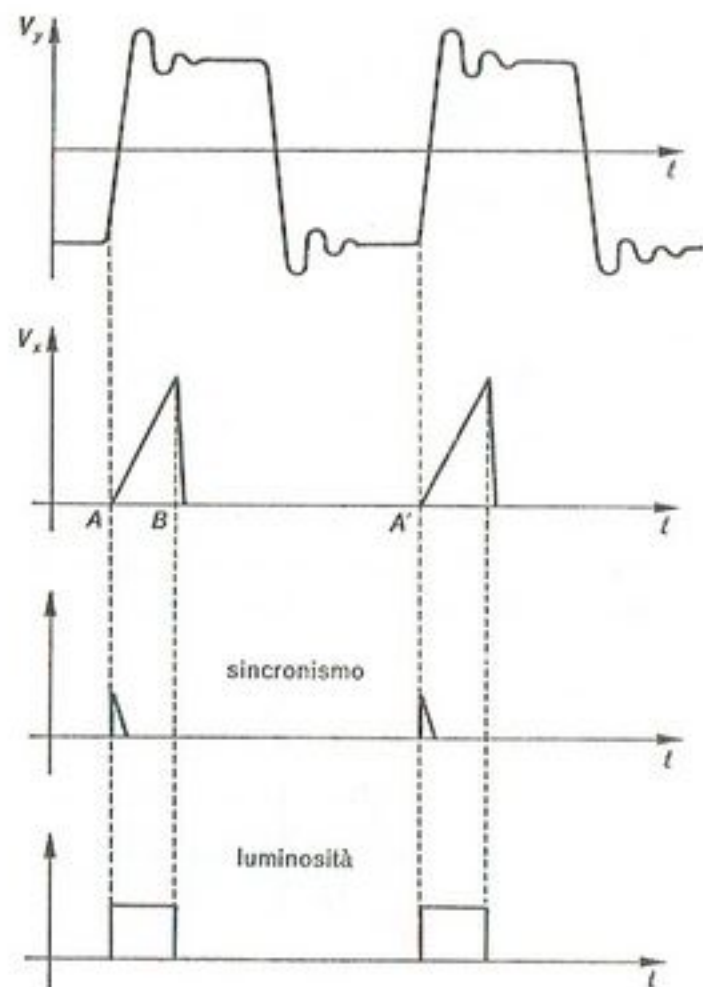
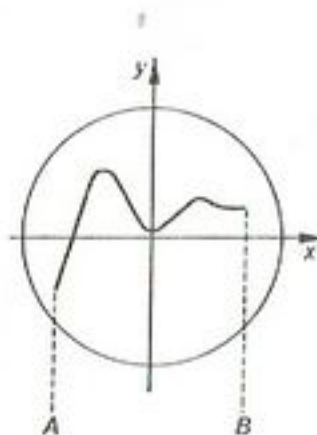



Fig. 4-31

Fig. 4-32

È in ogni caso evidente che l'osservazione di un fenomeno sullo schermo dipende dalla possibilità di comandare al momento voluto l'inizio dello spazzolamento. Se la grandezza da osservare è costituita da un transitorio singolo, è infatti necessario che lo spazzolamento inizi contemporaneamente all'applicazione alle placche deflettrici della tensione V_y; se la tensione da osservare è periodica, occorre che l'inizio dello spazzolamento avvenga sempre nello stesso istante del periodo, al fine di ottenere sullo schermo un'immagine permanente. La flessibilità d'impiego di un oscilloscopio risulta di conseguenza legata alle qualità di precisione e stabilità dei circuiti in esso impiegati per la sincronizzazione. Questa viene comandata, in generale, o su un segnale esterno, o dallo stesso segnale V_y, o da un segnale prelevato dalla rete di alimentazione dell'oscilloscopio; deve però essere in grado di discriminare, in segno e in ampiezza i segnali applicati o le loro derivate, in modo da poter realizzare un riferimento stabile con la particolare caratteristica del fenomeno che si vuole osservare.

Per i transitori singoli e in genere per quelli che si verificano in tempi dell'ordine dei microsecondi, è necessario fornire un segnale di sincronizzazione con un certo anticipo (0,2-0,3 μs) rispetto all'applicazione alle placche della V_y, per dar modo ai circuiti dell'asse dei tempi di iniziare lo spazzolamento. Ciò si può ottenere facendo percorrere al segnale una linea di ritardo naturale (cavo) o artificiale, di caratteristiche tali che la propagazione del segnale lungo essa introduca, senza causare eccessive distorsioni, il ritardo desiderato (fig. 4-33).

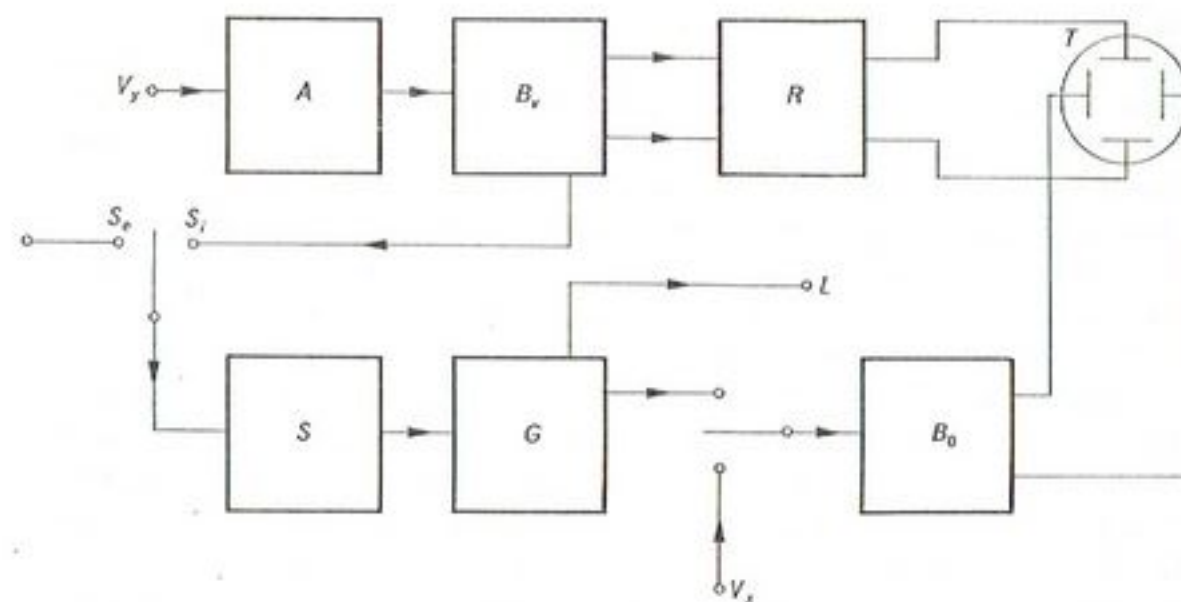



Fig. 4-33
Schema di oscilloscopio a r.c. A = attenuatore variabile o preamplificatore; B_v = amplificatore verticale; B_0 = amplificatore orizzontale; R = linea di ritardo; S = generatore di sincronismo; G = generatore per la base dei tempi; L = comando della luminosità; T = tubo a r.c.

4-3,5. *Principali caratteristiche costruttive.*

Particolare cura deve essere posta nella focalizzazione del raggio, mediante i sistemi di lenti elettrostatiche (o, più raramente, magnetiche) al fine di ottenere sullo schermo un punto di dimensioni ridotte ($< 0,1$ mm); la luminosità di tale punto può essere regolata agendo sul potenziale di una griglia (cilindro di Wehnelt, G in fig. 4-23) negativa rispetto al catodo, che è in grado di limitare il numero di elettroni capaci di raggiungere l'anodo.

La tensione anodica è in genere dell'ordine di qualche kV; per ottenere luminosità elevate, si ricorre, in alcuni tipi di oscilloscopi, ad una tensione di postaccelerazione (applicata fra l'anodo e schermo) fino ad alcune decine di kV.

Si ricorre perciò a sonde ad alta impedenza che agiscono come attenuatori distribuiti lungo il cavo di collegamento (fig. 4-34). Sono adottate anche sonde attive che consentono collegamenti in cavo molto lunghi. Gli oscilloscopi sono generalmente previsti per la misura di tensioni; speciali trasduttori devono essere utilizzati per misurare altre grandezze, elettriche o non.

4-3,7. *Oscillografo a catodo freddo.*

Per raggiungere le più elevate velocità di scrittura (fino a circa $\frac{1}{3}$ della velocità della luce) occorre salire con i valori della tensione anodica a parecchie decine o qualche centinaio di kV ed utilizzare la proprietà di un fascio di elettroni di impressionare direttamente una pellicola fotografica.

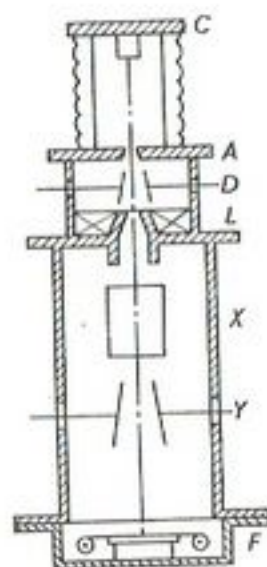
Il tubo a vuoto è allora sostituito dalla disposizione di fig. 4-35, in cui l'emissione degli elettroni avviene per urto di ioni gassosi su una piastrina metallica (catodo freddo); a tale scopo deve essere realizzata intorno al catodo una pressione non minore di 10^{-2} mmHg.

Fig. 4-35

Il catodo C è portato in tensione (negativa) rispetto all'anodo A che è al potenziale di terra; il raggio dopo aver attraversato il sistema di lenti (in genere magnetiche) L, attraversa la zona delle placche deflettrici X e Y e cade sulla pellicola fotografica F. In condizioni di riposo il raggio è deviato e bloccato dalle placche ausiliarie D.

Poiché nella zona di transito degli elettroni la pressione deve essere inferiore a 10^{-3} mmHg, occorre creare e mantenere una differenza di pressione attraverso il foro dell'anodo, mediante un opportuno sistema di pompe a vuoto. Il vuoto deve essere ripristinato ogni qualvolta si introduce o si estrae la pellicola fotografica.

Questi oscillografi hanno, accanto al pregio di un'elevata velocità di scrittura, quello di una buona finezza di traccia; per la elevata tensione di accelerazione, la loro costante è dell'ordine di alcune decine di volt per millimetro; in tal caso si usa spesso produrre la tensione V_x mediante la scarica di un condensatore ad alta tensione, il che dà luogo ad un asse dei tempi con scala logaritmica.

L'uso di tale tipo di oscillografo (che può tramutarsi in oscilloscopio sostituendo alla pellicola fotografica uno schermo fluorescente) è limitato ad alcuni casi particolari (transitori rapidi ad alta tensione); il suo impiego è complicato dalla necessità di formare, di volta in volta, il voluto grado di vuoto e dalle cure necessarie per mantenerlo.

4-4. **Conversione analogico-numerica.**

4-4,1. *Grandezze analogiche e numeriche.*

La conversione analogico-numerica (o analogico-digitale A/D) consiste nel trasformare univocamente l'ampiezza di una grandezza fisica (tensione, frequenza, ecc.) in una serie di cifre, ognuna delle quali occupa una ben definita posizione in modo tale da formare un numero. Questa conversione, che è essenziale per l'espressione del risultato negli strumenti ad indicazione numerica, è utilizzata molto ampiamente anche per la trasmissione a distanza delle misure, per il loro immagazzinamento in nastri magnetici, la loro elaborazione nei calcolatori, tutte operazioni che avvengono con maggior precisione sotto forma numerica. Per riutilizzare i dati in forma analogica è usata la conversione inversa (D/A).

Le operazioni di conversione possono essere eseguite secondo principi diversi, sia con apparecchiature elettromeccaniche, sia con dispositivi elettronici che, essendo più veloci e più flessibili, sono ormai di più generale impiego.

Le grandezze analogiche variano in modo generalmente continuo; la conversione di una grandezza in forma numerica implica sempre una sua discretizzazione, cioè la trasformazione nella somma di più gradini, di valore minimo prefissato, la cui risultante costituisce la miglior approssimazione del valore della grandezza misurata.

La rappresentazione di numeri può essere eseguita sia a virgola fissa sia a virgola mobile. Il problema di una scelta della forma più opportuna si presenta quando si debbano eseguire sui numeri diverse operazioni di somma o di moltiplicazione, che possono dar luogo a risultati che eccedono la lunghezza del registro in cui devono essere accumulati i numeri, se espressi in virgola fissa, mentre nella forma a virgola mobile possono essere eliminate le ultime cifre, introducendo però un errore di troncatura o di arrotondamento.

Il diverso significato dei due errori può essere illustrato dalla fig. 4-36; la troncatura (fig. 4-36 *a*) dà luogo ad un errore che è sempre negativo, non superiore, come valore assoluto, allo scalino elementare Δ (o ultimo *bit* significativo *LSB*) e ha valore medio pari a $\Delta/2$. L'arrotondamento (fig. 4-36 *b*) dà luogo a valori mediamente nulli, con ampiezza massima uguale a $\Delta/2$.

a) b)

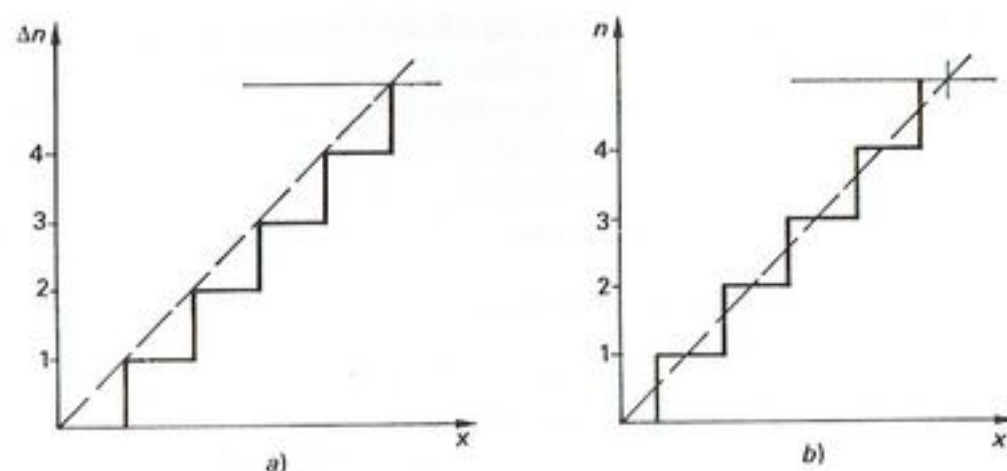



Fig. 4-36

Se si ammette una distribuzione uniforme dei valori della grandezza misurata, questi errori possono essere considerati come una grandezza aleatoria, la cui varianza è, per entrambi i casi, uguale a $\Delta^2/12$, che costituisce un rumore sovrapposto al segnale di misura.

L'insieme dei possibili stati (simboli o combinazione di simboli) con cui è esprimibile il risultato è in ogni caso finito e limitato dal campo e dalla precisione della misura; esso è detto codice e può essere diverso, nella elaborazione, nella trasmissione o nella presentazione dei dati, purché sussista univocità di relazione fra l'ampiezza della grandezza in entrata e le sue varie espressioni nei diversi codici.

4-4,2. *Codici binari.*

La numerazione che usiamo più comunemente è basata sul sistema decimale: esso consiste di 10 simboli (0, 1, 2, ..., 9) ordinati secondo potenze intere decrescenti di 10; ad esempio:

$$375{,}4 = 3\times 10^2 + 7\times 10^1 + 5\times 10^0 + 4\times 10^{-1}\,.$$

Questo sistema non è il più semplice, perché richiede la rappresentazione di dieci stati distinti, ed è perciò sostituito, nei dispositivi elettronici, da sistemi binari. Questi impiegano due simboli (0 e 1) facilmente rappresentati dalla posizione di un collegamento (chiuso o aperto), o da due livelli di tensione, abbastanza lontani fra loro da non generare ambiguità, anche in presenza di attenuazione o di non perfetto adattamento dei componenti). I moderni sistemi digitali forniscono l'informazione nell'istante della transizione fra i due livelli; tenendo il più breve possibile il tempo di salita o di discesa dell'impulso, i tempi necessari per tale transizione si riducono a frazioni di microsecondo.

Ogni numero intero N viene quindi rappresentato da una somma di n termini a base 2, del tipo:

$$N = d_n 2^{n-1} + \ldots + d_1 2^0$$

ossia:

$$N = \sum_{i=1}^{n} d_i 2^{i-1} \qquad [4\text{-}5]$$

dove i coefficienti d_i possono assumere solo i valori 0 e 1. Sarà di conseguenza:

$$0 < N < 2^n - 1\,.$$

I due simboli 0 e 1, possono anche combinarsi in gruppi di più cifre, secondo regole prefissate, per formare codici diversi. Uno dei più usati è il BCD (binary-coded decimal) che presenta le cifre da 0 a 9 con i loro equivalenti binari secondo la [4-5], da 0000 a 1001. Combinando più gruppi si ottiene qualsiasi cifra in forma decimale.

Codici più complessi hanno lo scopo di ridurre le possibilità di errore nel passaggio fra due cifre. Molto usato è, ad esempio, il codisce ASCII che consente la rappresentazione di caratteri alfa-numerici.

4-4,3. *Circuiti porta.*

Uno degli elementi circuitali più impiegati nella conversione A/D è il circuito porta: esso deve fornire il consenso al passaggio di uno o più segnali ed ha perciò, nella sua versione più semplice, un ingresso (A) ed un'uscita (C) che risultano, o meno, collegati fra loro a seconda del livello del segnale presente sull'ingresso B (fig. 4-37). Sono requisiti ideali di tale tipo di circuito un buon rapporto fra i segnali di uscita con e senza consenso e la rapidità d'intervento.

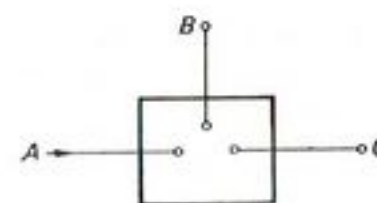



Fig. 4-37

Le porte dette analogiche trasmettono in uscita il segnale presente ad un ingresso, quando sull'altro sia presente il segnale di consenso; se questo è molto breve rispetto al segnale trasmesso, si ottiene una porta di campionamento.

Le porte dette logiche presentano invece in uscita solo uno dei due livelli di tensione assunti per rappresentare i simboli 0 e 1; si ha una porta *AND* quando il livello in uscita è condizionato alla presenza di segnale contemporaneamente su tutte le entrate (fig. 4-38 *a*); si ha una porta *OR* se il livello in uscita dipende dalla presenza di un segnale in uno qualsiasi degli ingressi (fig. 4-39 *b*). Sono inoltre possibili altre logiche, derivate dalle precedenti.

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fig. 4-38 *a*

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

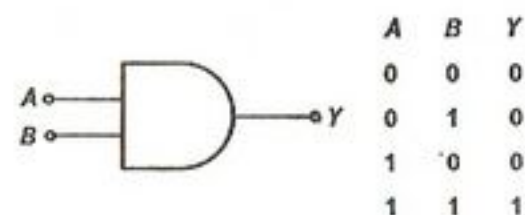
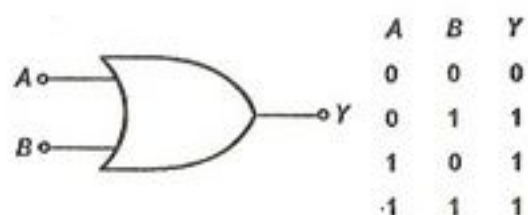



Fig. 4-38 *b*

4-4,4. *Comparatori.*

I comparatori servono a confrontare l'ampiezza di due livelli di tensione determinando, con il livello del segnale d'uscita, quale sia il maggiore. Essi possono essere di vario tipo (a FET, a diodo tunnel, a chopper, ad amplificatore differenziale, ecc.) e di vario impiego (rivelatori di soglia, rivelatori di limite, per circuiti di decisione e di comando, ecc.).

Il loro principio di funzionamento è rappresentabile come in fig. 4-39, dove il valore di V_u ha due livelli, a seconda che sia $V_1 > V_2$ o viceversa; fra i due stati può esistere una zona d'incertezza o di isteresi (fig. 4-40).

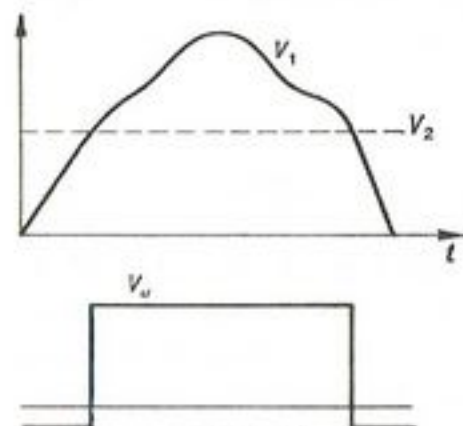
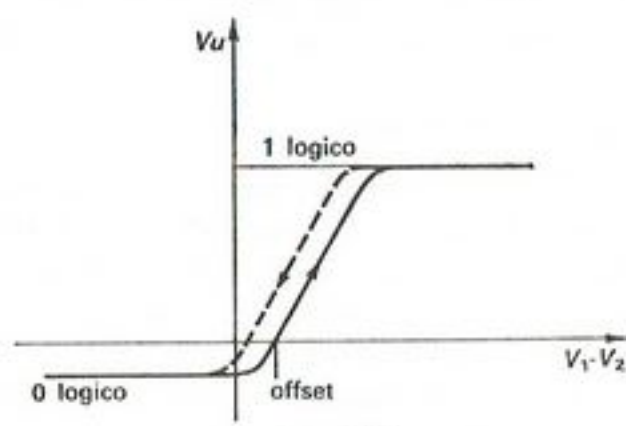



Fig. 4-39 Fig. 4-40

Fra le caratteristiche che determinano l'uso corretto di un comparatore è quindi la sua risoluzione (o sensibilità) cioè la minima variazione di segnale d'ingresso che può dar luogo alla commutazione in uscita; nella maggior parte delle applicazioni viene specificata insieme ad un parametro che indica la rapidità della risposta.

Oltre ai valori minimi e massimi delle differenze fra le due tensioni V_1 e V_2, sono importanti anche i limiti dei loro valori assoluti; trattandosi di dispositivi differenziali, può anche qui esser definita una opportuna reiezione di modo comune.

Anche per le impedenze d'ingresso occorre spesso distinguere fra quelle in modo comune, che possono richiedere corrente base di polarizzazione relativamente elevata, e quelle differenziali.

4-4,5. *Circuiti di conteggio e indicatori.*

Il conteggio di impulsi si basa sulle proprietà dei circuiti bistabili (o flip-flop) ossia di multivibratori con due possibili stati di equilibrio; a questi corrispondono in uscita i due diversi valori di tensione che rappresentano le due cifre base di conteggio 0 e 1. Questi circuiti sono in grado di commutare rapidamente da uno stato all'altro, quando si presenta al loro ingresso un impulso di forma e ampiezza opportune.

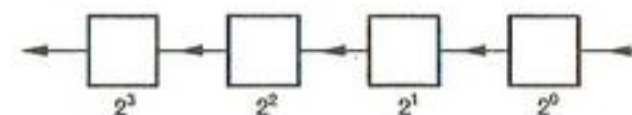



Fig. 4-41

In un numeratore, formato da più elementi, come quello di fig. 4-41, partendo da una posizione di riposo (tutti gli stadi in posizione zero), il primo impulso che si presenta all'ingresso fa commutare il primo stadio. Si ha quindi l'indicazione $0001 = 2^0 = 1$. Al secondo impulso, il primo stadio ritorna nella posizione zero, trasmettendo un impulso allo stadio successivo: l'indicazione presente è allora $0010 = 2^1 = 2$. Così si procede, con velocità che possono essere dell'ordine di 10^6 impulsi al secondo. Un numeratore può fungere da memoria, conservando la sua posizione finché non gli giunga un comando di azzeramento; può trasferire la sua indicazione ad un altro numeratore; può essere reversibile, in grado cioè di scaricare dalla cifra immagazzinata quella corrispondente ad un altra successiva sequenza di impulsi.

Sistemi analoghi, più o meno complessi, consentono il conteggio con codici diversi; in particolare, raggruppando opportunamente quattro stadi, si può operare con il sistema binario-decimale, che consente l'uscita in forma decimale, più comoda per la lettura.

L'indicazione finale viene infatti presentata quasi sempre in forma decimale, mediante opportuni decodificatori; questi sono dei circuiti logici combinati in modo da riportare le diverse combinazioni delle uscite binarie su dieci vie distinte. All'uscita del decodificatore, i segnali sono portati ad indicatori luminosi, che fanno apparire la cifra corrispondente.

Dopo vari tipi di tubi numeratori, caduti successivamente in disuso, sono stati impiegati i tubi indicatori a gas a più catodi conformati secondo le dieci cifre (da 0 a 9). Sono oggi più diffusi altri sistemi, con diodi elettroluminescenti allo stato solido, che formano le cifre combinando opportunamente l'accensione di più tratti o più punti.

4-4,6. *Controllore.*

In ogni strumento numerico è necessaria la presenza di un elemento *coordinatore* (o controllore) cioè di un dispositivo logico, con funzioni di tipo combinatorio e sequenziale, mediante le quali le varie parti dello strumento possono eseguire, con l'ordine e le modalità prestabilite, la sequenza delle operazioni necessarie alla misura.

Per scandire questa sequenza, il controllore comprende un oscillatore che genera impulsi di forma opportuna, con una cadenza costante (orologio).

Ogni numero o « messaggio » è rappresentato dalla sequenza di più impulsi, di valore diverso per i due simboli 0 e 1. Se gli impulsi si presentano l'uno dopo l'altro, il messaggio può essere trasmesso su una sola via di trasmissione; questo modo è detto perciò in serie ed è caratterizzato dall'impiegare, per ogni messaggio, la durata corrispondente ad nT se n è il numero di impulsi proprio di ogni messaggio del codice (fig. 4-42) e T l'intervallo di tempo fra due impulsi successivi.

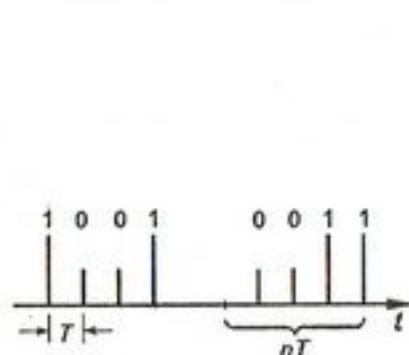



Fig. 4-42

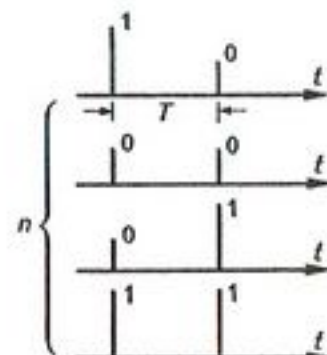



Fig. 4-43

Gli impulsi possono anche essere trasmessi su n vie di comunicazione, una per ogni d_i della [4-5]: in questo modo la durata di trasmissione si riduce a T, ma il sistema di connessioni diviene più complesso (fig. 4-43).

La trasmissione di segnali digitali può essere disturbata dal rumore, che può far comparire un impulso spurio. Il controllo più semplice si ha attraverso il cosiddetto controllo di parità: l'insieme del « messaggio » termina con uno 0 o con un 1 supplementare a seconda che in esso sia contenuto un numero pari o dispari di stati 1. All'arrivo si controlla che il numero di stati 1 sia sempre pari, essendo fortemente improbabile un doppio errore su un solo messaggio.

4-4,7. *Sistema di campionamento.*

Durante una conversione A/D, che richiede un certo tempo finito t_s, il segnale d'ingresso può essere variabile; ciò influenza il risultato della

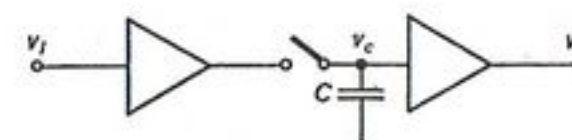



Fig. 4-44

misura. Per ridurre questo errore si impiegano sistemi di campionamento (sample-and-hold) che possono essere schematizzati con il sistema di fig. 4-44, dove il condensatore C viene caricato al valore della tensione v_i da misurare, restando poi separato dal segnale d'ingresso per il tempo t_s.

Pur utilizzando commutatori rapidi (tempi dell'ordine del ns), la frequenza di campionamento deve tener conto non solo del tempo di conversione t_s, ma anche del tempo necessario a ricaricare il condensatore con i nuovi valori assunti dalla variabile v_i (fig. 4-45).

L'entità dei tempi di campionamento necessari si può valutare pensando ad un segnale sinusoidale di frequenza f e di ampiezza A_M; esso ha, nell'istante di massima variazione (intorno cioè allo zero) una variazione ΔA nel tempo Δt pari a:

$$\Delta A = 2\pi f A_M \, \Delta t$$

che deve risultare piccola rispetto alla precisione del convertitore; ammesso per esempio $\Delta A < 10^{-3} A_M$, si ottiene $\Delta t < 1{,}6 \cdot 10^{-4}/f$.

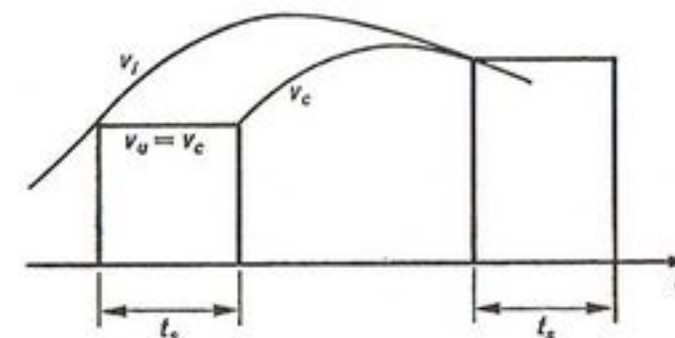



Fig. 4-45

4-4,8. *Conversione D/A.*

Un semplice sistema di conversione D/A può essere rappresentato dallo schema di fig. 4-46: esso consiste in un amplificatore operazionale usato come sommatore (4-1,9 *a*). Ad ogni ingresso può essere applicata una tensione $V_i = V_0$, nello stato 1, o una tensione $V_i = 0$, nello stato 0. I valori degli n resistori R_i dei singoli ingressi sono scalati fra loro secondo le

potenze di 2 in modo da dare in uscita una tensione:

$$V_u = -\sum V_i \frac{R_u}{R_i} = \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot 2^{i-1}.$$

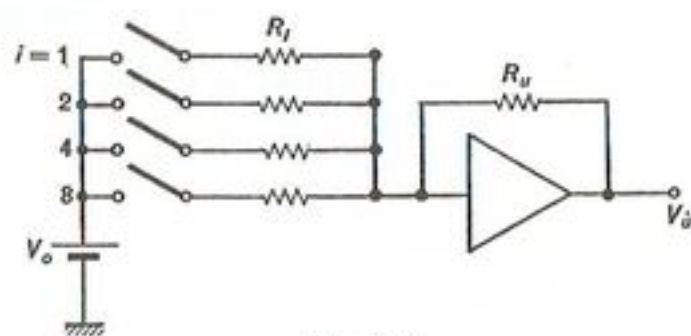



Fig. 4-46

La caratteristica più importante di un simile convertitore è il tempo che esso impiega, dopo una variazione del suo ingresso, per raggiungere una precisione prefissata.

4-5. Strumentazione numerica.

4-5,1. *Caratteristiche generali.*

Uno strumento numerico, cioè capace di presentare sotto forma numerica il risultato della misura, può basarsi sia su metodi di conteggio di impulsi, sia su sistemi di approssimazione successiva, ad ogni gradino dei quali si fa corrispondere l'indicazione di una cifra.

Il numero di cifre indicato da uno strumento può variare da tre a otto, a seconda della precisione e risoluzione dello strumento; si hanno in genere strumenti in cui tutte le cifre possono andare da 0 a 9 (indicazione max per uno strumento a tre cifre 999) o strumenti in cui la cifra di ordine superiore può essere solo 0 o 1 (indicazione max 199 indicata come 2 cifre e mezza). Alcuni strumenti sono in grado di provvedere automaticamente al cambiamento di portata, fino a che il valore da misurare si presenta nella minima portata con esso compatibile; altri hanno particolari capacità di sovraccarico.

Accanto alla indicazione del valore misurato, si può avere la sua presentazione su un'uscita, in opportuno codice, per convogliarlo a successive utilizzazioni, secondo programmi prefissati o a comando dell'operatore.

Altra caratteristica importante è la cadenza di misura, cioè il numero

di misure che lo strumento ripete in un secondo. Altre caratteristiche (impedenza d'ingresso, rumore, ecc.) sono simili a quelle degli strumenti elettronici analogici.

4-5,2. *Frequenzimetri numerici.*

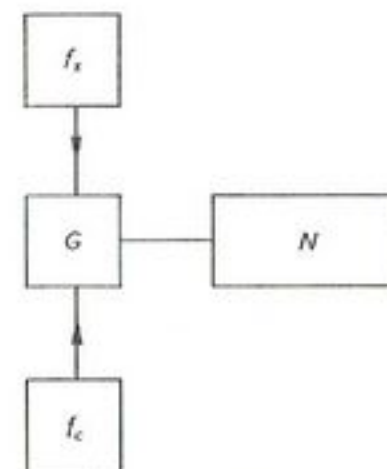



Fig. 4-47

Un frequenzimetro numerico si basa sul confronto della frequenza incognita f_x con quella f_c di un campione interno (fig. 4-47). Il segnale d'ingresso, generalmente una tensione della frequenza da misurare, viene convertito in una serie d'impulsi, uno per periodo, in corrispondenza di valori ben definiti della sua ampiezza e della sua derivata.

Il campione interno (base dei tempi) è costituito da un oscillatore a quarzo, in alcuni casi termostatato; la sua frequenza viene opportunamente moltiplicata o demoltiplicata per produrre degli intervalli di tempo di valore assegnato. Quando sia $f_c \ll f_x$, la base dei tempi determina la durata di apertura della porta G e quindi la durata del conteggio dei periodi del segnale d'ingresso (fig. 4-48). Quando sia $f_x \ll f_c$, la base dei tempi fornisce gli impulsi di frequenza nota che sono contati in un periodo della frequenza incognita, che determina l'apertura e chiusura della porta. In ogni caso, negli strumenti moderni, la lettura è sempre riferita al secondo, qualunque sia la base dei tempi impiegata.

La precisione di tali strumenti si basa innanzitutto sulla precisione a breve e a lungo termine, della frequenza del riferimento; altra fonte d'er-

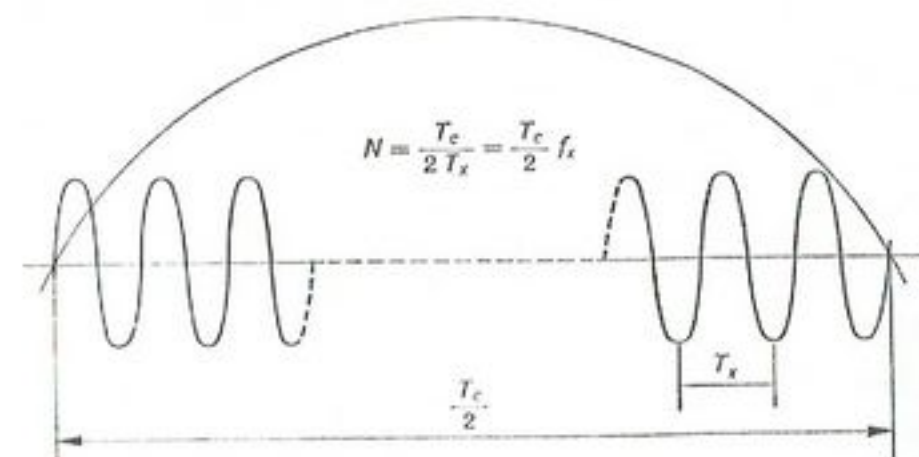



Fig. 4-48

rore è la perdita di un impulso di conteggio, dovuta allo sfasamento esistente fra gli impulsi da contare e quelli prodotti dalla base dei tempi. Questo errore si riduce aumentando convenientemente la durata del conteggio, a multipli, generalmente secondo le potenze di 10, del periodo base.

Irregolarità nella forma d'onda e rumore sul segnale d'ingresso possono falsare la formazione d'impulsi del segnale della frequenza da misurare. Anche questo errore può essere ridotto aumentando la durata del conteggio.

Sullo stesso principio funzionano dei misuratori d'intervalli di tempo compresi fra opportuni segnali di inizio e fine, di sfasamento, di rapporto di frequenze, ecc.

4-5,3. *Voltmetri numerici a rampa.*

Una tensione continua può essere convertita in una frequenza od in un intervallo di tempo, per essere misurata con dispositivi numerici simili a quelli descritti nel precedente paragrafo.

Il metodo più semplice di conversione è quello detto a rampa lineare:

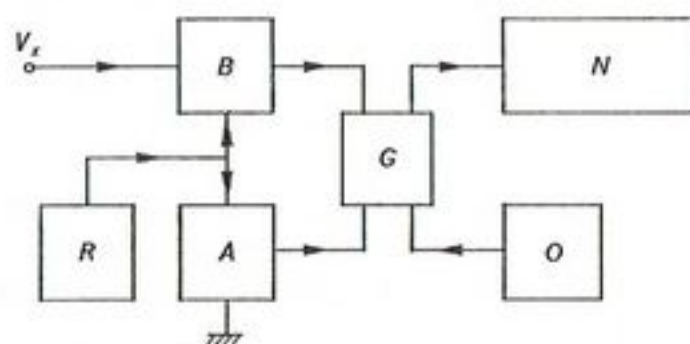



Fig. 4-49

esso si basa sulla determinazione del tempo impiegato da una tensione, che cresce linearmente con pendenza nota, per passare dallo zero al valore V_x della tensione da misurare.

Lo schema di principio è illustrato in fig. 4-49; il generatore interno R fornisce una tensione linearmente crescente da $-V_0$ a V_0 (fig. 4-50). Quando questa tensione passa per lo zero il comparatore A apre la porta G che dà inizio al conteggio degli impulsi forniti dall'oscillatore interno O. Il conteggio cessa quando il comparatore B constata l'uguaglianza fra il valore istantaneo fornito dalla rampa e quello della tensione V_x. L'intervallo Δt è quindi proporzionale a V_x:

$$V_x = \frac{V_0}{T}\Delta t = V_0 \frac{T_c}{T} N$$

ed il numero N di impulsi totalizzato durante questo intervallo esprime la misura della tensione in ingresso, in forma diretta, se ad ogni impulso corrisponde un'unità dell'ultima cifra significativa indicata dallo strumento.

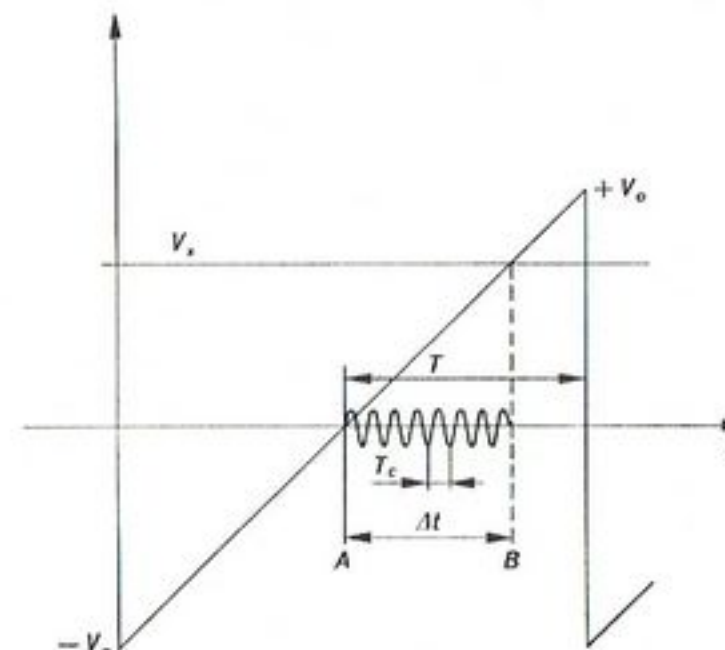



Fig. 4-50

La funzione dei due comparatori A e B si inverte, se cambia il segno della tensione applicata; un opportuno circuito logico, constatando quale dei due comparatori interviene per primo, può fornire l'indicazione del segno di V_x.

La misura risente del rumore presente negli istanti di inizio e fine del conteggio, che si sovrappone ai valori ideali; questo effetto può essere ridotto ripetendo più volte la misura e sommandone i risultati (il che equivale, a parte le scale, ad effettuarne la media). La precisione si basa anche essenzialmente sulla costanza della pendenza della rampa; si hanno perciò spesso strumenti che utilizzano estensioni di questo metodo (a doppia o multipla rampa), che introducono il confronto con tensioni continue di riferimento, eliminando l'influenza della pendenza.

4-5,4. *Voltmetri integratori.*

Strumenti di precisione più elevata, dell'ordine di $\pm 10^{-4}$, possono essere ottenuti utilizzando una conversione tensione-frequenza. Questa utilizza un amplificatore operazionale, montato come integratore, che trasforma la tensione costante d'ingresso in un'uscita linearmente crescente nel tempo

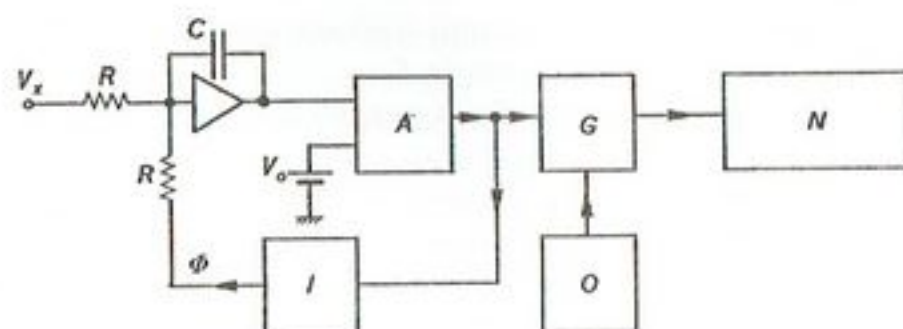



Fig. 4-51

(fig. 4-51). Quando questa uscita raggiunge il valore di riferimento V_0, il comparatore A fornisce, ad un secondo ingresso dell'integratore, per mezzo di un generatore I, un impulso di opposto segno e di valore $\phi = RCV_0$ tale così da riportare l'uscita nuovamente a zero.

Questo ciclo si ripete periodicamente, ogni tempo τ dato dalla relazione:

$$V_0 = \frac{1}{RC}\int_t^{t+\tau} V_x \, dt = \frac{V_x \tau}{RC}$$

ossia con frequenza $f = 1/\tau$, proporzionale a V_x.

Il conteggio del numero N di impulsi nel tempo T, fissato dall'oscillatore interno O, dà quindi la misura della tensione V_x, anzi del suo valore medio V_m nell'intervallo di tempo T, essendo:

$$V_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} V_x \, dt = \frac{N\phi}{T}.$$

Questa proprietà consente di eliminare il rumore sovrapposto al segnale d'entrata ed in particolare quello alla frequenza di rete, o suoi multipli, se il tempo di misura T è multiplo del periodo di questi segnali. Si hanno così strumenti con elevata reiezione naturale al rumore, che consentono risoluzioni fino a 1 µV, con elevata cadenza di misura.

Talvolta il complesso integratore-generatore di impulsi è racchiuso in un'opportuna schermatura, e gli impulsi da contare vengono trasmessi, tramite trasformatore schermato, ad un numeratore esterno alla schermatura stessa.

4-5,5. *Voltmetri numerici a potenziometro.*

Sono strumenti che realizzano in modo automatico il confronto di due f.e.m., con metodo potenziometrico (vedi 7-5) registrando, in forma numerica, la condizione di equilibrio.

Nel tipo detto ad approssimazioni successive, la sorgente interna dello strumento fornisce una serie di tensioni di riferimento scaglionate in sequenza binaria [$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$], tramite divisori di precisione. La tensione da misurare viene comparata successivamente con questi gradini; se essa risulta superiore, la corrispondente cifra binaria viene occupata e alla tensione di confronto si somma il gradino immediatamente inferiore: se risulta più piccola, la cifra binaria resta zero e alla tensione di confronto viene sottratto il gradino successivo.

Nel tipo detto a bilanciamento continuo, si tratta di un vero e proprio servomeccanismo agente su un commutatore meccanico, in grado di raggiungere l'equilibrio su una serie di resistori disposti a potenziometro.

Entrambi questi tipi presentano una elevata precisione, dell'ordine di qualche parte in 10^{-5}, paragonabili cioè a quella dei metodi di laboratorio, ma risultano sensibili al rumore.

Non sempre è necessario ricorrere a più gradini di riferimento; un altro metodo, piuttosto rapido (qualche decina di microsecondi) e preciso (fino a 12 *bit*) si basa sul segno dei successivi valori di tensione formati secondo la successione:

$$V_{i+1} = 2(V_i - sign\, V_i \cdot V_0)$$

dove la funzione $sign\, V_i$ vale $+1$ o -1, a seconda del segno della tensione V_i. Un processore confronta la tensione incognita V_u con quella di riferimento V_0 e ne moltiplica la differenza per 2; il risultato $V_1 = 2(V_u - V_0)$ passa ad un secondo processore che lo confronta con $\pm V_0$, a seconda del segno del confronto precedente, e così di seguito, facendo corrispondere per ogni confronto una cifra binaria 1 o 0, a seconda del segno del confronto stesso, fino al numero di *bit* richiesto.

Vi sono schemi che assommano le caratteristiche di precisione del metodo potenziometrico con quelle di elevata reiezione al rumore dei voltmetri integratori. In essi la misura viene eseguita in due tempi, comandati da un apposito programmatore: nel primo vengono lette le prime cifre (ad esempio 4) della tensione da misurare; esse danno luogo, tramite un convertitore D/A, ad una tensione continua che viene sottratta all'ingresso, per cui la parte restante, corrispondente alle ultime due cifre, viene misurata direttamente dal voltmetro integratore, di cui viene aumentata la sensibilità. Inoltre, nonostante la doppia lettura, la cadenza di misura può essere elevata.

4-5,6. *Voltmetri per c.a. Ohmetri numerici.*

L'aggiunta dei convertitori alternata-continua consente l'impiego degli strumenti numerici, visti nei precedenti paragrafi, per misure in c.a. che

portano sul valore medio o in strumenti migliori, sul vero valore efficace (indicato come t.r.m.s.). La precisione intrinseca di questi strumenti è ridotta dalla presenza del convertitore.

La presenza di una sorgente interna e di resistenze di precisione consente, senza grosse complicazioni, di impiegare i voltmetri numerici come ohmetri e di farne dei veri e propri strumenti universali.

4-6. **Registratori.**

4-6,1. *Registratori con apparecchi elettronici.*

L'impiego di amplificatori rende possibile la costruzione di registratori di elevata qualità, sostanzialmente basati sugli stessi principi visti in 3-7, nei quali però si limita il consumo proprio grazie all'impedenza elevata dell'amplificatore stesso.

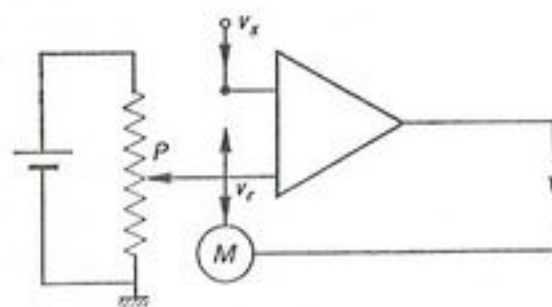



Fig. 4-52

Lo schema di fig. 4-52 mostra un esempio di strumento a retroazione, dove alla posizione dell'indice scrivente, mosso dal motore M, corrisponde una posizione del cursore lungo il potenziometro P e quindi un definito valore della tensione di riferimento v_r; l'amplificatore differenziale, da cui dipende il movimento del motore, assicura che sia sempre $v_r = v_x$.

Con due dispositivi simili al precedente si può ottenere un registratore su due assi coordinati ortogonali. Uno di essi può esser comandato da una base dei tempi, simile a quella di un oscilloscopio, per registrare fenomeni in funzione del tempo.

4-6,2. *Registrazione magnetica.*

Un segnale analogico può essere registrato, mediante un opportuno dispositivo (testina di registrazione), su un nastro magnetico, ossia creando stati distinguibili di magnetizzazione in un mezzo ferromagnetico. Per la

« lettura » occorre ovviamente rivelare questi stati di magnetizzazione e ritrasformarli in segnali elettrici mediante una testina di riproduzione.

Se la registrazione avviene direttamente, la corrente da registrare eccita un nucleo, in genere toroidale, dotato di un traferro in cui scorre il nastro magnetico. Le particelle di materiale magnetico, che sono distribuite sul nastro, ritengono la magnetizzazione dovuta al flusso che le percorre quando passano nel traferro.

La riconversione in segnale elettrico avviene con un dispositivo analogo, in seguito al moto del nastro, che induce nell'avvolgimento una f.e.m. proporzionale alla derivata del flusso registrato.

Per riprodurre fedelmente il segnale registrato occorre un amplificatore equalizzatore che compensi questa caratteristica di derivazione; ciò è possibile solo limitando il campo di frequenza, in particolare verso il basso.

I limiti superiori di frequenza sono invece imposti dalla velocità di avanzamento del nastro e dalle dimensioni del traferro di registrazione.

Per la registrazione di segnali di bassa frequenza si ricorre a sistemi di modulazione su frequenze più elevate; questo metodo, che comporta notevole aumento di costo nell'apparecchiatura, impone anche una ulteriore limitazione al massimo valore di frequenza registrabile.

Vari metodi sono stati realizzati per ridurre gli effetti di distorsione dovuti alla nonlinearità delle caratteristiche magnetiche.

4-6,3. *Registrazione numerica.*

La registrazione di un segnale in forma numerica può avvenire direttamente, su carta, attraverso un organo stampante, ma anche, in forma più o meno complessa, mediante immagazzinamento in organi di memoria (nastri o schede perforate, disco magnetico ecc.).

Sia le stampadati che i vari tipi di memoria sono oggi assai diffusi, costituendo organi fondamentali dei calcolatori numerici; il loro collegamento con strumenti numerici richiede però un corretto adattamento di « linguaggio » e di programma. In ogni caso il sistema di registrazione deve possedere due stati ben distinti (assenza o presenza di un foro, di una magnetizzazione ecc.), in modo da rappresentare senza equivoci gli stati 0 e 1 del sistema binario.

Ogni registratore numerico possiede, in genere, un orologio che fornisce i tempi di riferimento delle singole registrazioni.

Esistono anche strumenti che, con entrata numerica, tracciano un grafico delle varie grandezze, in forma analogica. Si guadagna così nella evidenza dei risultati, perdendo però i pregi di precisione, propri dei sistemi numerici.

4-6,4. *Registratori di eventi.*

Negli impianti elettrici è spesso interessante conoscere i valori assunti dalle varie tensioni e correnti, nel caso di guasti, nonché la sequenza delle varie operazioni (scatto di protezioni, apertura e chiusura di interruttori ecc.). Ciò permette infatti di riconoscere le cause del guasto, l'efficienza delle protezioni, ecc. Per ottenere questi risultati occorre una misura continua, al fine di ottenere tempestivamente i valori voluti, ma una registrazione limitata ai soli transitori.

Nei primi tipi di apparecchi (oscilloperturbografi) la soluzione veniva offerta da metodi di registrazione chimici o magnetici che permettevano una successiva cancellazione; fra la registrazione e la cancellazione può intervenire un ritardo anche di parecchi secondi, sufficiente a permettere il blocco della cancellazione, in seguito al manifestarsi del transitorio.

Nelle versioni più recenti, si hanno registratori numerici che immagazzinano in memoria sia i valori delle grandezze misurate, sia dei « messaggi » comprendenti l'indicazione dei vari organi sorvegliati e la loro situazione. Quando interviene una variazione oltre i limiti consentiti, i dati immagazzinati in memoria vengono stampati. Soluzioni diverse si hanno per dare l'esatta cronologia dei vari eventi. Con memorie ad alta capacità di accumulazione si possono registrare transitori rapidi, dell'ordine dei millisecondi, che vengono poi trascritti dalle stampanti alla loro abituale velocità (alcune linee o decine di linee al secondo).

4-7. **Evoluzione dei sistemi numerici.**

4-7,1. *Strumenti con microprocessore.*

Gli strumenti di misura dotati di microprocessore (detti anche « strumenti intelligenti ») sono una diretta evoluzione degli strumenti digitali, quando un sistema di elaborazione (dotato di unità centrale, o *CPU*, e di memorie) assume i compiti del controllore e, in misura più o meno ampia, di esecuzione di algoritmi, di collegamento con l'utilizzatore locale (operatore) e d'interfacciamento con l'eventuale operatore remoto (calcolatore) (fig. 4-53). In particolare, il controllo si esercita sia sul convertitore *A/D* (frequenza di campionamento, modo di operare, ecc. in genere in base a comandi predisposti dall'operatore) sia sul condizionatore del segnale d'ingresso (vedi 4-7,2) anche mediante operazioni in catena chiusa come la scelta automatica della portata, che serve anche a proteggere lo strumento dai sovraccarichi. Nei confronti del sistema locale, il sistema di elaborazione gestisce sia la presentazione della misura, sia l'immis-

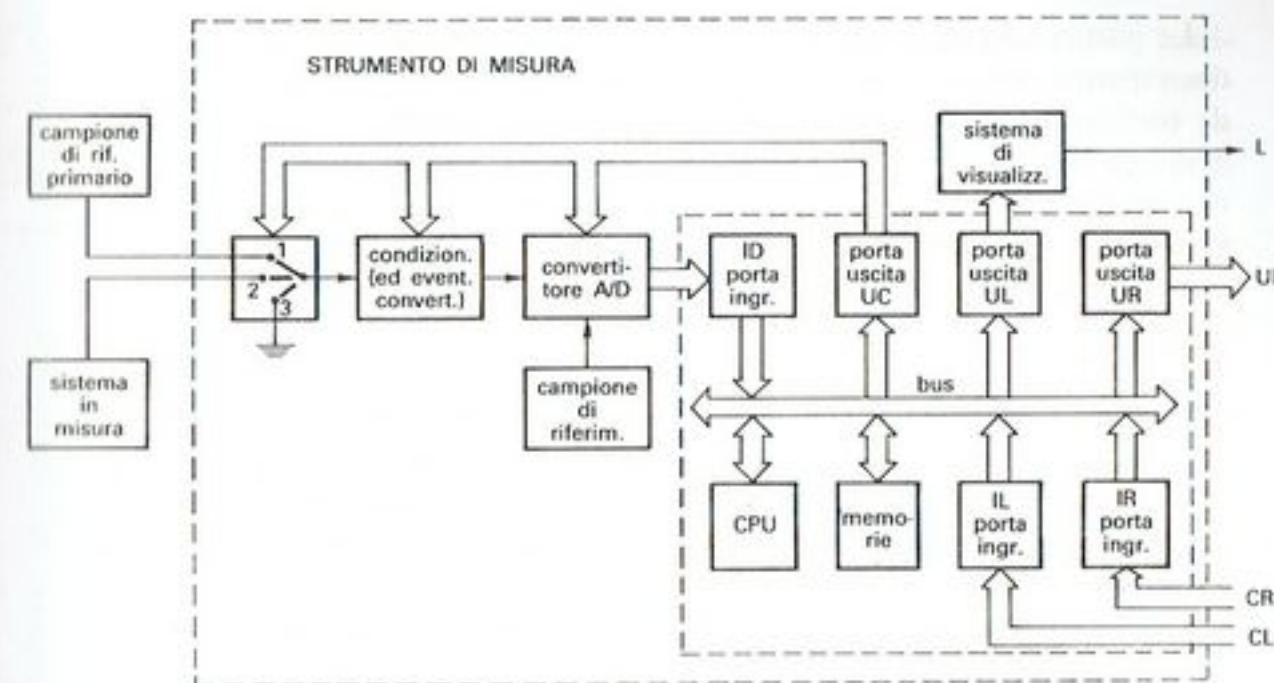



Fig. 4-53
Schema a blocchi di uno strumento di misura intelligente: L = lettura; UR = uscita verso il sistema di utilizzazione « remoto » (il calcolatore); CR = comandi « remoti » (dal calcolatore); CL = comandi locali (dall'operatore).

sione di comandi da parte dell'operatore. Nei riguardi di eventuali utilizzatori remoti, lo strumento può trasferire comandi, dati ecc., sulla base di modalità e procedure prefissate.

I sistemi, che possono operare con parole di 8, 12 o 16 o più *bit* sono composti dalla *CPU*, da una o più memorie, (di tipo permanente o *ROM* o ad accesso casuale, o *RAM*), da porte d'ingresso e d'uscita, nonché da una serie di collegamenti (o *bus*) che, a seconda delle funzioni cui sono addetti possono distinguersi in *bus* dei dati, degli indirizzi, di controllo, ecc.

Il sistema opera eseguendo una sequenza di passi, comandata da un puntatore; ogni passo contiene un'istruzione; le istruzioni sono immagazzinate in una memoria *ROM* e la loro organizzazione costituisce il programma, in base al quale opera lo strumento. Ogni istruzione è contraddistinta da un numero binario che ne individua univocamente la posizione fisica nella memoria (indirizzo).

L'esecuzione dell'istruzione avviene quando la *CPU* invia alla memoria, sul *bus* riservato agli indirizzi, i segnali binari corrispondenti alla parola che indica l'indirizzo dell'istruzione da eseguire; la memoria invia questa parola sul *bus* dei dati; la *CPU* la legge e la interpreta come istruzione. Quest'ultima fase può prevedere un'ulteriore interazione della *CPU* con la memoria, secondo il tipo di operazione che deve essere eseguita.

Le istruzioni elementari consentono operazioni semplici (di incremento, decremento, somma, sottrazione, ecc.), l'esecuzione di operazioni logiche o di confronto, l'assunzione di decisioni, ecc. Data tuttavia l'elevata rapidità con cui queste istruzioni possono essere effettuate, il programma che ne risulta può essere complesso, tale da consentire all'apparecchio prestazioni molto sofisticate e semplificando il lavoro dell'operatore mediante opportuni automatismi, fino ad arrivare a sistemi automatici di prova.

4-7,2. *Trasduttori e condizionatori di segnali.*

Poiché i convertitori *A/D* operano preferibilmente su tensioni continue (generalmente nell'ambito di ± 10 V) per tutte le altre misure di grandezze elettriche e non elettriche si impiegano opportuni trasduttori che diano in uscita un segnale continuo; si usano anche trasduttori che hanno come segnale d'uscita una frequenza.

Spesso è necessario fornire al trasduttore degli equipaggiamenti ausiliari, al fine di rendere la sua uscita adatta alla conversione *A/D*; questo compito viene assolto dal condizionatore di segnale che fornisce, ad esempio, la tensione necessaria per l'alimentazione di un trasduttore passivo, o comprende dispositivi a ponte o a potenziometro necessari per la rivelazione del segnale desiderato.

In alcuni strumenti, viene eseguita automaticamente la compensazione degli *offset* (autozero), controllando l'uscita che si ha con ingresso cortocircuitato, e la taratura automatica, su un campione di riferimento. Questi controlli vengono generalmente eseguiti prima di ogni applicazione dello strumento e spesso ripetuti più volte nel corso delle misure.

La calibrazione può essere puramente elettrica, impiegando una sorgente di f.e.m. di riferimento interna allo strumento; per comprendere nella taratura anche i trasduttori occorrono sistemi più complessi, che producano valori noti delle grandezze da misurare. Le operazioni possono raggiungere precisioni dell'ordine di 10^{-4}, in tempi dell'ordine della frazione di secondo.

È poi necessario un sistema di autodiagnosi che indichi la presenza di eventuali guasti o difetti tali da pregiudicare la qualità dello strumento.

4-7,3. *Elaborazione.*

Il sistema di elaborazione può eseguire algoritmi molto diversi, come la moltiplicazione per costanti, l'addizione o sottrazione di costanti, (e quindi la determinazione degli scarti, assoluti o percentuali rispetto a un valore nominale di riferimento) ecc.

Operazioni semplici sono anche la limitazione, la linearizzazione, il cambio di scala e l'integrazione. In particolare, la linearizzazione del segnale ed il cambiamento di scala, affidati ad un elemento di calcolo, sostituiscono le corrispondenti operazioni manuali, in base a curve di taratura o tabelle. L'integrazione nel tempo si può eseguire facilmente su un segnale d'entrata convertito in una frequenza: basta infatti effettuare il conteggio dei numero di cicli, nell'intervallo di tempo d'integrazione.

In presenza di un numero prefissato di valori, si può determinarne il massimo (o minimo), il valore medio o efficace, lo scarto quadratico medio, ecc. I dati possono essere anche interpolati, filtrati, ecc. fino ad arrivare ad elaborazioni più complesse (come le varie trasformate).

4-7,4. *Sistemi di acquisizione dati.*

La necessità di rilevare rapidamente un elevato numero di informazioni, su sistemi complessi, si è manifestato inizialmente nei campi più avanzati della tecnica, come la ricerca nucleare o spaziale.

Si sono così costruiti apparecchi capaci di ricevere e immagazzinare, con elevata rapidità, il valore di più grandezze fisiche, eventualmente elaborandolo: a questo proposito decisivo è stato il ricorso a tecniche numeriche. Oggi tali apparecchiature sono di uso abbastanza diffuso, sia nel campo della ricerca, sia nelle applicazioni industriali.

Nel suo schema di massima, un *SAD* può comprendere (fig. 4-54) più ingressi (da qualche decina a qualche migliaio), parte già in forma numerica o in codici equivalenti, parte in forma analogica. Generalmente questi ultimi sono tensioni elettriche o sono opportunamente convertiti, da trasduttori o condizionatori, in tensioni elettriche continue. Su di esse si eseguono tutte le operazioni necessarie ad immagazzinarle, nella forma numerica più opportuna (amplificazione, conversione *A/D*, cambiamenti

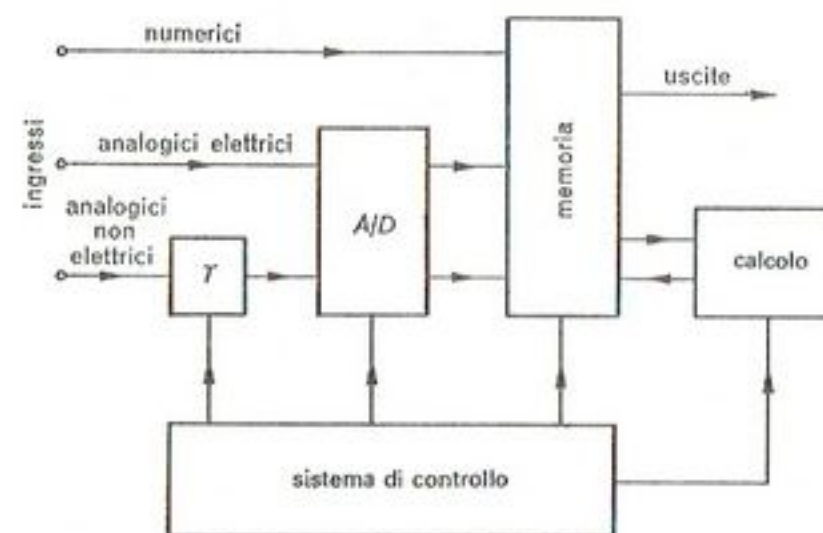



Fig. 4-54

di scale, ecc.). Parte di questi dati viene elaborata da un piccolo calcolatore e rimandata ugualmente nella memoria, dalla quale viene poi estratta l'uscita, nella forma e nel modo più conveniente per la successiva utilizzazione (visualizzazione grafica, tabulato, comandi per controllo, ecc.).

La successione delle varie operazioni è eseguita da un sistema di controllo che ne governa i tempi, fa intervenire gli apparecchi ausiliari nenecessari, ecc. Nei casi più complessi, il sistema di controllo può essere costituito da un calcolatore o da una rete di calcolatori.

4-7,5. *Multiplex.*

Il « multiplaggio » di segnali (analogici) che esistono su linee diverse è la scelta e la commutazione, in un certo ordine, di ogni particolare linea (o canale) di segnali verso una linea di uscita. Così ciascuno dei canali analogici può essere collegato, per una certa durata, ad un sistema più complesso (convertitore *A/D*, registratore magnetico, calcolatore, ecc.) che viene utilizzato per più ingressi, con notevole riduzione di costo.

Lo schema di base è quello in fig. 4-55: le varie porte G_i sono comandate nella sequenza e per i tempi voluti dai multivibratori F_i, a loro volta sincronizzati da un orologio O o base dei tempi opportuna.

Se i segnali in entrata sono di tipo analogico, il multiplex può introdurre varie cause di errore, dovute alle cadute di tensione in conduzione e alle correnti di fuga a commutatori bloccati, nonché al tempo necessario perché una volta ricevuto il comando di commutazione, sul segnale in uscita sia estinto il transitorio di commutazione.

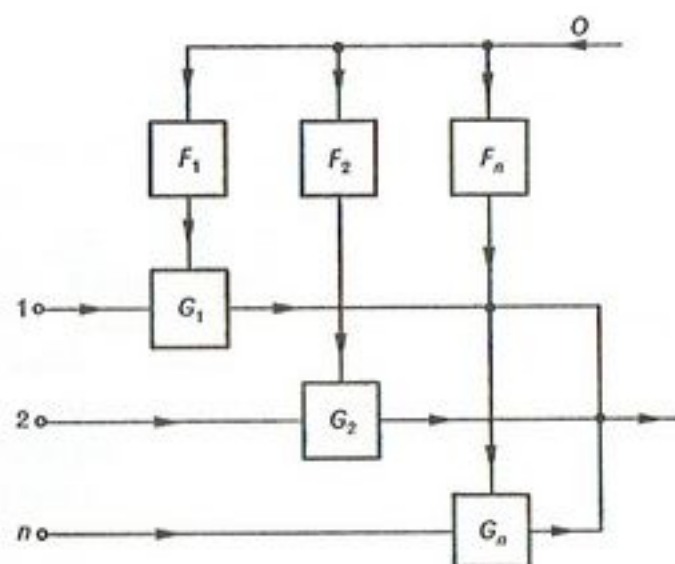



Fig. 4-55

Il collegamento al multiplex può anche rappresentare un carico variabile per le varie sorgenti e spesso sono anche da temere interferenze fra i diversi canali, per effetto del ritorno a massa, che spesso è comune.

Un multiplex è caratterizzato sia dal numero dei suoi canali di ingresso che dal numero di commutazioni al secondo che esso può eseguire.

4-7,6. *Osservazioni sui sistemi di acquisizione dati.*

I *SAD* sono in molti casi impiegati con segnali di livello molto basso, dell'ordine dei mV, in presenza di un elevato rumore. Questo è dovuto sia alle correnti nei circuiti di terra, comuni a più ingressi del sistema, sia agli effetti elettrostatici o elettromagnetici sulle connessioni, sempre abbastanza lunghe, fra le varie parti del sistema.

Questo rumore, che compare all'ingresso del convertitore *A/D*, può essere ridotto mediante opportuni schermi ed evitando spire nei circuiti di connessione a terra. Il suo effetto può essere ulteriormente ridotto utilizzando convertitori poco sensibili ai disturbi e dotati di convenienti circuiti di guardia.

4-7,7. *Impiego di minicomputer.*

I dati raccolti da un *SAD* possono essere inviati ad un calcolatore, per le elaborazioni desiderate; si diffonde però sempre di più l'uso di minicomputer, cioè di calcolatori a limitato potere di memoria, più semplici e più economici da usare.

Il minicomputer lavora secondo lo schema di fig. 4-56, ricevendo segnali in forma digitale ed istruzioni logiche. Esso esegue una scansione delle varie grandezze in ingresso ed opera su di esse le elaborazioni programmate, fornendo in uscita informazioni numeriche (stampate) o in forma grafica o di altro tipo, prendendo decisioni ed inviando segnali digitali che, direttamente o trasformati in segnali analogici, possono comandare organi di controllo o di allarme, ecc.

Di grande importanza pratica è la realizzazione di una opportuna struttura di collegamento (interfaccia) fra gli strumenti ed il calcolatore, che in generale sono previsti con standard diversi.

Il minicomputer comunica con l'operatore per mezzo di telescrivente o di display a raggi catodici; può eventualmente essere connesso con un calcolatore di dimensioni maggiori.

In generale, sono possibili collegamenti diretti fino a distanze di qualche decina di metri; distanze superiori richiedono apposite apparecchiature di trasmissione dati (*modem*).

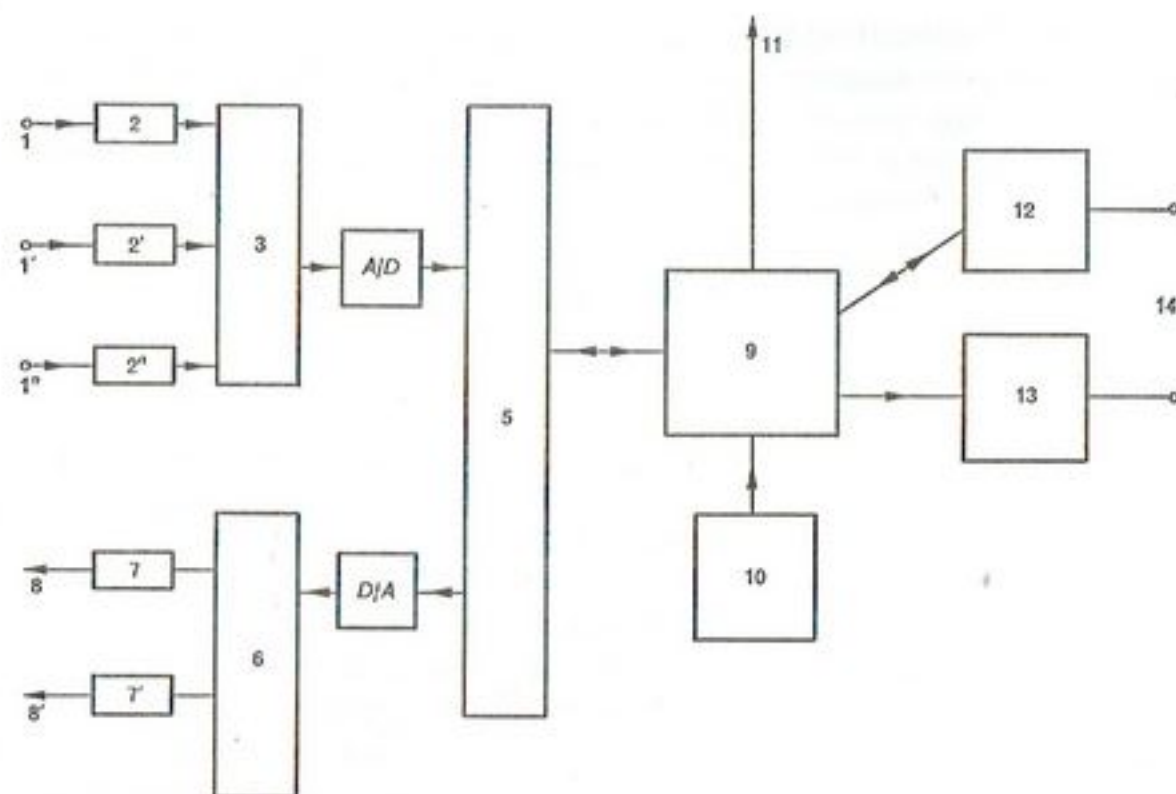



Fig. 4-56

Schema d'impiego di minicomputer: $1, 1', \ldots, 1^n$ = ingressi; $2, 2', \ldots, 2^n$ = trasduttori; 3 = multiplexer; 5 = interfaccia; 6 = demultiplexer; 7, 7' = attuatori; 8, 8' = uscite analogiche di comando; 9 = = minicomputer; 10 = programma con istruzioni; 11 = uscita verso calcolatore; 12 = telescrivente; 13 = display grafico; 14 = operatore.

4-8. Strumentazione a campionamento.

4-8,1. *Introduzione.*

Il termine di strumentazione a campionamento si riferisce a quei dispositivi che eseguono la misura di grandezze variabili nel tempo attraverso l'acquisizione e l'elaborazione di campioni delle grandezze stesse.

In uno strumento a campionamento i segnali di ingresso, eventualmente filtrati, attenuati o amplificati secondo le necessità, vengono campionati e quantizzati, garantendo però che il loro contenuto di informazione rimanga inalterato. Trattandosi di segnali variabili nel tempo, è necessario che gli ingressi dello strumento siano provvisti di sistemi di campionamento del tipo sample-and-hold (vedi 4-4,7). Le elaborazioni necessarie a determinare i parametri di interesse del misurando (ad es., il valore efficace di un'onda alternata) sono eseguite in forma numerica sulle sequenze di campioni acquisite, impiegando opportune relazioni matematiche.

Nella realizzazione di questi strumenti assumono particolare importanza le caratteristiche dei circuiti digitali impiegati. Le prestazioni raggiunte sia dagli attuali componenti digitali, come le memorie e i microprocessori, sia soprattutto dai convertitori A/D e dai circuiti di campionamento, permettono di acquisire, memorizzare ed elaborare i campioni di un segnale con buona accuratezza e velocità. Rispetto ai circuiti elettronici analogici, il ricorso all'elaborazione numerica consente alla strumentazione a campionamento migliori caratteristiche di stabilità e, specie per elaborazioni complesse, maggiore accuratezza nelle misure.

4-8,2. *Filtri antialiasing.*

Uno strumento a campionamento deve garantire le condizioni necessarie a non alterare il contenuto di informazione dei segnali acquisiti. Ciò è possibile se tali segnali sono compresi in un campo di frequenze rigorosamente limitato: il criterio esposto in 1-3,7 lega la scelta della durata dell'intervallo di campionamento alla massima frequenza considerata.

Le grandezze fisiche hanno spesso uno spettro di ampiezza decrescente all'aumentare della frequenza, la cui banda però non è rigorosamente limitata. Il campionamento introduce in tal caso un errore, detto di aliasing, dovuto alla presenza di componenti della forma d'onda aventi frequenza superiore a $f_c/2$ (vedi 1-3,8). Analoga situazione può verificarsi anche a causa del rumore sovrapposto al segnale utile.

Nel campionare un segnale è necessario mantenere questo errore entro i limiti specificati, eventualmente utilizzando una frequenza di campionamento più elevata di quella strettamente necessaria, oppure filtrando preventivamente il segnale per eliminare eventuali componenti a frequenza maggiore di $f_c/2$.

Un ulteriore errore legato al campionamento dipende dall'instabilità (jitter) del riferimento temporale impiegato. Ciò fa sì che gli istanti effettivi di campionamento possano differire da quelli previsti, con effetti tanto più evidenti, quanto più piccolo è l'intervallo $1/f_c$. Questo intervallo non può comunque essere ridotto al di sotto del tempo minimo necessario allo strumento per acquisire e convertire in forma numerica ciascun campione. indicata quindi con T la durata dell'intervallo effettivamente impiegato, il segnale da campionare non dovrebbe avere componenti a frequenza maggiore di $1/2T$, per evitare errori di aliasing. In situazioni reali questa condizione si verifica difficilmente, perciò gli strumenti a campionamento sono dotati all'ingresso di filtri, detti antialiasing, che limitano il campo di frequenze ammesse in modo da rispettare il vincolo imposto. La loro banda passante dipende dalla frequenza di campionamento dello strumento.

Le caratteristiche più importanti di un filtro antialiasing sono la forte attenuazione al di fuori della banda passante (fig. 4-57) e la stabilità nel tempo della sua risposta in frequenza. A causa del comportamento non ideale dei circuiti di filtraggio è necessario imporre condizioni più restrittive del limite teorico: in pratica, la frequenza di campionamento deve essere almeno 2,5 volte superiore a quella massima ammessa per il segnale.

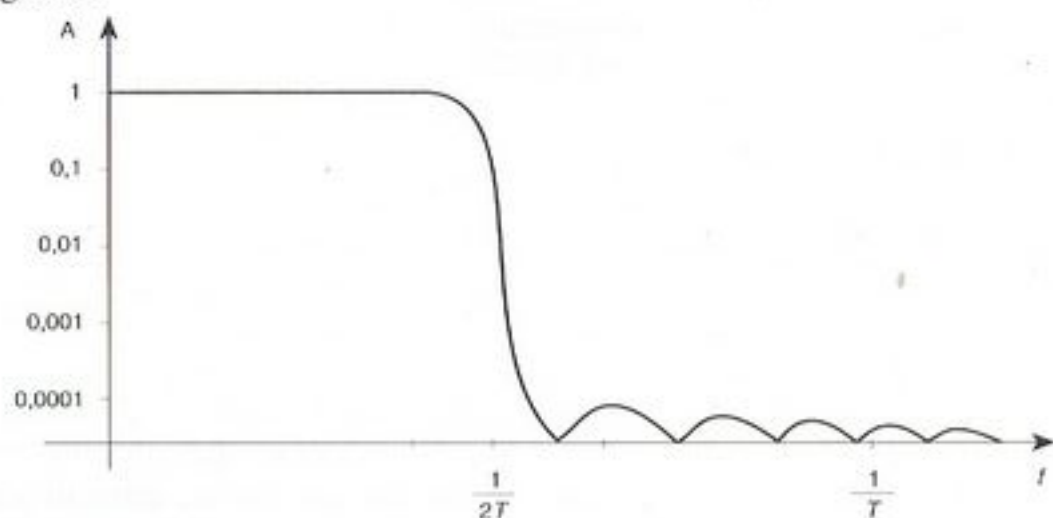



Fig. 4-57

È importante inoltre che il filtro non introduca alterazioni nel segnale acquisito: ciò si può ottenere imponendo che la risposta in banda passante abbia ampiezza costante e fase lineare con la frequenza. Soddisfare queste ultime condizioni comporta però una maggiore complessità del filtro stesso, per cui spesso si preferisce impiegare filtri meno sofisticati e compensare la loro caratteristica non ideale per mezzo di filtri numerici che operano direttamente sui campioni del segnale.

4-8,3. *Filtri numerici.*

Su un segnale campionato si possono eseguire, per mezzo di adeguati schemi di calcolo, operazioni analoghe a quelle che si realizzano sulle grandezze analogiche tramite circuiti elettrici o elettronici. Tra le operazioni più frequenti vi è il filtraggio, spesso impiegato, ad esempio, per selezionare particolari intervalli di frequenza, oppure per introdurre compensazioni che consentono di ottenere da un sistema le caratteristiche di risposta volute (vedi 1-5,7).

Un filtro numerico lineare, tempo invariante e causale si può rappresentare tramite l'equivalente in forma discretizzata dell'integrale di convoluzione tra il segnale di ingresso e la risposta all'impulso del filtro stesso. Quest'ultima è costituita da una sequenza di campioni, $h(kT)$, che in pratica si impone avere durata finita (finite impulse response, FIR), in modo che, data la sequenza di ingresso $x(kT)$, l'uscita all'istante nT sia ottenibile da un numero finito di somme e prodotti. Se la sequenza $h(kT)$ è composta di M campioni si ha:

$$y(nT) = T \sum_{k=0}^{M-1} x(kT)\, h[(n-k)T]$$

dove $y(nT)$ è un generico campione dell'uscita.

In alternativa, il filtro si può rappresentare con un'equazione ricorsiva alle differenze, del tipo:

$$y(nT) = a_0\, x(nT) + a_1\, x[(n-1)T] + \ldots + a_J\, x[(n-J)T] + \\ + b_l\, y[(n-1)T] + \ldots + b_K\, y[(n-k)T].$$

In questo caso esso ha in genere risposta impulsiva di durata infinita (infinite impulse response, IIR), a causa della dipendenza dell'uscita corrente dai valori assunti negli istanti precedenti.

Il progetto di un filtro numerico consiste nella determinazione dei valori più opportuni dei campioni $h(kT)$, oppure dei coefficienti a_i, b_i. Solitamente però l'operazione di filtraggio non viene eseguita calcolando direttamente i valori delle espressioni sopra riportate; vari criteri consentono, in base alle caratteristiche volute, di trovare le realizzazioni più efficienti e più sicure dal punto di vista numerico.

Un vantaggio dei filtri FIR è la facilità con cui si possono realizzare filtri a fase lineare, i quali non introducono distorsione di fase nel segnale. D'altra parte, i filtri IIR richiedono spesso un minor numero di coefficienti e risultano perciò più semplici.

Oltre ai filtri finora descritti, vanno ricordati anche i filtri a interpolazione. Essi vengono impiegati per elaborare i campioni della sequenza di ingresso al fine di produrne in uscita un'altra che, mantenendo le stesse caratteristiche, sia riferita a un diverso intervallo di campionamento, in genere più breve. Il filtro necessario per questa operazione può essere lineare, ma risulta spesso tempo variante.

Si parla specificamente di filtri a decimazione quando invece l'intervallo di campionamento della sequenza in uscita è maggiore di quello all'ingresso, nel qual caso deve anche essere ridotta proporzionalmente la banda del segnale.

4-8,4. *Misure a campionamento.*

Parametri quali il valore medio o il valore efficace di una grandezza periodica si possono facilmente determinare dai suoi campioni attraverso le corrispondenti espressioni matematiche. Se in uno o più periodi sono contenuti N campioni del segnale si ha infatti per il valore medio V_m:

$$V_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \qquad [4\text{-}6]$$

mentre per il valore efficace V è:

$$V^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2 (nT) \qquad [4\text{-}7]$$

Un'altra relazione spesso usata è quella per il calcolo del valore efficace della sola componente alternata di un segnale. Combinando le due espressioni precedenti si ha:

$$V_{ca}^2 = \frac{1}{N} \sum x^2 (nt) - [\frac{1}{N} \sum x(nT)]^2. \qquad [4\text{-}8]$$

Quando è rispettata la condizione che l'intervallo di tempo NT contenga un numero intero di periodi del segnale misurato, le relazioni [4-6], [4-7] e [4-8] consentono la determinazione esatta dei parametri considerati, indipendentemente dal valore assunto da N. Per questo motivo gli strumenti che devono garantire maggiore accuratezza spesso determinano preliminarmente il periodo del segnale da misurare e adattano di conseguenza la propria frequenza di campionamento. Altri strumenti sono in grado di estrarre automaticamente dalla sequenza di campioni acquisiti un sottoinsieme contenuto in uno o più periodi del segnale; in tal caso la condizione richiesta è verificata solo approssimativamente.

L'errore introdotto a causa della mancanza di sincronizzazione tra il segnale e il comando di campionamento risulta inversamente proporzionale a N e può quindi essere reso sufficientemente piccolo anche aumentando il numero di campioni acquisiti.

I metodi basati sull'uso di espressioni numeriche risultano particolarmente vantaggiosi in termini di accuratezza per le misure che richiedono trasformazioni non lineari, come la determinazione del vero valore efficace di una grandezza non sinusoidale. Le prestazioni ottenibili dipendono essenzialmente dalle caratteristiche del convertitore A/D e dalla banda passante dello strumento, mentre vengono evitate le difficoltà connesse con l'impiego di elementi non lineari quali le termocoppie o i circuiti analogici per la conversione da vero valore efficace a tensione continua.

4-8,5. *Oscilloscopi a campionamento.*

L'oscilloscopio a campionamento visualizza l'andamento nel tempo di un segnale presentando su uno schermo una sequenza dei suoi campioni. In questo strumento è indispensabile la presenza di circuiti digitali di memoria, e i campioni visualizzati sono perciò disponibili anche per ulteriori elaborazioni e per il trasferimento verso elaboratori o supporti di memoria permanenti.

Le prestazioni dello strumento dipendono principalmente da quelle del convertitore A/D impiegato; esso determina sia la risoluzione in ampiezza ottenibile, dipendente dal numero di bit, sia la massima frequenza di campionamento, funzione del tempo di conversione necessario per ciascun campione. La portata dello strumento può essere variata tramite attenuatori o amplificatori, che spesso sono programmabili tramite opportuni circuiti digitali.

In genere, la precisione e la risoluzione di un convertitore A/D diminuiscono all'aumentare della sua velocità di funzionamento, poiché si riduce il tempo a disposizione per la conversione. Nell'acquisizione di grandezze variabili nel tempo è necessario tener conto anche del comportamento dinamico, sia del convertitore, sia dei circuiti sample-and-hold del campionatore. Per dare una valutazione complessiva delle prestazioni di uno strumento è spesso fornita l'indicazione relativa ai bit effettivi, che rappresentano il limite di risoluzione oltre il quale diventano sensibili gli errori dovuti al comportamento dinamico dei circuiti. Questa indicazione varia con la frequenza del segnale d'ingresso, e ha in genere valore inferiore al numero di bit nominale del convertitore A/D.

In un oscilloscopio a campionamento il riferimento di tempo è dato dal comando di temporizzazione (clock) del campionatore, al quale si richiedono perciò adeguate caratteristiche di accuratezza e stabilità. La regolazione della base dei tempi consente di variare la durata dell'intervallo di tempo visualizzato; a seconda del valore impostato, questo può comportare la modifica sia delle modalità di memorizzazione dei dati acquisiti, sia della frequenza di campionamento.

Al variare della frequenza di campionamento anche la banda dei fitri antialiasing va adattata di conseguenza, per non alterare il segnale acqui-

sito. In alcuni strumenti ciò viene attuato per via analogica, consentendo all'operatore di scegliere la banda passante ottimale. È anche possibile procedere per via numerica, campionando sempre il segnale alla massima velocità e impiegando poi dei filtri a decimazione.

L'oscilloscopio a campionamento impiega un comando di sincronizzazione con il segnale utile, che può essere generato in modo simile a quello di un oscilloscopio analogico; in questo caso però il suo scopo è quello di controllare la gestione della scrittura dei dati nella memoria, con criteri che dipendono dalle modalità di acquisizione seguite.

La visualizzazione delle forme d'onda può aver luogo sia utilizzando i tubi a raggi catodici normalmente in uso anche sugli oscilloscopi analogici, sia impiegando tubi a scansione, simili a quelli in uso sugli apparecchi televisivi. Nel primo caso il valore numerico associato a ciascun campione deve essere riconvertito in una tensione atta a fornire il comando di deflessione del fascio di elettroni. A tale scopo viene utilizzato un convertitore numerico-analogico (o digitale-analogico, vedi 4-4,8). Con i tubi a scansione invece, lo schermo viene idealmente suddiviso in elementi di immagine (pixel) e la visualizzazione ha luogo comandando l'accensione o lo spegnimento degli elementi opportuni in base alle indicazioni contenute in una memoria dedicata. Questa seconda soluzione risulta in genere più economica, mentre la prima ha la caratteristica di consentire l'impiego dell'oscilloscopio sia in forma puramente analogica, sia come strumento a campionamento.

Lo schermo è dotato di un reticolo la cui taratura consente di leggere direttamente i valori delle grandezze di interesse. È ormai generalizzato però l'uso di cursori per individuare intervalli di ampiezza o di tempo (Δv, Δt), il cui valore è indicato automaticamente in forma numerica dallo strumento. Altrettanto frequente è la possibilità di eseguire misure di grandezze quali il periodo, la frequenza, il valore di picco, il valore efficace ecc., impiegando algoritmi numerici che operano sui dati acquisiti dallo strumento.

Va notato che, anche in condizioni di campionamento corrette, non è sempre agevole riconoscere sullo schermo dell'oscilloscopio l'andamento di una forma d'onda. Ad esempio, per conservare la quantità di informazione di un segnale sinusoidale sono sufficienti due campioni per periodo, ma per interpretare correttamente l'immagine visualizzata è preferibile disporre sullo schermo di almeno dieci punti (fig. 4-58). Per questo motivo negli oscilloscopi a campionamento vengono spesso impiegati filtri a interpolazione per ricostruire un certo numero di punti intermedi tra due campioni, incrementando la risoluzione temporale e migliorando notevolmente la fedeltà della visualizzazione. Si deve quindi tenere presente

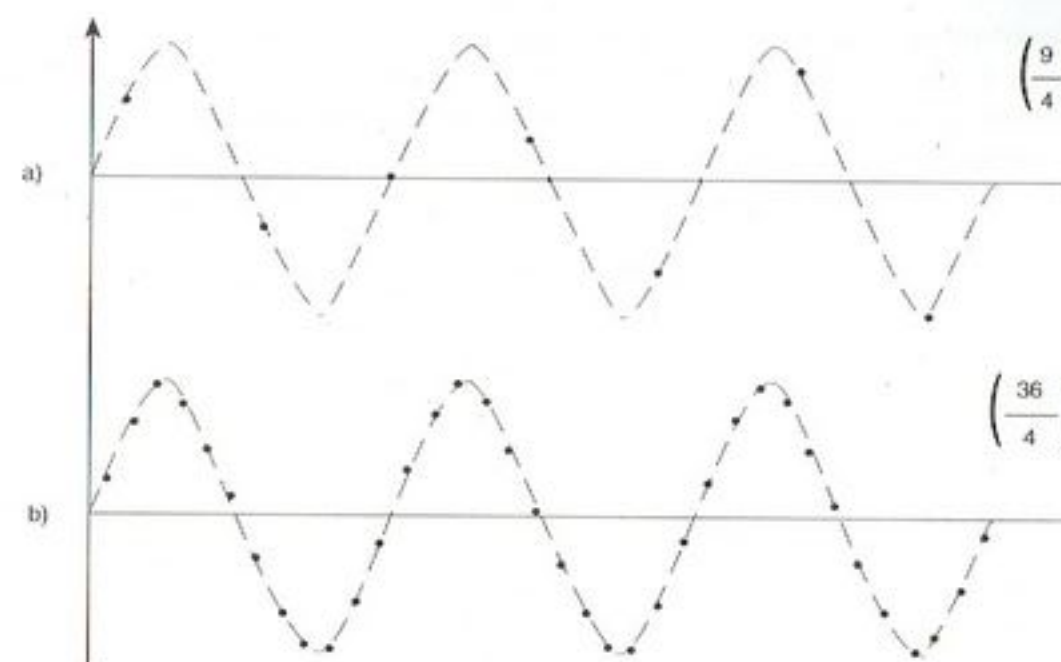



Fig. 4-58

che la distanza tra punti successivi sullo schermo non corrisponde necessariamente all'intervallo di campionamento.

Nel discutere ulteriormente il funzionamento dello strumento è necessario distinguere tra l'acquisizione di forme d'onda ripetitive e quella di transitori.

4-8,6. *Acquisizione di transitori.*

Per l'analisi di grandezze transitorie il funzionamento dell'oscilloscopio a campionamento è molto simile a quello di un registratore di eventi (4-6,4): il segnale di ingresso viene campionato e memorizzato con continuità e la memoria è organizzata in modo da consentire di scrivere i dati più recenti sopra quelli più vecchi. In questo caso il comando di sincronizzazione indica il verificarsi dell'evento di interesse, e serve a sospendere, eventualmente dopo un tempo stabilito dall'operatore, l'acquisizione di nuovi campioni. Una caratteristica importante dello strumento è la profondità della memoria dati, ossia il numero massimo di campioni che essa può contenere, che in alcuni casi è di varie decine di migliaia. Se la profondità è pari a N campioni e l'intervallo di campionamento è T, lo strumento può mantenere informazioni relative a un intervallo di tempo di durata NT.

Per poter acquisire correttamente anche transitori veloci è necessaria un'elevata frequenza di campionamento. Negli strumenti di prestazioni migliori si ricorre spesso all'impiego di più convertitori A/D posti in pa-

rallelo allo stesso canale di ingresso e attivati in sequenza tramite un multiplexer. I dati acquisiti sono poi ricombinati all'interno della memoria dell'oscilloscopio. Con questo accorgimento si ottiene una elevata velocità di campionamento senza rinunciare alla risoluzione, in quanto aumenta il tempo di conversione a disposizione di ciascun convertitore.

Attualmente sono raggiungibili frequenze di campionamento dell'ordine dei GHz, necessarie per osservare con sufficiente dettaglio transitori veloci. A frequenze così elevate diventa molto importante garantire la stabilità del riferimento temporale al fine di ridurre gli errori dovuti al jitter.

4-8,7. *Acquisizione di grandezze periodiche.*

Se la forma d'onda da acquisire è periodica, si possono impiegare schemi di campionamento particolari, che consentono di migliorare le prestazioni e ridurre il costo di un oscilloscopio a campionamento. Infatti, sfruttando la periodicità del segnale, diventa possibile campionare anche a cadenze più basse di quelle normalmente imposte, e l'acquisizione può interessare un numero di periodi maggiore di quello visualizzato. Ricombinando in modo opportuno i campioni acquisiti si ottiene ugualmente la forma d'onda originaria mantenendo, in termini equivalenti, l'intervallo di campionamento necessario.

In fase di acquisizione, la separazione tra due campioni consecutivi non è più legata alla risoluzione nel tempo che si vuole ottenere. Ciò rende accettabile un tempo di conversione più lungo e permette di impiegare convertitori A/D con maggiore risoluzione, oppure di minor costo. I criteri di campionamento utilizzati sono essenzialmente due: nel primo caso il campionatore viene sincronizzato con il periodo del segnale di ingresso, attuando così un campionamento coerente della forma d'onda. Le relative modalità sono illustrate in 5-5,6.

Nel secondo metodo non viene imposta alcuna relazione con il periodo del segnale. Viene invece misurato accuratamente l'intervallo che intercorre tra il comando di sincronizzazione dell'oscilloscopio e l'istante di campionamento immediatamente seguente. Questa informazione permette di ricombinare i campioni ottenuti in più passate successive, come illustrato in fig. 4-59, raggiungendo la risoluzione temporale voluta.

In entrambi i casi si ottiene un intervallo equivalente di campionamento che può corrispondere ad una frequenza molto più alta di quella effettiva del campionatore usato. Questo spiega la differenza che si incontra in molti strumenti tra le prestazioni riferite ai segnali ripetitivi e quelle riferite ai transitori. Ai fini della misura di grandezze periodiche, si deve fare riferimento alla frequenza di campionamento equivalente; l'oscilloscopio deve perciò disporre di una banda passante adeguata per non alterare la grandezza da misurare.

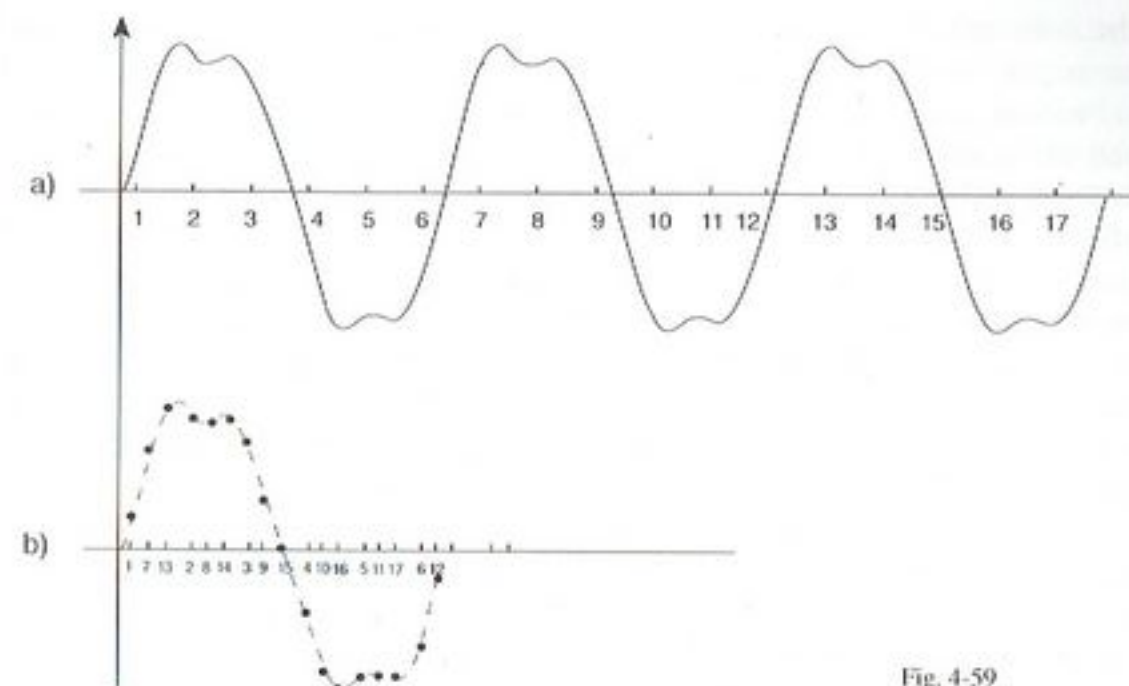



Fig. 4-59

4-8,8. *Analisi spettrale.*

L'analisi spettrale comporta lo studio dei segnali attraverso la loro scomposizione in termini sinusoidali a diverse frequenze. Essa rende più agevole caratterizzare forme d'onda complesse, che sempre più spesso sono presenti nei circuiti e nei dispositivi elettrici ed elettronici.

Con uno strumento a campionamento lo spettro di frequenza di un segnale viene determinato per via numerica, calcolando la trasformata di Fourier di una sequenza dei suoi campioni. Poiché il tempo di osservazione del segnale è necessariamente limitato, l'elaborazione interessa un numero finito N di campioni, dai quali si ottiene la trasformata discreta di Fourier (DFT, vedi 1-3,4):

$$X\left(\frac{k}{NT}\right) = T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\, e^{-j2\pi kn/N} \qquad [4\text{-}9]$$

La DFT è costituita da una sequenza di valori complessi dai quali, con le opportune trasformazioni, si risale all'ampiezza e alla fase di ciascuna componente spettrale. Per il calcolo di questa trasformata esiste un algoritmo veloce particolarmente efficiente (fast Fourier transform, FFT),

che consente di ridurre la complessità delle elaborazioni e quindi il tempo necessario a ottenere i risultati.

Se si analizza una forma d'onda la cui evoluzione sia tutta compresa nell'intervallo di osservazione (cioè, $x(t)$ è nulla per $t < 0$ e per $t > NT$), la DFT definita dall'espressione [4-9] fornisce lo spettro per valori multipli della frequenza $1/NT$, pari al reciproco dell'intervallo di osservazione stesso. La stessa relazione è applicabile, senza introdurre errori, anche a segnali periodici, ma soltanto a condizione che l'intervallo di osservazione corrisponda esattamente al periodo del segnale da analizzare o a un suo multiplo. Ciò si può ottenere sincronizzando il campionamento con il periodo del segnale (campionamento coerente) e risulta utile, ad esempio, nell'analisi delle armoniche della frequenza di rete.

Spesso il segnale da analizzare ha durata maggiore dell'intervallo di osservazione, oppure risulta difficoltoso attuare il campionamento coerente di un segnale periodico. In questi casi i valori della trasformata di Fourier ottenuti sono affetti da un errore, detto di troncamento in quanto si può ritenere che nell'espressione [4-9] i campioni $x(nT)$ per $n < 0$ e per $n > N$ siano stati posti implicitamente uguali a zero. Anche in presenza di una singola componente sinusoidale, l'errore di troncamento provoca una dispersione dello spettro, i cui campioni risultano tutti non nulli, come è illustrato dallo spettro di ampiezza di fig. 4-60. Se la forma d'onda è più complessa, la dispersione dovuta a ciascuna componente può causare interferenze, introducendo ulteriori alterazioni che non consentono una misura accurata dello spettro del segnale.

Per ridurre la dispersione spettrale si fa ricorso a funzioni di pesatura dei campioni acquisiti, dette finestre. Esse sono in genere funzioni continue, definite in modo da avere valore nullo al di fuori dell'intervallo di osservazione; in fig. 4-61 è riportato l'andamento di una di queste funzioni, detta finestra «a coseno rialzato». La pesatura altera l'andamento dei campioni nel tempo, ma consente di limitare la dispersione spettrale e quindi eventuali interferenze, come si può osservare confrontando l'esempio di fig. 4-60 con quello di fig. 4-62, dove ai campioni del segnale è stata applicata la finestra a coseno rialzato. Va notato che per poter eseguire misure accurate è necessario fare uso di finestre appositamente progettate secondo le specifiche richieste, ad esempio, per garantire sufficiente accuratezza nelle misure di ampiezza, oppure un'adeguata risoluzione in frequenza.

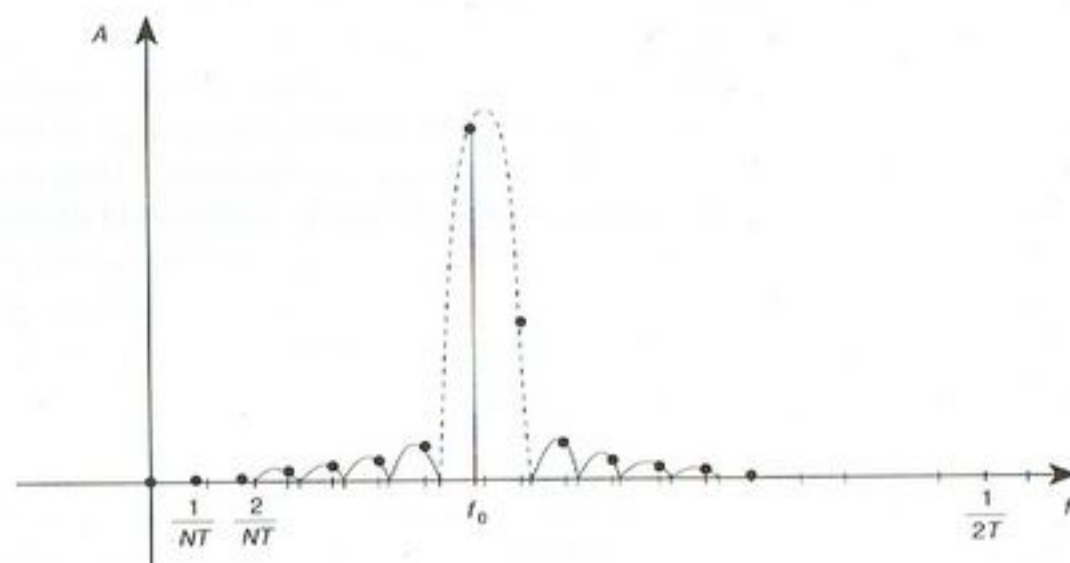
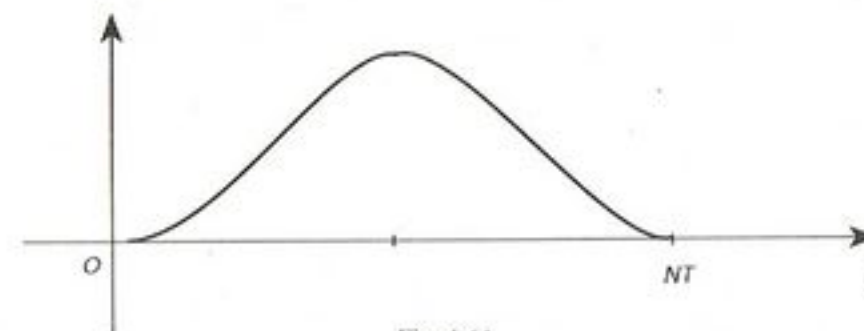



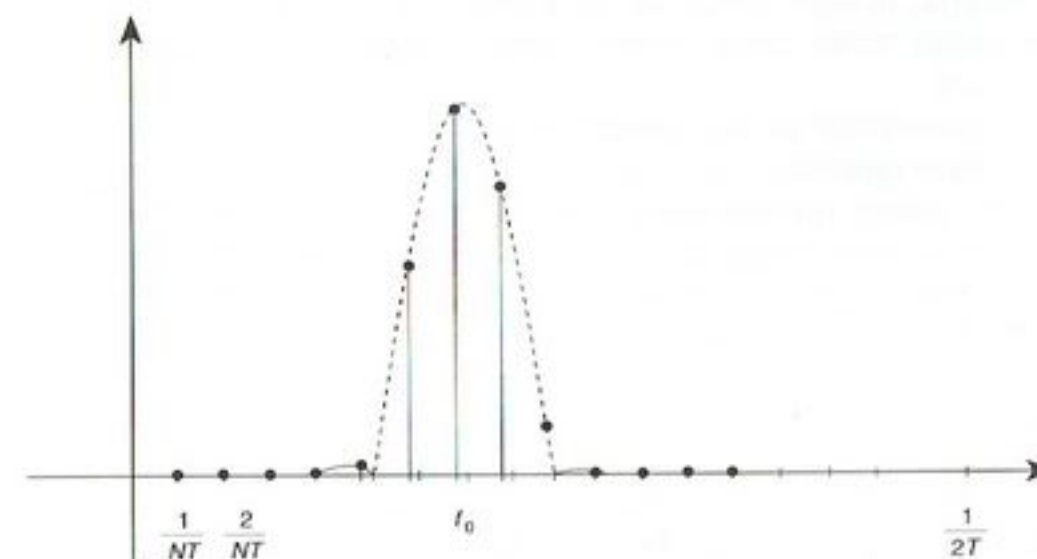
Fig. 4-60

Fig. 4-61

Un'interessante applicazione dell'analisi spettrale è lo studio dei sistemi elettrici con tensioni e correnti non sinusoidali. È infatti agevole determinare, per ciascuna frequenza f, le ampiezze della tensione V e della corrente I, nonché il loro sfasamento. Note queste grandezze, risulta immediato risalire ai valori della potenza, dell'impedenza ecc.

Fig. 4-62

Capitolo V

ALTRI APPARECCHI DI MISURA

5-1. Trasduttori.

5-1,1. *Fondamenti.*

Gli strumenti, descritti nei precedenti capitoli, rappresentano solo una parte degli apparecchi utilizzati nelle misure elettriche. Essi sono infatti spesso impiegati in unione con altre apparecchiature (dette talvolta accessorie), per costituire strumenti più complessi, dotati di caratteristiche particolari. Queste apparecchiature hanno lo scopo di trasformare convenientemente la grandezza da misurare, per renderla di natura e di valore adatti allo strumento vero e proprio; esse possono assumere denominazioni diverse, in dipendenza sia delle loro specifiche funzioni, sia del loro più o meno vasto impiego: trasduttori, convertitori, trasformatori di misura, ecc.

Gli accessori che qui maggiormente interessano sono quelli che operano su grandezze elettriche; sarà perciò considerata a parte quella vasta categoria di trasduttori che consentono di trasformare in una grandezza elettrica (tensione o corrente) altre grandezze, non elettriche (meccaniche, termiche, chimiche, ecc.) il cui studio può essere svolto in modo del tutto parallelo, in base agli stessi principi generali.

5-1,2. *Trasduttori di grandezze elettriche.*

I trasduttori di grandezze elettriche trasformano, in generale, una tensione o una corrente in un'altra grandezza elettrica, non necessariamente dello stesso tipo, con diverso valore o con diverse caratteristiche.

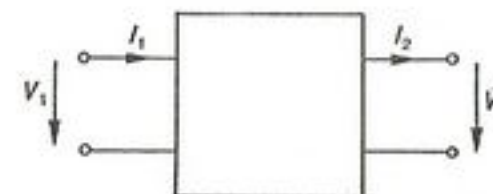
Appartengono a questa categoria, ad esempio, i resistori addizionali ed i derivatori (o più in generale le impedenze di valore e fase noti), i divisori di tensione, i trasformatori di tensione e di corrente, i filtri, i convertitori (in particolare da grandezze alternate in continue o viceversa) gli amplificatori, ecc.

Dal punto di vista del suo comportamento come elemento di un sistema di misura, un trasduttore può essere rappresentato come un doppio bipolo (fig. 5-1); quando alla coppia di morsetti d'ingresso è applicata la grandezza da misurare, si presenta all'uscita una grandezza univocamente legata alla precedente, che viene trasmessa all'elemento successivo del sistema (ad esempio, misurata da uno strumento elettromeccanico).

Questa rappresentazione è particolarmente conveniente quando il comportamento del trasduttore sia lineare, o possa, in prima approssimazione, ritenersi tale. In questo caso sono infatti applicabili i criteri di analisi illustrati in 1-4.

In particolare, per il doppio bipolo di fig. 5-1, in regime sinusoidale permanente, si può scrivere il sistema:

Fig. 5-1

$$\left.\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{A}\dot{V}_2 + \dot{B}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= \dot{C}\dot{V}_2 + \dot{D}\dot{I}_2 \end{aligned}\right\} \qquad [5\text{-}1]$$

Analoghe relazioni possono scriversi, con ovvie modifiche nelle notazioni, per le Laplacetrasformate di tensioni o correnti comunque variabili.

I parametri che compaiono nella [5-1] sono, in generale, funzioni complesse della frequenza.

5-1,3. *Caratteristiche statiche.*

La caratteristica statica più importante è la relazione che il trasduttore stabilisce fra le sue grandezze di ingresso e di uscita, in prefissate condizioni di regime. Questa corrispondenza può essere espressa in forma grafica od analitica; essa è, nella sua forma più generale, di tipo non lineare, ma, nella maggioranza dei casi, si preferisce ricorrere a trasduttori lineari che possono essere meglio considerati come elementi a sé stanti, dotati di caratteristiche e di precisione loro proprie.

L'ipotesi di linearità consente di definire un fattore di conversione del trasduttore k come quel fattore (in generale dotato di dimensioni fisiche) per il quale si deve moltiplicare la grandezza in uscita X_2 per ottenere il valore della grandezza d'entrata X_1.

Altri parametri che caratterizzano il comportamento di un trasduttore sono:

– il valore (nominale) della grandezza d'ingresso (o d'uscita), nonché i corrispondenti valori massimo e minimo, per cui valgono le garanzie di precisione;

– il campo delle frequenze della grandezza d'ingresso in cui il trasduttore può operare;

– la sensibilità, intesa come rapporto fra un incremento della grandezza d'uscita ed il corrispondente incremento della grandezza d'ingresso; per un trasduttore lineare questo parametro è costante.

5-1,4. *Errori.*

In molti casi, si attribuisce al trasduttore un fattore di conversione nominale k_n, cosicché si assume di poter conoscere il valore X della grandezza d'entrata, quando sia nota quella d'uscita X_2, applicando la relazione:

$$X = k_n X_2 .$$

Questo valore differisce dal valore vero X_1 per la presenza dell'*errore di rapporto* o di ampiezza:

$$\eta = \frac{X - X_1}{X_1} = \frac{k_n X_2 - k X_2}{k X_2} = \frac{k_n - k}{k} \simeq \frac{k_n - k}{k_n} . \qquad [5\text{-}2]$$

Nel funzionamento in regime sinusoidale può anche aver importanza l'*errore d'angolo,* ossia la differenza di fase fra la grandezza d'uscita $\dot{X}_2$ e quella d'entrata $\dot{X}_1$:

$$\varepsilon = \widehat{X_2 X_1} \qquad [5\text{-}3]$$

che si considera positivo quando la grandezza d'uscita precede quella d'entrata.

Se questi errori sono sufficientemente piccoli, si potrà porre:

$$\dot{X}_1 \simeq k_n \dot{X}_2 (1 - \eta - j\varepsilon) .$$

L'errore proprio di un trasduttore dipende sia dalle sue condizioni di impiego sia da fattori esterni. Alcune di queste cause di errore possono essere inquadrate e tenute distinte dalle altre (es. errore di linearità, errore di carico, ecc.). In altri casi si indicano le fasce d'incertezza cui l'apparecchio può dar luogo nel suo funzionamento, a breve o a lungo termine.

In particolare, la caratteristica reale di un trasduttore si scosta, in generale, dalla lineare, al variare del valore della grandezza d'ingresso (vedi ad esempio fig. 5-2); ciò dà luogo ad un *errore di linearità* che può essere espresso in termini assoluti o relativi, o riferiti al fondo scala.

Oltre alla linearità assoluta, conta spesso anche la linearità differenziale; in un sistema perfettamente lineare, oltre ad avere, fra le grandezze d'en-

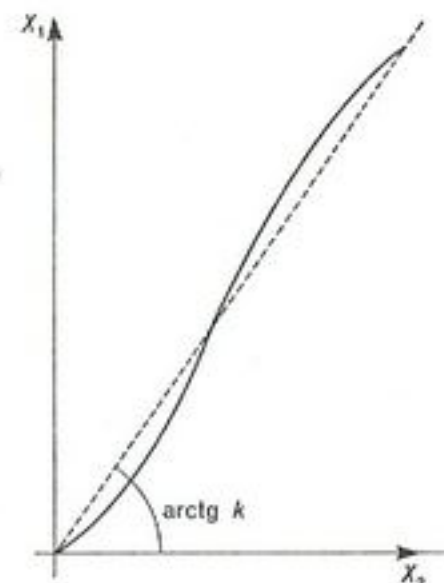



Fig. 5-2

trata e d'uscita la relazione:

$$X_1 = k X_2$$

si ha anche, per le rispettive variazioni intorno ad un punto:

$$\Delta X_1 = k \, \Delta X_2$$

con lo stesso valore del fattore k. Su una caratteristica non lineare, le due diverse relazioni possono invece essere indipendenti l'una dall'altra, presentando errori diversi.

Non tutti i fenomeni non lineari possono ricondursi a curve caratteristiche del tipo di fig. 5-2; in molti sistemi reali possono esistere delle « zone morte » per cui ad una piccola variazione della grandezza d'entrata corrisponde una variazione nulla nella grandezza di uscita o delle isteresi, per cui allo stesso valore dell'entrata, raggiunto per valori crescenti o decrescenti, corrispondono valori diversi dell'uscita. Questi fenomeni, dovuti ad attriti, a giochi meccanici, isteresi, ecc., determinano anche il *potere di risoluzione* del trasduttore ossia la minima variazione della grandezza d'ingresso che è possibile determinare con una precisione prefissata.

5-1,5. *Caratteristiche di carico.*

Appare evidente, dalle [5-1], che il rapporto fra due qualsiasi grandezze, l'una in entrata e l'altra in uscita, dipende dalla relazione esistente fra tensione e corrente all'uscita, ossia dall'impedenza di carico:

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}; \qquad [5\text{-}4]$$

questa relazione è, in generale, imposta dall'elemento che segue il trasduttore, nella catena di misura.

Si possono perciò, a questo riguardo, considerare due casi diversi:

a) nei trasduttori destinati a funzionare su impedenza di carico fissa, l'effetto di questa viene conglobato nel rapporto nominale del trasduttore;

b) per i trasduttori destinati a funzionare su carico variabile, dovrà essere trascurabile l'influenza delle variazioni dell'impedenza di carico, per tutto il campo di valori ammissibili.

Come esempio di questo secondo caso, si consideri la relazione fra tensioni, in ingresso ed in uscita, del doppio bipolo di fig. 5-1. Introducendo la [5-4] nelle [5-1] si ha:

$$\dot{V}_1 = \left(\dot{A} + \frac{\dot{B}}{\dot{Z}_2}\right)\dot{V}_2;$$

questa relazione consente di determinare la caratteristica degli errori del trasduttore, in funzione del carico ed, eventualmente, del suo fattore di potenza.

Se gli errori sono piccoli, ci si può spesso ricondurre allo schema equivalente semplificato di fig. 5-3, nel quale $\dot{V}_{20}$ è la tensione che si presenta ai morsetti secondari a vuoto (ossia con $Z_2 = \infty$) e $\dot{Z}_i$ è l'impedenza equivalente interna del trasduttore, vista dai morsetti secondari. È allora:

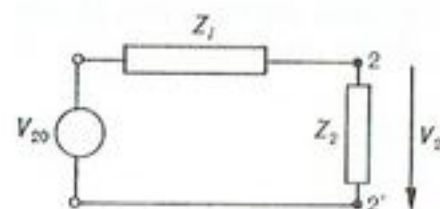
Fig. 5-3

$$\dot{V}_{20} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{A}} = \dot{V}_2\left(1 + \frac{\dot{Z}_i}{\dot{Z}_2}\right)$$

e l'effetto del carico comporta una variazione relativa della tensione d'uscita:

$$\frac{\dot{V}_2 - \dot{V}_{20}}{\dot{V}_{20}} \cong -\frac{\dot{Z}_i}{\dot{Z}_2}.$$

A sua volta, nei riguardi dell'elemento che lo precede, il trasduttore sarà caratterizzato dalla sua impedenza d'ingresso ($Z_1 = \dot{V}_1/\dot{I}_1$).

L'influenza esercitata da un elemento di una catena di misura su quelli che lo seguono o lo precedono può essere fortemente ridotto, nella maggioranza dei casi, mediante l'interposizione di adatte apparecchiature elettroniche, ad elevata impedenza d'ingresso e bassa impedenza d'uscita.

5-1,6. *Banda di frequenza.*

Quando un trasduttore funziona in regime sinusoidale, interessa definire quale sia il campo di valori della frequenza per cui gli errori si mantengono entro limiti prefissati.

È, a questo scopo, di uso corrente il definire la « larghezza di banda » del trasduttore, come quel campo di frequenze entro il quale il fattore di conversione si mantiene superiore ad una certa frazione, in genere il 70%, (ossia $-3\,db$) del suo valore massimo.

Sono da ricordare, in particolare, gli apparecchi la cui banda si estende fino a grandezze costanti (continue), e quelli a banda stretta, ossia fortemente selettivi.

5-1,7. *Caratteristiche dinamiche.*

La conoscenza del comportamento di un trasduttore, in regime comunque variabile, è assai spesso richiesta dal suo inserimento in un sistema di controllo, dove esso è sottoposto a transitori di diverso tipo.

Come già si è osservato in 1-4,3, la forma più sintetica e completa per rappresentare il funzionamento del trasduttore, con ogni tipo di transitorio, è data della sua funzione $G(p)$ di trasferimento.

Spesso però si preferisce esprimere il risultato in forma grafica, mediante la risposta a un gradino (in funzione del tempo), o in un diagramma delle $\dot{G}(j\omega)$, in funzione della pulsazione ω.

Su questi diagrammi possono essere individuati, secondo criteri teorici od empirici, dei parametri caratteristici (tempo di salita, tempo di assestamento, tempo morto, ecc., per la rappresentazione nel tempo; frequenza e ampiezza di risonanza, sfasamento corrispondente ad un'attenuazione di $20\,db$, ecc., per la rappresentazione in frequenza); questi parametri servono al confronto fra trasduttori diversi.

Non sempre tuttavia questi parametri sono soddisfacenti per caratterizzare la *precisione dinamica*, ossia l'entità degli scarti fra il valore misurato istante per istante e il corrispondente valore ideale.

Si ricorre perciò talvolta ad opportuni indici di qualità, funzioni integrali dell'errore istantaneo $e(t)$; alcuni di questi indici sono:

$$I = \int_0^\infty e^2(t)\,dt$$

detto anche ISE (integral square error) o:

$$I=\int_0^\infty |e(t)|\,dt$$

detto ITAE (integral time absolute error). Il loro calcolo può essere eseguito sia analiticamente che sperimentalmente, per un dato segnale d'ingresso.

5-2. Divisori e derivatori.

5-2,1. *Divisori di tensione.*

Un divisore di tensione è un trasduttore che ha lo scopo di trasformare la tensione applicata ai suoi morsetti in ingresso in una tensione di uscita della stessa forma, ma di valore ridotto in rapporto noto.

Esso trova impiego, in generale, per le misure delle tensioni troppo elevate per poter essere applicate direttamente ad uno strumento; si hanno così sia divisori che consentono la misura delle alte tensioni (dell'ordine cioè dai kV fino a qualche MV), mediante strumenti con portata delle centinaia di volt, sia divisori per la misura di tensioni dell'ordine delle decine o centinaia di volt, con strumenti (elettronici) con portate di qualche decimo o centesimo di volt.

Fig. 5-4

Il tipo più semplice di divisore è costituito da due impedenze $\dot{Z}_a$ e $\dot{Z}_b$, fra loro in serie (fig. 5-4); si ha, per esempio, in regime sinusoidale, in assenza di carico sui morsetti di uscita:

$$[\dot{V}_2]_{I_2=0}=\dot{V}_1\frac{\dot{Z}_b}{\dot{Z}_a+\dot{Z}_b}=\frac{1}{\dot{k}_0}\dot{V}_1 \,.$$

Risulta evidente che il rapporto $\dot{k}_0$ del divisore risulta un numero reale, indipendente dalla frequenza, solo se le impedenze $\dot{Z}_a$ e $\dot{Z}_b$ sono fra loro simili cioè entrambe resistive (divisore ohmico) (fig. 5-5) o capacitive

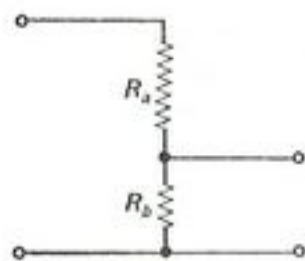



Fig. 5-5

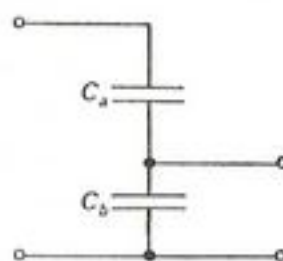



Fig. 5-6

(divisore capacitivo) (fig. 5-6) o combinazioni in serie o in parallelo di resistenze e capacità (divisori misti) del tipo in fig. 5-7 *a*, 5-7 *b* in cui sia $R_aC_a=R_bC_b$; meno usati sono gli elementi induttivi.

Quando la similitudine non sia realizzata, il divisore dà luogo ad un errore, funzione della frequenza, sulla fase e sul modulo della tensione

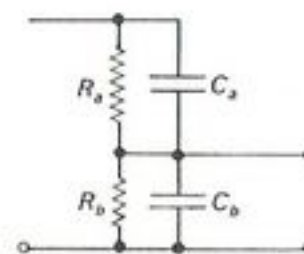



Fig. 5-7*a*

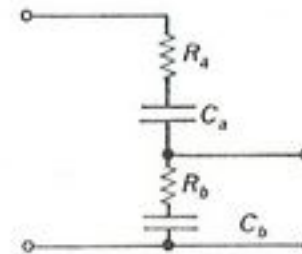



Fig. 5-7*b*

misurata $k_0\dot{V}_2$, rispetto alla $\dot{V}_1$. I limiti di questo errore e il campo di frequenza in cui esso interessa dipendono ovviamente dall'applicazione cui è destinato il divisore stesso.

Il circuito di fig. 5-4 può essere agevolmente trasformato, ai fini del suo comportamento ai morsetti di uscita, in quello di fig. 5-8; esso è alimentato dalla f.e.m. $\dot{V}_{20}$ e ha in serie l'impedenza equivalente:

$$\dot{Z}_e=\frac{\dot{Z}_a\dot{Z}_b}{\dot{Z}_a+\dot{Z}_b}=\frac{\dot{Z}_a}{\dot{k}_0}=\frac{(\dot{k}_0-1)}{\dot{k}_0^2}\dot{Z}_t$$

essendo $\dot{Z}_t=\dot{Z}_a+\dot{Z}_b$ l'impedenza totale ai morsetti d'ingresso.

Fig. 5-8

Si riconosce facilmente che la presenza di un carico Z_2 ai morsetti di uscita dà luogo ad una caduta di tensione ΔV che è, in valore relativo:

$$\frac{\Delta\dot{V}}{\dot{V}_{20}}=-\frac{\dot{Z}_e}{\dot{Z}_2};$$

l'influenza del carico è perciò tanto più piccola quanto minore è l'impedenza equivalente del divisore rispetto a quella del carico.

Se il divisore è destinato a lavorare su un carico fisso Z_{2n} la tensione di uscita risulta:

$$\dot{V}_2=\frac{\dot{Z}_{2n}}{\dot{Z}_e+\dot{Z}_{2n}}\dot{V}_{20}=\frac{\dot{Z}_{2n}}{\dot{Z}_e+\dot{Z}_{2n}}\frac{\dot{V}_1}{\dot{k}_0},$$

e quindi il fattore di conversione, o rapporto del divisore diviene:

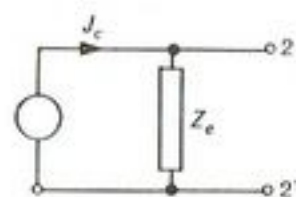



Fig. 5-9

$$\dot k = \dot k_0 \left(1 + \frac{\dot Z_e}{\dot Z_{2n}}\right).$$

Quando sia $V_1 \gg V_2$, è $Z_a \gg Z_b$ e può essere conveniente una rappresentazione con un generatore di corrente $\dot J_e = \dot V_1 / \dot Z_a$ (fig. 5-9); è allora anche $\dot Z_e = \dot Z_b$.

5-2,2. *Resistori serie.*

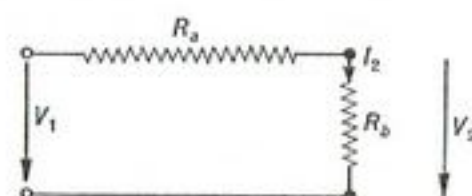
Abbiamo già visto alcuni esempi di resistori serie usati per modificare la portata di voltmetri magnetoelettrici o elettrodinamici; in queste applicazioni, con correnti continue o alternate di bassa frequenza, interessa in linea di massima solo la costanza del modulo dell'impedenza, costituita dal resistore. Questa costanza è garantita dall'uso di leghe inalterabili nel tempo e dotate di basso coefficiente di temperatura, nonché da un adeguato dimensionamento termico del resistore stesso. Problemi analoghi si verificano per i resistori inseriti nelle voltmetriche dei wattmetri.

Quando si vogliano realizzare resistori serie per la misura di alte tensioni (decine o centinaia di kV) è necessario ricorrere a resistenze di valore elevato, dalle decine alle migliaia di MΩ, per limitare la potenza dissipata; diviene allora difficile ottenere delle resistenze pure ossia ottenere che la corrente in uscita dal resistore sia in rapporti di ampiezza e di fase ben definiti, rispetto alla tensione applicata, in modo indipendente dalla frequenza.

Fig. 5-10

Un resistore addizionale equivale, da questo punto di vista, ad un divisore ohmico che abbia come elemento di bassa tensione una resistenza pura di valore molto piccolo rispetto a quella dell'elemento di alta tensione; è infatti (fig. 5-10):

$$\dot I_2 = \frac{\dot V_2}{R_b} \simeq \frac{\dot V_1}{R_a}.$$

Il resistore addizionale risulta conveniente per limitare sia l'effetto della resistenza del carico, sia il consumo del sistema (che risulta uguale alla corrente assorbita dallo strumento); esso presenta però l'inconveniente di avere una tensione elevata a circuito secondario aperto. Il resistore addizionale viene perciò in genere usato per la misura di alte tensioni continue mentre per le tensioni variabili si preferiscono i divisori capacitivi, che

non danno luogo a dissipazione di potenza. Un altro aspetto caratteristico dei resistori serie, rispetto ai divisori, è il fatto che per determinare il loro comportamento occorre conoscerne l'impedenza, mentre il comportamento di un divisore è definito dal rapporto fra due impedenze, che è più facile da determinare e da mantenere costante.

Per esempio, il valore di una resistenza di elevato valore può essere alterato dal suo riscaldamento o dalla presenza di depositi superficiali di polvere e di umidità; nel caso di un divisore, questi effetti influiscono solo per la loro disuniformità sull'elemento di alta e su quello di bassa tensione.

5-2,3. *Elementi parassiti. Compensazione.*

Gli elementi che compongono un divisore (o un resistore addizionale) non sono mai puri ma contengono degli elementi parassiti, in particolare induttanze proprie e dei collegamenti, capacità verso oggetti circostanti, resistenze serie o di dispersione nei condensatori, ecc. Questi elementi possono rendere il comportamento del trasduttore variabile con la frequenza.

Uno degli elementi parassiti più comuni è rappresentato dalle capacità che il divisore presenta verso gli oggetti circostanti; esse possono risultare particolarmente elevate nel caso dei divisori per alte tensioni che hanno necessariamente dimensioni rilevanti.

Per i divisori capacitivi, le capacità parassite intervengono ad alterare i valori di capacità ai morsetti degli elementi di alta e bassa tensione e influiscono dunque direttamente sul valore del rapporto.

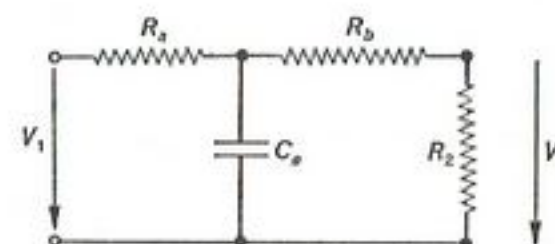



Fig. 5-11

Per rendersi conto dell'effetto di queste capacità su un divisore ohmico, si consideri il circuito di fig. 5-11; in esso si suppone di rappresentare con la capacità concentrata C_e l'effetto delle capacità ripartite. La funzione di trasferimento di questo sistema vale:

$$G(p) = \frac{\bar V_2}{\bar V_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \, \frac{1}{1 + pC_eR_e}$$

dove si è posto:

$$R_1 = R_a + R_b$$

$$R_e = \frac{R_a(R_b + R_2)}{R_a + R_b + R_2};$$

esso risulta perciò equivalente al circuito di fig. 5-12 alimentato dalla tensione:

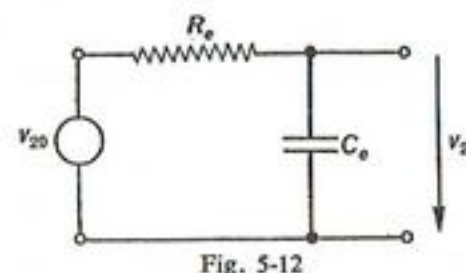



Fig. 5-12

$$\bar{v}_{20} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \bar{v}_1 .$$

La presenza della capacità C_e introduce perciò un ritardo fra la tensione di entrata e quella di uscita; il divisore assume la caratteristica, già nota, di un sistema del primo ordine con la costante di tempo $T = C_e R_e$.

L'effetto di questa capacità parassita può essere ridotto:

a) riducendo il valore della resistenza del divisore, il che però comporta un maggior consumo;

b) riducendo il valore delle correnti capacitive fra il divisore e la terra, mediante opportuni schermi formati da resistori o da condensatori che circondano il divisore (divisori schermati);

c) compensandone l'effetto mediante opportune capacità che forniscano al divisore la stessa corrente che gli viene sottratta dalle capacità parassite (divisori compensati), cioè realizzando uno schema del tipo di fig. 5-13.

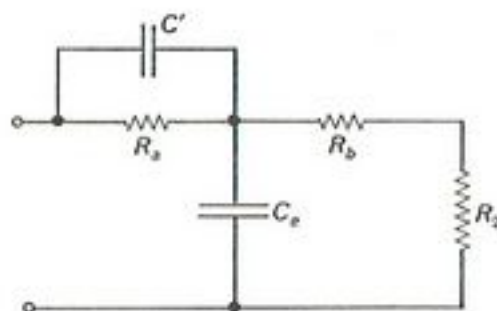



Fig. 5-13

Per un più approfondito esame dell'effetto degli elementi parassiti, sarebbe necessario prendere in considerazione il fatto che essi non si presentano concentrati in un punto, ma sono distribuiti sull'intera lunghezza dell'elemento principale.

Essi possono anche dar luogo, in un circuito equivalente del tipo di fig. 5-9, a sfasamenti fra la corrente J e la tensione V_1 che possono, per un certo campo di frequenza, superare i 90°, rendendo impossibile l'ottenere un fattore di conversione reale per mezzo di una semplice impedenza Z_b.

5-2,4. *Divisori di tensione a decadi.*

Un particolare tipo di divisore è quello detto di Kelvin Varley (fig. 5-14); esso è formato da 11 elementi di uguale resistenza R, fra loro in serie; su una coppia di resistenze adiacenti è connessa in parallelo, mediante un commutatore a due vie, una resistenza di valore $2R$.

L'insieme risulta quindi di resistenza totale $10R$, per qualsiasi posizione del commutatore; lo spostamento del commutatore comporta una variazione sulla tensione V_2 pari a 1/10 della tensione esistente fra 1,1'; il

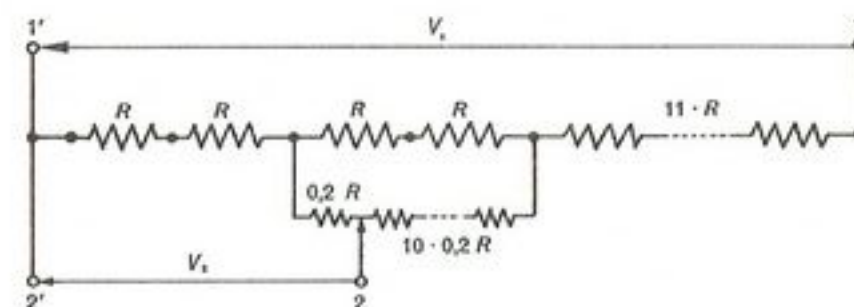



Fig. 5-14

resistore di valore $2R$ può a sua volta essere formato nello stesso modo e consentire variazioni dieci volte minori.

Si realizzano così divisori di tensione che consentono variazioni molto piccole della tensione di uscita (fino a 10^{-7}) con resistenza d'ingresso costante.

Costruttivamente, le decadi possono essere formate da elementi tutti uguali; ognuna viene poi portata al valore voluto di resistenza collegando in parallelo un resistore di valore $2{,}5R$.

La taratura di simili dispositivi può essere eseguita con molta precisione, trattandosi di un confronto di rapporti e non di valori assoluti. Si possono raggiungere così precisioni dell'ordine di 10^{-7}.

Il divisore resistivo deve naturalmente funzionare senza assorbimento di corrente ai morsetti d'uscita.

Combinando opportunamente uno o più derivatori con un divisore si ottengono doppi bipoli che hanno per ingresso una corrente e per uscita una tensione ad essa proporzionale e variabile su un grande campo di valori, per gradini molto piccoli (per es. da 10^4 a 10^{-4} con gradini di 10^{-4}); essi costituiscono dunque dei resistori campioni variabili.

5-2,5. *Divisori induttivi.*

Un divisore di tensione induttivo è rappresentato in fig. 5-15; ogni decade è costituita da un nucleo toroidale ad alta permeabilità con avvol-

gimento formato da dieci sezioni identiche, fra loro in serie, in modo che su ognuna di esse si abbia un decimo della totale tensione applicata. Da due prese consecutive è derivabile un'analoga decade, che consente di disporre di dieci prese con tensioni pari a un centesimo della tensione applicata.

Fig. 5-15

Disponendo più decadi si sono realizzati divisori con rapporti variabili da 1 a 10^{-7} con gradini di 10^{-7} e precisione dello stesso ordine di grandezza.

Il divisore sarebbe perfetto se l'impedenza a vuoto di ogni decade fosse infinita e fosse nulla la reattanza di dispersione fra le sezioni di uno stesso gruppo. Si dimostra però che, in uno schema del tipo di fig. 5-16, in cui si trascurano gli elementi resistivi, se il nucleo è omogeneo e le spire uniformemente distribuite, in modo da avere ognuna lo stesso coefficiente di accoppiamento rispetto alle altre, il rapporto delle tensioni dipende solo dal rapporto spire, indipendentemente dal valore del coefficiente di accoppiamento fra i vari circuiti. Ciò è vero, anche tenendo conto delle cause di perdita, se anche queste sono uniformemente distribuite. A loro volta, una disuniforme distribuzione degli elementi resistivi produce errori tanto minori quanto maggiore è l'impedenza di magnetizzazione.

Una disuniformità delle induttanze di dispersione dà luogo ad un errore, che può essere contenuto in qualche parte su 10^8, mediante un'accurata costruzione; il controllo dell'uniformità può essere eseguito mediante successivi confronti.

Fig. 5-16

L'uso del divisore induttivo è limitato alle basse frequenze dalle disuniformità esistenti fra le resistenze delle varie sezioni e da eventuali saturazioni; alle frequenze più alte (dell'ordine delle decine di kHz) dagli effetti delle ammettenze capacitive fra le varie sezioni.

Le precedenti considerazioni sono tuttavia valide solo per una decade non caricata; in uno schema a più decadi, come quello di fig. 5-17 si ha un errore di carico, dipendente dal rapporto tra l'impedenza di uscita

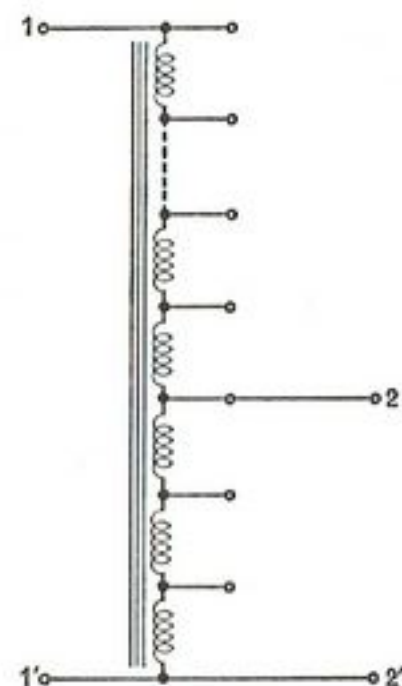
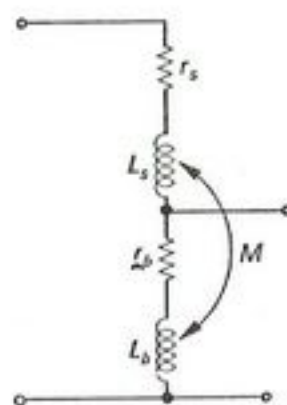
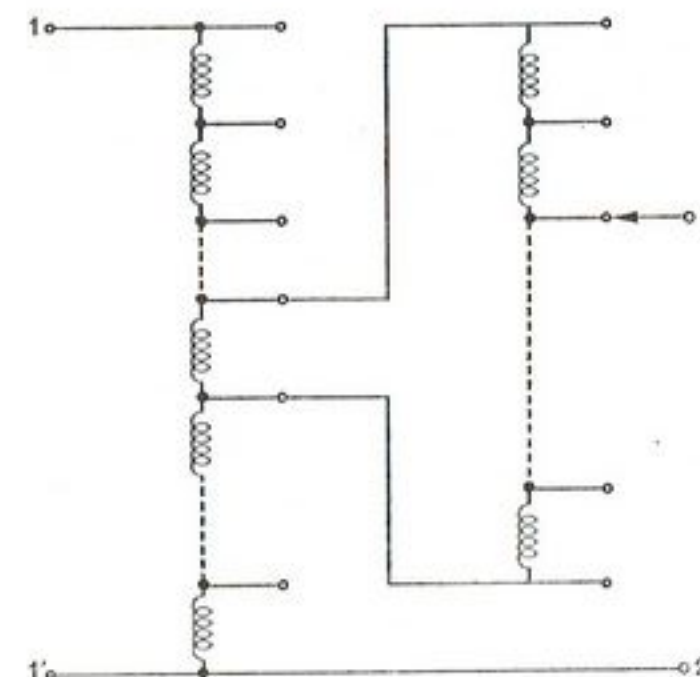



Fig. 5-17

della sezione caricata e l'impedenza di ingresso della decade successiva.

Spesso il divisore induttivo è dotato di un avvolgimento ausiliario di eccitazione, che lo separa dalla sorgente di alimentazione, senza modificarne le caratteristiche essenziali.

5-2,6. *Derivatori per c.c.*

Come già si è visto in 3-4,2, la misura delle correnti continue di intensità superiore ai decimi di ampere si esegue mediante derivatori (o shunt); essi sono sostanzialmente dei resistori di basso valore (dai milliohm ai microohm) realizzati in manganina e provvisti di una disposizione a quattro morsetti (fig. 5-18).

Le dimensioni del derivatore dipendono sostanzialmente dalle condizioni di smaltimento del calore da esso prodotto; nei derivatori per elevate intensità di corrente (da alcune centinaia alle decine di migliaia di ampere) il resistore è formato da più elementi a forma cilindrica o parallelepipeda, fra loro in parallelo, con possibilità di circolazione d'aria; in qualche caso particolare si hanno shunt con raffreddamento in olio o con scambiatori di calore ad acqua.

Il resistore termina in due blocchi massicci di rame, che hanno il compito di ripartire la corrente fra i vari elementi e di provvedere al collegamento con il circuito amperometrico; nei derivatori per correnti elevate,

questo collegamento è eseguito con più piastre e diversi bulloni di fissaggio, per ridurre il riscaldamento dei terminali stessi.

I morsetti voltmetrici sono generalmente sistemati sui blocchi terminali;

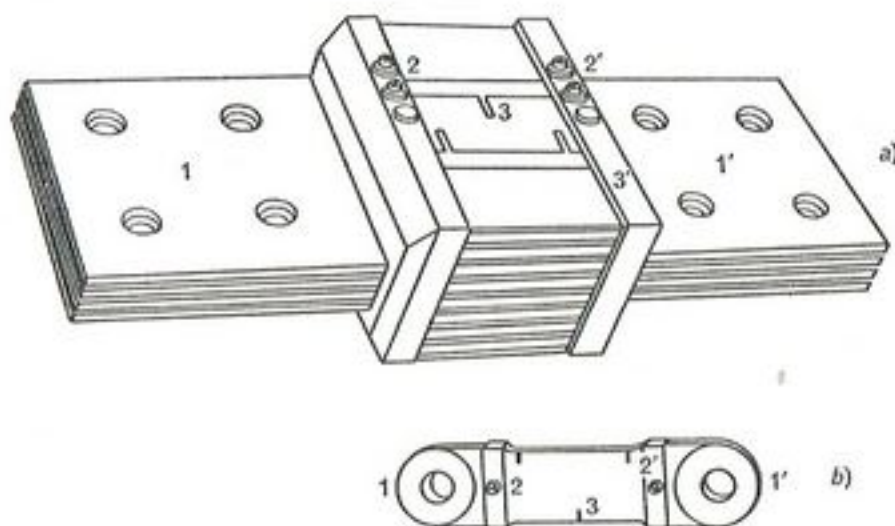



Fig. 5-18
Derivatori per c.c.: *a*) per forte intensità di corrente; *b*) per intensità di corrente inferiore a 100 A: 1, 1' = morsetti amperometrici; 2, 2' = morsetti voltmetrici; 3 = intagli per aggiustaggio.

il rapporto nominale del derivatore viene regolato al valore voluto, in relazione ad una determinata posizione dei morsetti voltmetrici, praticando dei piccoli intagli sugli elementi del resistore o allargando le zone di saldatura che li connettono ai terminali.

Perché il valore di tale rapporto si mantenga costante nelle diverse condizioni d'impiego, è necessario non solo che il resistore non vari con la temperatura, ma anche che non si modifichi, rispetto alle condizioni di taratura, la distribuzione delle correnti fra le varie lamine (p. es. per differenze di temperatura fra esse o per disuniformità dovute alle connessioni amperometriche). Ogni variazione nella distribuzione delle correnti deforma le superfici equipotenziali nei blocchi terminali e, quindi, altera la d.d.p. fra i morsetti voltmetrici, a parità di corrente d'ingresso.

Per controllare il comportamento di un derivatore di precisione, per correnti di elevata intensità, si possono disporre più morsetti voltmetrici su uno stesso terminale; è facile rendersi conto che la media dei potenziali assunti da tali morsetti è meno influenzata dalla distribuzione delle correnti di quanto non sia il potenziale di un singolo morsetto. Gli scarti che si verificano nel potenziale del morsetto destinato alla misura, in funzione della temperatura e con varie disposizioni dei morsetti amperometrici, rispetto al valore medio suddetto, sono un indice dell'errore che il derivatore può presentare in funzionamento.

È in ogni caso buona norma che la taratura e la utilizzazione dello shunt siano eseguite, per quanto è possibile, nelle stesse condizioni di collegamento e di smaltimento del calore.

5-2,7. *Derivatori per c.a.*

In un derivatore per c.a. è necessario ottenere, oltre alle caratteristiche richieste per le misure in c.c., la costanza del rapporto al variare della frequenza.

Se si prende in considerazione il circuito di fig. 5-19, percorso da una corrente sinusoidale di pulsazione ω, ci si può rendere conto che la tensione segnata dal voltmetro V (che si ammette a consumo nullo) comprende, oltre alla caduta ohmica nel conduttore, una f.e.m. dovuta al flusso variabile che si concatena con il circuito del voltmetro stesso. Scelta nell'interno del conduttore, di resistività ϱ, una qualsiasi linea l di integrazione che faccia capo ai terminali voltmetrici AB, è sempre:

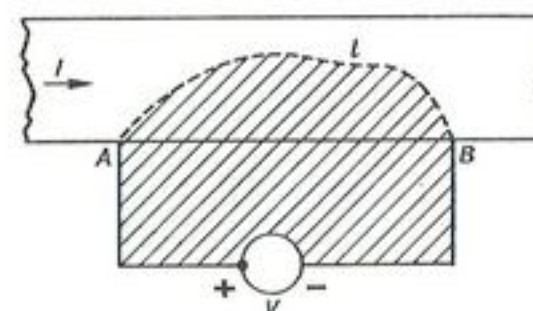



Fig. 5-19

$$\dot{V} = \varrho \int_l \dot{\overline{G}} \times \overline{\mathrm{d}l} + j\omega\dot{\Phi}\,, \tag{5-5}$$

qualunque sia la linea di integrazione, quando Φ è il flusso concatenato con la spira chiusa $AlBV$ formata dai collegamenti voltmetrici e dalla linea l. La densità di corrente $\dot{G}$ è in generale variabile, in ampiezza e fase, da punto a punto del conduttore, per effetto del flusso variabile che interessa il conduttore (effetto pelle).

Gli errori di rapporto e di fase di uno shunt, alle varie frequenze, si possono calcolare partendo dalla [5-5]; fino a che gli errori sono piccoli, conviene considerare il solo errore di fase dovuto al flusso prodotto dal circuito amperometrico, supponendo la corrente uniformemente distribuita.

Considerando una corrente I uniformemente distribuita, è possibile infatti definire e calcolare un coefficiente di mutua induzione M fra il circuito amperometrico e quello voltmetrico, in modo da poter scrivere:

$$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R + j\omega M \,. \qquad [5\text{-}6]$$

Il termine immaginario della [5-6] può essere positivo o negativo; in particolare per un derivatore formato da una piattina ripiegata (fig. 5-20), con i collegamenti voltmetrici perfettamente aderenti alla superficie esterna del derivatore, risulta:

$$M = -\mu_0 \frac{lt}{3b} \,. \qquad [5\text{-}7]$$

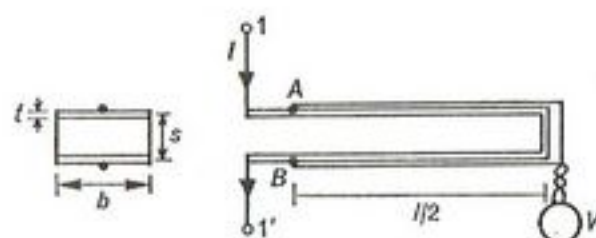



Fig. 5-20

L'errore di fase risulta:

$$\varepsilon = \frac{\omega M}{R} = -\frac{\omega\mu_0 tl}{3b}\,\frac{tb}{\varrho l} = -\frac{2}{3}\left(\frac{t}{\delta}\right)^2$$

essendo:

$$\delta = \sqrt{\frac{\varrho}{\pi\mu f}} \qquad [5\text{-}8]$$

lo spessore di penetrazione del materiale costituente il resistore.

Il flusso di mutua induzione può essere compensato da un flusso di segno opposto, quale è quello che si ottiene allontanando le connessioni voltmetriche dalla superficie del resistore principale o con una disposizione del tipo di fig. 5-21 che dà una compensazione completa ove sia:

$$\frac{l'}{l} = \frac{t}{3s} \,.$$

L'errore di rapporto e di fase dovuto alle correnti parassite può essere ricavato per via analitica nel caso di un derivatore tubolare (fig. 5-22); internamente ad esso non esiste campo magnetico, a prescindere da eventuali effetti di estremità, e risulta perciò particolarmente semplice la dispo-

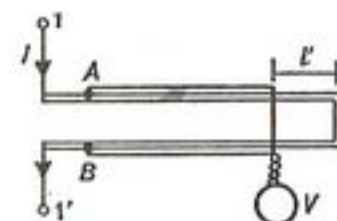
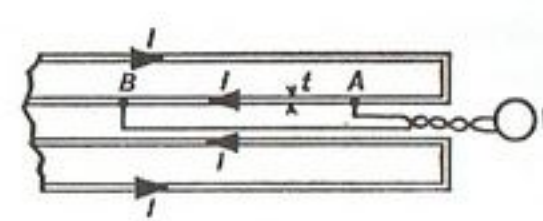



Fig. 5-21 Fig. 5-22

sizione delle connessioni voltmetriche. Conviene perciò applicare la [5-7] scegliendo come linea di integrazione il bordo interno del derivatore, in modo che sia $\Phi = 0$; calcolando, mediante le equazioni di Maxwell, la distribuzione delle correnti in un sistema di cilindri coassiali di spessore t, la funzione di trasferimento risulta:

$$\dot{G}(j\omega) = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R\left[1 - \frac{7}{90}\left(\frac{t}{\delta}\right)^4 - j\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\delta}\right)^2\right]$$

dove R è la resistenza misurabile in corrente continua fra i morsetti voltmetrici e δ lo spessore di penetrazione, dato dalla [5-8]; tale formula è valida per $t < \delta$, e corrisponde ad una costante di tempo:

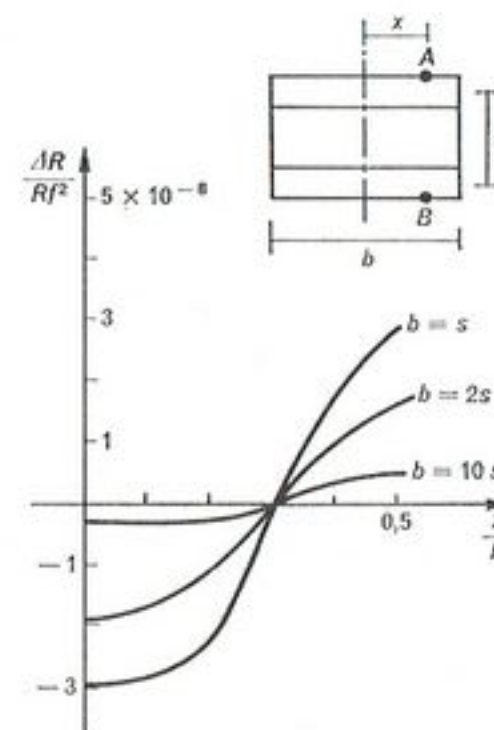
$$T = \mu t^2/6\varrho \,.$$

La densità di corrente varia lungo lo spessore t del cilindro interno; disponendo il conduttore voltmetrico con un opportuno percorso nell'interno di tale spessore (percorso che si dimostra essere un arco di parabola) è possibile ridurre notevolmente (in teoria addirittura annullare) la costante di tempo dovuta all'effetto pelle.

Fig. 5-23

Per un derivatore a piattina, si può dimostrare che la funzione di trasferimento varia con la posizione dei morsetti voltmetrici rispetto all'asse della piattina; come mostra la fig. 5-23, se i punti A e B sono situati a circa $0{,}3b$ dal centro, la funzione di trasferimento risulta praticamente indipendente dalla frequenza, entro ampi limiti.

5-2,8. *Determinazione sperimentale delle costanti di tempo.*

La determinazione della costante di tempo (generalizzata) di un trasduttore è una misura assai delicata e complessa, specie quando si tratti di valori molto piccoli, da 10^{-6} a 10^{-9} secondi.

Per alcuni tipi di trasduttore (p. es. per il derivatore tubolare) essa è calcolabile, sotto ipotesi abbastanza facilmente realizzabili nella pratica; quando tuttavia si voglia procedere ad una misura diretta, occorre poter disporre di elementi che abbiano una costante di tempo nota, o almeno in rapporto fisso con quella dell'apparecchio di misura. Ciò si ottiene, p. es., costruendo due resistori di uguali caratteristiche geometriche, ma con materiali di resistività molto diversa, o due elementi della stessa forma ma di dimensioni ridotte (o ampliate) in una scala prefissata.

Il confronto può anche essere fatto — se il trasduttore è lineare o può essere supposto tale — sollecitandolo con tensioni o correnti assai diverse rispetto a quelle nominali, tali da consentire la misura diretta, sia della grandezza primaria che di quella secondaria e quindi del loro sfasamento. Un sistema assai pratico discende dalla definizione stessa di costante di tempo generalizzata, dato in 1-5,3; applicando ai morsetti d'ingresso un segnale a forma di gradino, si registra all'uscita la grandezza secondaria e si misura l'area compresa fra essa e il suo valore finale (fig. 5-24). La misura è semplificata dall'applicazione della proprietà additiva della costante di tempo, per cui non è necessario che il segnale applicato abbia rigorosamente la forma a gradino, purché si tenga conto dell'area da esso introdotta. Anche la costante di tempo degli eventuali sistemi di misura adottati può essere eliminata dai risultati.

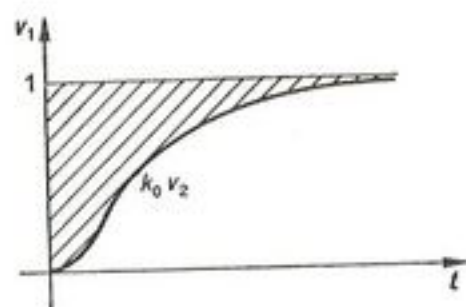



Fig. 5-24

5-3. **Trasformatori di misura.**

5-3,1. *Scopo e funzioni dei trasformatori di misura.*

Quando, in un circuito in c.a., siano presenti correnti di valore superiore alla decina di ampere, raramente si ricorre ad una misura diretta; questa può infatti presentare diversi inconvenienti (quali l'elevato consumo, il forte carico termico di vari elementi, ecc.) dovuti spesso, più che allo strumento vero e proprio, alle sue connessioni, che producono anche campi magnetici parassiti. Quando poi il circuito presenti tensioni superiori a qualche centinaio di volt, intervengono anche ragioni di sicurezza a consigliare l'uso di apparecchi che isolino dal circuito di misura i diversi strumenti, per garantire l'incolumità di chi ne venga a contatto.

Possono servire a questo scopo dei trasformatori che, modificando i valori delle tensioni o delle correnti applicate agli strumenti, consentono anche di ottenere per essi delle portate normalizzate (p. es. 1 o 5 A per i circuiti amperometrici, 100 o 200 V per i circuiti voltmetrici) e di utilizzare così strumenti di serie, intercambiabili e più economici degli strumenti costruiti per portate speciali.

La possibilità di impiegare a tale scopo dei trasformatori discende dal principio che, fra le grandezze primarie e secondarie di un trasformatore ideale, con rapporto spire $a = N_1/N_2$, intercorrono le relazioni:

$$\dot{I}_2 = -a\dot{I}_1 \qquad [5\text{-}9]$$

$$\dot{V}_2 = \frac{\dot{V}_1}{a}. \qquad [5\text{-}10]$$

Un trasformatore di corrente (o amperometrico o TA) avrà perciò in generale un rapporto spire $|a| < 1$; i due avvolgimenti dovranno esser presi con versi opposti, per avere $\dot{I}_2$ in fase con $\dot{I}_1$; esso viene collegato con il primario in serie al circuito su cui si esegue la misura (fig. 5-25 *a*). Un trasformatore di tensione (o voltmetrico, o TV) avrà invece, in generale, $a > 1$; esso sarà collegato in derivazione fra i morsetti di cui si vuol misurare la d.d.p. (fig. 5-25 *b*).

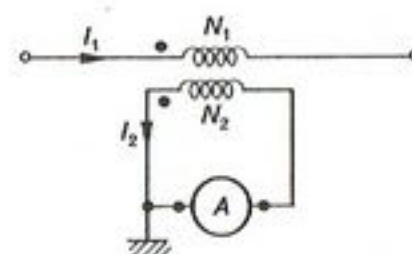



Fig. 5-25 *a*

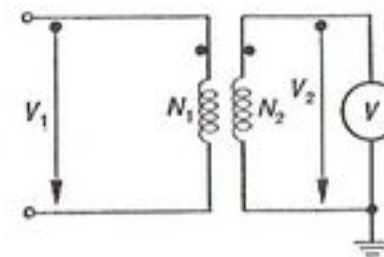



Fig. 5-25 *b*

I trasformatori di misura, avendo avvolgimenti fra loro isolati, permettono di connettere variamente fra loro gli strumenti collegati ai rispettivi secondari; in particolare, è possibile vincolare il loro potenziale, con un collegamento a terra, evitando che essi assumano, per induzione elettrostatica, il potenziale che loro competerebbe da una semplice ripartizione del potenziale della linea, sulle capacità esistenti fra avvolgimenti e verso terra.

5-3,2. *Richiami della teoria dei trasformatori.*

Ricordiamo che un trasformatore ideale è un doppio bipolo per il quale le tensioni e le correnti alle due coppie di morsetti sono legate delle relazioni [5-9] e [5-10]; esso è perfettamente trasparente sia per le potenze attive che per quelle reattive.

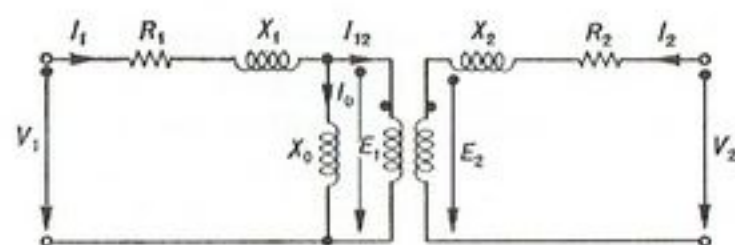



Fig. 5-26

Un doppio bipolo che contenga due circuiti mutuamente accoppiati si può ricondurre ad un insieme di elementi resistivi e reattivi, più un trasformatore ideale; questa scomposizione si può fare in molteplici modi ma, se si vuol conservare al rapporto del trasformatore il valore del rapporto spire, ci si riconduce allo schema di fig. 5-26, dove è:

$$X_1 = \omega\sigma_1 L_1$$

$$X_2 = \omega\sigma_2 L_2$$

$$X_0 = \omega(1-\sigma_1)L_1$$

dove L_1 e L_2 sono i coefficienti di autoinduzione globali dei due circuiti e σ_1 e σ_2 i rispettivi coefficienti di dispersione.

Fra le proprietà del trasformatore ideale vi è quella di poter essere spostato lungo un circuito purché per tutti gli elementi di circuito che vengono trasferiti dal secondario al primario sia operato il riporto delle tensioni nel rapporto a, delle correnti nel rapporto $-1/a$, e delle impedenze nel rapporto a^2.

Si perviene perciò al circuito equivalente di fig. 5-27, in cui è:

$$V_{12} = aV_2\,; \quad X_{12} = a^2 X_2\,; \quad R_{12} = a^2 R_2\,; \quad \dot{E} = \upsilon_1 = \upsilon_{12} = a\dot{E}_2\,; \quad \dot{I}_{12} = -\dot{I}_2/a\,.$$

In questi circuiti l'impedenza $\dot{Z}_0$ può comprendere anche, senza troppo allontanarsi dalle ipotesi precedenti, una parte attiva che rappresenta le perdite nel circuito magnetico comune.

Questo schema è particolarmente utile per i trasformatori che abbiano un nucleo ferromagnetico poiché l'impedenza Z_0 corrisponde allora in pratica a quella del nucleo stesso. Ammettendo che questo abbia sezione uniforme S e lunghezza l sarà, per la f.e.m. E:

$$E = 4{,}44 f B_m S N \qquad [5\text{-}11]$$

e per la parte immaginaria della corrente I_0:

$$I_\mu = \frac{H_m l}{\sqrt{2}N} \qquad [5\text{-}12]$$

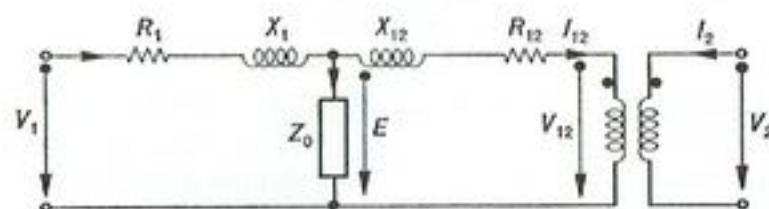



Fig. 5-27

essendo: H_m il campo corrispondente all'induzione B_m di lavoro, sulla curva caratteristica del materiale impiegato; N il numero di spire dell'avvolgimento a cui sono riferiti E e I_μ. Per la nonlinearità di questa caratteristica, l'impedenza Z_0 è variabile in funzione di E; essa contiene inoltre una parte reale, corrispondente alle perdite, per isteresi e correnti parassite, che si verificano nel nucleo.

Le impedenze $\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1$ e $\dot{Z}_{12} = R_{12} + jX_{12}$ sono invece formate da reattanze in aria e dalle resistenze degli avvolgimenti; esse sono, nella maggior parte dei casi, molto minori della Z_0.

Si vede facilmente che un trasformatore reale si avvicina tanto più a un trasformatore ideale, per quanto riguarda il rapporto fra le tensioni, quanto più V_1 e V_{12} sono prossimi a E, cioè quanto Z_1 e Z_{12} non sono percorsi da corrente (trasformatore a vuoto).

Dualmente, un trasformatore reale si avvicina tanto più ad un trasformatore ideale, per quanto riguarda il rapporto delle correnti, quanto più grandi sono I_1 e I_{12} rispetto alla I_0, cioè quanto più il trasformatore si trova prossimo alle condizioni di cortocircuito.

5-3,3. *Convenzioni per i TA e i TV.*

Per ogni trasformatore di corrente (o di tensione) viene indicato il valore di corrente (o tensione) nominale primaria e il corrispondente valore della grandezza secondaria (per es. 200/5 A; 10.000/100 V); il loro rapporto è il rapporto nominale del trasformatore. Viene inoltre definita una prestazione, cioè il valore limite del carico secondario per cui valgono le garanzie corrispondenti ad una determinata classe di precisione; più valori di prestazione possono essere dati per classi diverse. La prestazione si esprime in VA di potenza apparente, resa al secondario, alla corrente (o tensione) nominale; talvolta il carico può essere espresso in ohm, ma l'indicazione in VA appare preferibile perché consente di individuare molto rapidamente quanti strumenti possono essere connessi al secondario del trasformatore.

Dal punto di vista della precisione, i trasformatori di misura impiegati negli impianti elettrici a frequenza industriale sono divisi in classi, cui corrispondono determinati limiti massimi per gli errori di rapporto e d'angolo; le principali sono le seguenti:

Classe	η%	ε ctr		impieghi
		TV	TA	
0,1	±0,1	±0,15	±0,15	campioni da laboratorio
0,2	±0,2	±0,3	±0,3	misure industriali di precisione, tariffazione d'energia
0,5	±0,5	±0,6	±0,9	
1,0	±1,0	±1,2	±1,8	misure industriali
3,0	±3,0	—	—	
5,0	±5,0	—	—	(solo TA).

Le condizioni in cui valgono i limiti sopra riportati, sono in generale:

a) per i TA: corrente primaria fra il 50 e il 120% della nominale; dal 20% al 5% sono ammessi errori superiori ai limiti sopra riportati; in alcuni casi (classi 0,2 S e 0,5 S) si prescrivono anche i limiti di errore all'1% della corrente nominale. Per i TV: tensione primaria fra l'80 e il 120% della nominale.

b) Carico, a $\cos\varphi = 0{,}8$ induttivo, compreso fra il 100% e il 25% della prestazione.

Esistono poi trasformatori per protezioni, in cui si tollerano errori maggiori, per più ampi campi di funzionamento.

Molte delle caratteristiche sopra riportate sono inadatte all'uso di moderna strumentazione elettronica, caratterizzata da consumi estremamente piccoli. Inoltre, poiché l'impiego di trasformatori di misura è principalmente rivolto agli impieghi su rete, si deve porre molta attenzione, nelle misure eseguite in laboratorio, a non uscire dal campo dove è garantita la loro precisione. Tipico esempio è l'uso di TA a valori di corrente molto inferiori al valore nominale, con strumenti di corrispondente portata, il cui consumo, riportato alla corrente nominale, può risultare eccessivo.

5-3,4. *Calcolo degli errori nei TA.*

Si consideri un trasformatore di corrente, chiuso su un carico esterno (fig. 5-25*a*); riportando tutte le grandezze allo avvolgimento primario, si ottiene facilmente il circuito di fig. 5-28 ed il relativo diagramma di fig. 5-29;

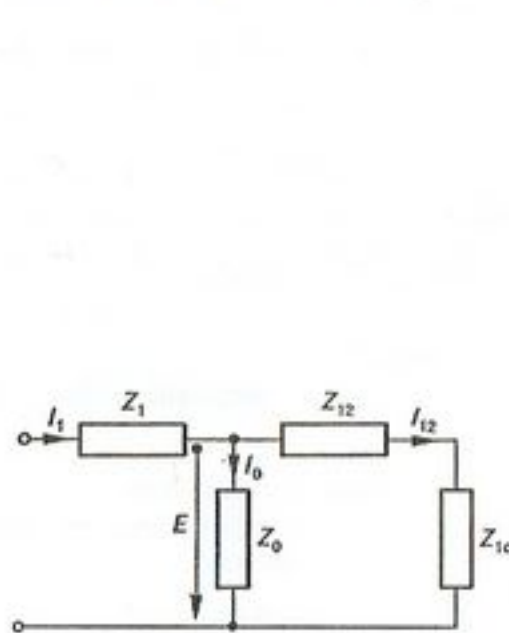



Fig. 5-28

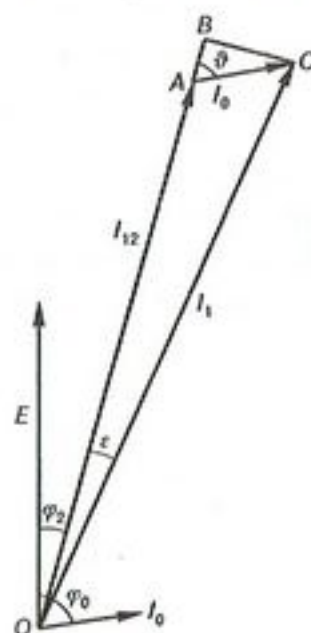



Fig. 5-29

le correnti $\dot I_0$ e $\dot I_{12}$ sono legate dalla relazione:

$$\dot Z_0 \dot I_0 = \dot E = (\dot Z_{12} + \dot Z_{1c}) \dot I_{12} = \dot Z_{1t} \dot I_{12} \qquad [5\text{-}13]$$

e sono quindi sfasate, rispetto alla $\dot E$, rispettivamente degli angoli φ_0, argomento della Z_0, e φ_2, argomento dell'impedenza totale Z_{1t} del circuito secondario (somma della impedenza di carico e di quella interna del secondario, riportate al primario).

Nell'ipotesi che l'angolo ε sia sufficientemente piccolo, così da poter confondere il tratto BC con un arco di cerchio, si ricava dalla fig. 5-29:

$$\frac{I_{12}-I_1}{I_1} = \frac{\overline{OA}-\overline{OB}}{\overline{OC}} = -\frac{I_0}{I_1}\cos(\varphi_0-\varphi_2) = -\varrho\cos\vartheta \qquad [5\text{-}14]$$

$$\varepsilon = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{I_0}{I_1}\,\mathrm{sen}(\varphi_0-\varphi_2) = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta . \qquad [5\text{-}15]$$

Sia l'errore di rapporto che quello d'angolo sono perciò funzioni del rapporto:

$$\varrho = \frac{I_0}{I_1} \qquad [5\text{-}16]$$

fra la corrente magnetizzante e quella primaria, e dell'angolo ϑ fra la $\dot I_0$ e la $\dot I_{12}$.

Se gli errori sono piccoli ($I_{12} \simeq I_1$) il rapporto ϱ coincide, per la [5-13] con il rapporto fra l'impedenza totale secondaria e l'impedenza di magnetizzazione Z_0. Per avere errori piccoli, è perciò necessario che questa assorba una potenza apparente molto minore di quella richiesta come prestazione; ciò si può sempre ottenere dimensionando opportunamente il circuito magnetico, in modo da avere una bassa riluttanza (sezione elevata, materiali di elevata permeabilità, piccola lunghezza). A parità di circuito magnetico, la [5-12] mostra inoltre che la corrente magnetizzante è inversamente proporzionale al numero di spire; si può perciò ridurre il rapporto ϱ aumentando il numero di spire (ovviamente, sia del primario che del secondario). Un trasformatore di corrente può perciò essere caratterizzato dal valore delle sue amperspire alla corrente nominale; questo passa da 200÷300 As per trasformatori di bassa precisione a 1500÷2000 per trasformatori di migliore classe e prestazione. Si riconosce quindi che la possibilità di avere TA di precisione è condizionata soprattutto da fattori economici (peso e qualità dei materiali impiegati).

L'angolo ϑ influisce in modo opposto sull'errore di fase e su quello di rapporto; poiché l'angolo φ_0 è prossimo a 90° (solo in alcuni materiali speciali ad alta permeabilità si arriva ad angoli di 50-60°), l'errore d'angolo risulta maggiore, quando il carico totale secondario è ohmico ($\varphi_2 = 0$);

cresce invece l'errore di rapporto, quando il carico è prevalentemente induttivo. In generale si preferisce rendere ϑ prossimo a zero, per ridurre l'errore d'angolo; con ciò si ha un più elevato errore di rapporto, che può però essere compensato costruendo il trasformatore con un rapporto spire ($N_1/N_2 = a$) maggiore del valore corrispondente ai dati nominali; l'errore di rapporto η è infatti per la [5-2]:

$$\eta = \frac{k_n I_2 - I_1}{I_1} = \frac{\left(k_n - \frac{1}{a}\right) I_2}{I_1} + \frac{I_{12} - I_1}{I_1} = \frac{k_n - \frac{1}{a}}{k_n} - \varrho \cos\vartheta\,.$$

La correzione del numero delle spire è facile nel caso di trasformatori con molte amperspire (p. es. in un TA con 1000 As, nel secondario da 5 A, ogni spira rappresenta lo 0,5%); è più difficile quando le amperspire sono poche, nel qual caso si deve ricorrere a concatenamenti parziali per alcune spire.

5-3,5. *Caratteristiche di errore.*

Per il calcolo della caratteristica di errore di un TA al variare delle condizioni di funzionamento, è opportuno risalire al valore della f.e.m. interna:

$$\dot{E} = (\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{1c})\dot{I}_{12} = \dot{Z}_{1t}\dot{I}_{12};$$

essendo infatti:

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_0} = \frac{\dot{Z}_{1t}}{\dot{Z}_0}\dot{I}_{12} = (\dot{I}_1 - \dot{I}_{12})$$

si può calcolare l'errore complesso proprio del trasformatore:

$$\dot{e} = \eta + j\varepsilon$$

che risulta:

$$\dot{e} = -\frac{\dot{I}_0}{\dot{I}_1} = -\frac{\dot{Z}_{1t}}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_{1t}}. \qquad [5\text{-}17]$$

La [5-17] configura una trasformazione conforme fra il luogo dei vertici del vettore $\dot{Z}_{1t}$ (o meglio $\dot{Z}_{1t}/\dot{Z}_0$) e del vettore $\dot{e}$; nel campo dei piccoli errori, basandosi su alcune semplificazioni, si può operare una sovrapposizione dei due piani complessi, l'uno graduato in base alla parte reale e a quella immaginaria dell'impedenza $\dot{Z}_{1t}$, l'altro in base alla parte reale (errore di rapporto) e quella immaginaria (errore d'angolo) di $\dot{e}$ (fig. 5-30); questi piani risultano inclinati fra loro di $180 - \varphi_0$. Ciò equivale a rappresentare, opportunamente orientato ed ingrandito, il triangolo ABC di fig. 5-29.

Ogni coppia di valori di R_{1t} e X_{1t} individua un punto C le cui coordinate, nel piano η, ε, forniscono gli errori dati dalle [5-14] e [5-15].

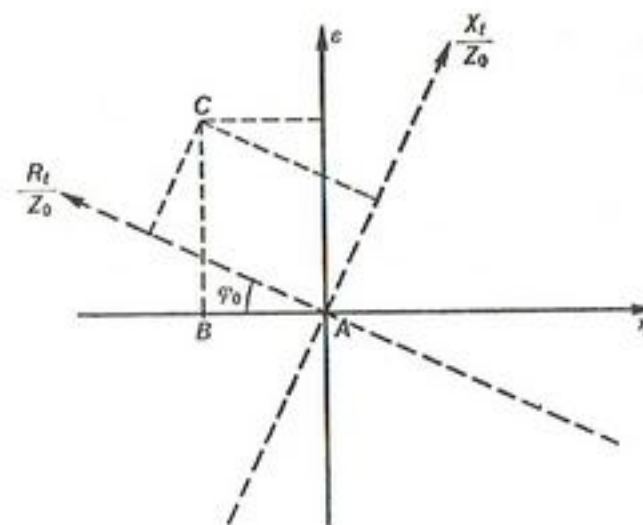



Fig. 5-30

Il luogo dei punti a φ_2 costante è rappresentato da una retta passante per A; quello dei punti a Z_{1t} costante, da una circonferenza con centro in A (origine degli assi R, X).

Una correzione di spire sposta il punto A lungo l'asse della η; se si considera come variabile solo l'impedenza Z_{1c} del carico, l'origine degli assi R e X risulta convenientemente spostata.

Questo tipo di diagramma (detto anche di Möllinger) risulta comodo per prevedere il comportamento di un trasformatore dato, in un ampio campo di condizioni di funzionamento; esso può anche essere ricavato sperimentalmente attraverso misure di errori di rapporto e d'angolo in più condizioni note.

Il diagramma trova i suoi limiti sia nell'imprecisione dei calcoli grafici sia nella nonlinearità del lato Z_0. Infatti, per un dato trasformatore di corrente, chiuso su un carico costante, al variare della corrente primaria, varia corrispondentemente la f.e.m. E e quindi la corrente I_0; poiché la relazione fra E ed I_0 non è lineare, giova considerare il diagramma di fig. 5-31 nel quale, con un cambiamento di scala, si è portata la curva di magnetizzazione del nucleo magnetico, anziché in funzione del suo flusso Φ_M, in funzione di:

$$I_1 \simeq I_{12} \equiv E \equiv \Phi_M\,.$$

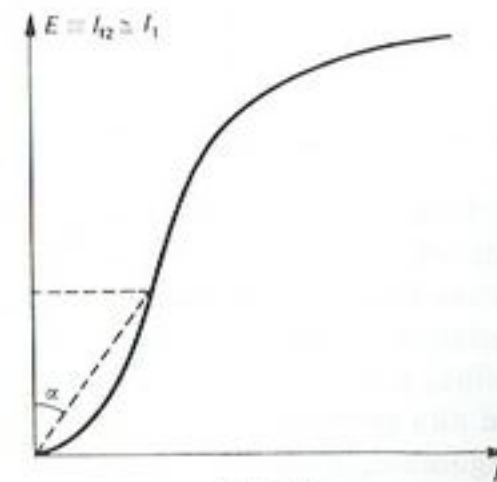



Fig. 5-31

Si riconosce facilmente essere:

$$\varrho = \frac{I_0}{I_1} = \tan g\,\alpha\,.$$

Il valore di α è minimo per la zona centrale, e cresce sia per i bassi che per gli elevati valori di I_1. Ne consegue che un trasformatore di corrente ha una zona di funzionamento optimum e che i suoi errori crescono sia per correnti più elevate che per correnti troppo basse. L'andamento tipico degli errori di un TA è dato in fig. 5-32.

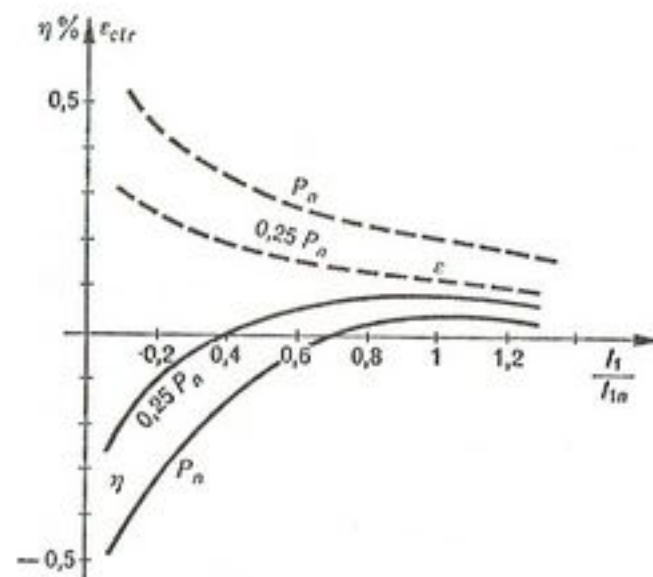



Fig. 5-32

Questi metodi di calcolo forniscono risultati soddisfacenti finché il nucleo è di tipo toroidale, uniformemente avvolto; è solo approssimato negli altri casi, poiché la X_{12} è difficilmente valutabile e varia con le condizioni di saturazione del nucleo.

5-3,6. *Caratteristiche costruttive dei TA.*

La qualità dei trasformatori di corrente è, per le ragioni precedentemente esposte, soprattutto legata alla realizzazione di un circuito magnetico di bassa riluttanza: si hanno perciò costruzioni a nucleo toroidale o rettangolare a giunti intercalati. Per mantenersi nella zona di miglior permeabilità, il nucleo lavora ad induzioni intorno a 0,5÷0,8 T. L'uso di leghe ad alta permeabilità consente inoltre notevoli riduzioni sulle dimensioni di ingombro, a parità di caratteristiche.

Come risulta dalle relazioni precedentemente scritte, la reattanza di

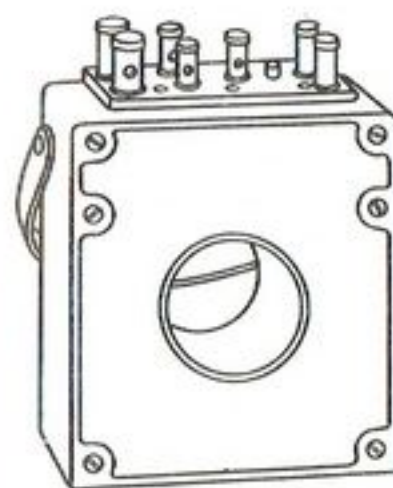



Fig. 5-33

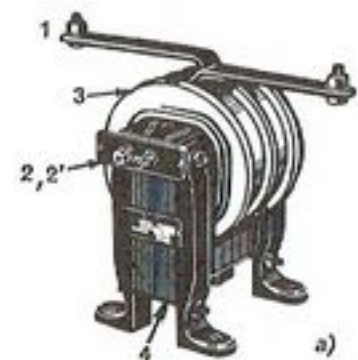
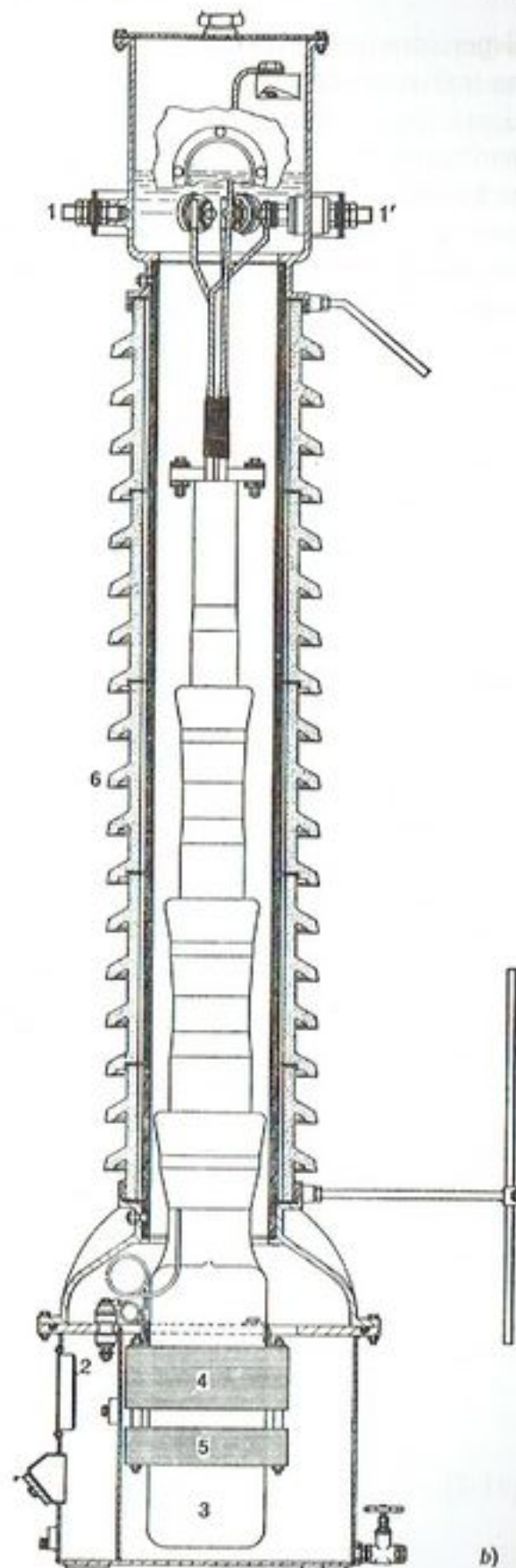



Fig. 5-34
Esempi di trasformatori di corrente: *a)* per bassa tensione; *b)* per alta tensione: 1, 1' = morsetti primari; 2, 2' = morsetti secondari; 3 = avvolgimento primario; 4 = nucleo principale; 5 = nucleo ausiliario (per protezione); 6 = isolamento verso massa.

dispersione primaria non ha nessun effetto sugli errori del trasformatore, ma influenza solamente la caduta di tensione sul primario (cioè il consumo). Si può perciò disporre di ampio spazio per l'isolamento tra gli avvolgimenti, ove ciò sia necessario; si può inoltre modificare, con più prese, il numero delle spire primarie, per avere più rapporti di trasformazione, senza alterare le caratteristiche di precisione; si può infine, se la corrente è sufficientemente elevata, operare un solo passaggio del conduttore primario (TA a sbarra passante) (fig. 5-33). La posizione della sbarra non influisce sul valore del coefficiente di mutua induzione (e perciò sul coefficiente di dispersione secondario) se l'avvolgimento secondario è uniformemente distribuito su un nucleo toroidale; ha una limitata importanza nel caso di nucleo rettangolare con avvolgimento secondario concentrato. In ogni caso, non si possono scambiare le funzioni dei due avvolgimenti.

Il trasformatore, collegato in serie su una linea elettrica, deve essere in grado di sopportare, sia dal punto di vista termico che da quello dinamico, le sovracorrenti che si manifestano sulla linea, in particolare quelle dovute ai cortocircuiti. Deve inoltre essere in grado di sopportare le tensioni, di esercizio e transitorie, che si possono presentare fra il primario, che è a potenziale di linea, e il secondario, che è a terra; alcune forme costruttive sono mostrate in fig. 5-34.

L'uso di materiali ad alta permeabilità ha fatto in gran parte cadere diversi schemi speciali, usati un tempo per compensare l'errore dei TA. Essi si basavano sostanzialmente sull'ipotesi di un errore costante, al variare della corrente I_1; in questo caso, come un'opportuna scelta del rapporto spire può compensare l'errore di rapporto, così l'inserzione di un'opportuna impedenza, in parallelo al primario (o al secondario) può compensare l'errore di fase. Più usati sono invece alcuni sistemi a più nuclei (fig. 5-35), in cui un nucleo ausiliario fornisce a quello principale una corrente I_c, le cui ampiezza e fase, dipendenti dall'impedenza Z_R (in genere non lineare) su cui è chiuso il trasformatore ausiliario, vengono regolate in modo da compensare la corrente magnetizzante del trasformatore principale.

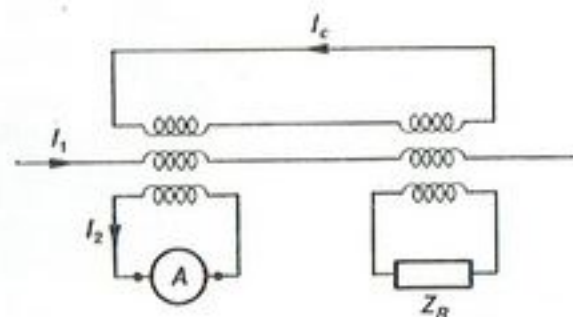



Fig. 5-35

Il trasformatore di corrente può presentare una notevole f.e.m. al secondario, quando questo venga accidentalmente aperto; tutta la corrente primaria diviene infatti magnetizzante e il nucleo raggiunge la saturazione; deve perciò essere posta la massima cura a non interrompere il circuito secondario, durante il funzionamento (p. es. per l'inserzione di strumenti); si usano protezioni voltmetriche o dispositivi per il cortocircuito.

Al crescere della frequenza di esercizio, un TA ha errori propri sempre più piccoli, perché si riduce l'induzione e quindi la f.m.m. necessaria per ottenere una data tensione secondaria. A frequenze elevate (dell'ordine dei kHz) il nucleo può convenientemente essere costituito da materiali sinterizzati a basse perdite o addirittura da materiali non magnetici. Possono presentarsi però delle nuove cause di errore, per la presenza di capacità fra spire e fra avvolgimenti.

5-3,7. *Calcolo degli errori nei TV.*

Il calcolo degli errori di un trasformatore di tensione può essere eseguito con criterio analogo a quello illustrato per i TA; poiché però i TV funzionano, di regola, a tensione pressoché costante, si può per essi considerare costante l'impedenza magnetizzante, riconducendo il trasformatore al sistema lineare di fig. 5-36.

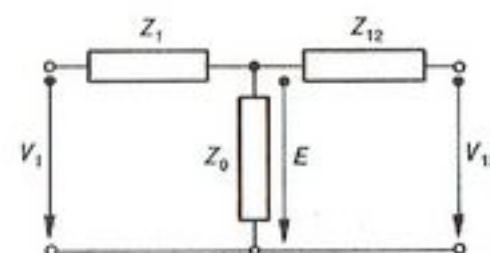



Fig. 5-36

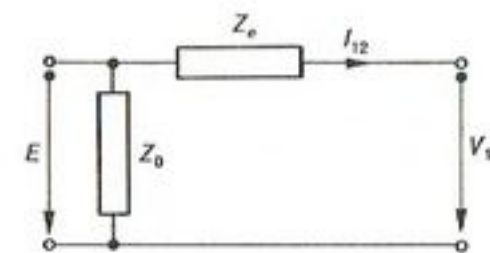



Fig. 5-37

Inoltre, poiché è sempre $Z_1 \ll Z_0$, le cadute di tensione da vuoto a carico si possono calcolare dal circuito semplificato di fig. 5-37, come dovute all'impedenza serie:

$$\dot{Z}_e = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_{12},$$

di argomento φ_e, percorsa dalla corrente $\dot{I}_{12}$, di argomento φ_{12}: risulta (fig. 5-38):

$$\left.\begin{aligned} \eta_c &\simeq -\frac{Z_e I_{12}}{V_1}\cos(\varphi_{12}-\varphi_e) = -\varrho_c \cos\vartheta_c \\ \varepsilon_c &\simeq \frac{Z_e I_{12}}{V_1}\operatorname{sen}(\varphi_{12}-\varphi_e) = \varrho_c \operatorname{sen}\vartheta_c . \end{aligned}\right\} \qquad [5\text{-}18]$$

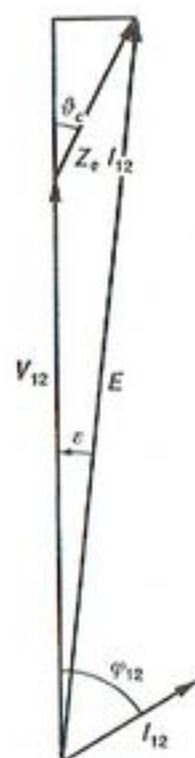



Fig. 5-38

La tensione a vuoto coincide con la f.e.m. E e differisce dalla tensione applicata per la caduta provocata dalla corrente magnetizzante nell'impedenza Z_1; ai termini dati dalle [5-18] sono perciò da aggiungere gli errori a vuoto:

$$\left.\begin{aligned}\eta_0 &= -\frac{Z_1 I_0}{V_1}\cos(\varphi_0-\varphi_1) = -\varrho_0\cos\vartheta_0\,,\\ \varepsilon_0 &= \frac{Z_1 I_0}{V_1}\operatorname{sen}(\varphi_0-\varphi_1) = \varrho_0\operatorname{sen}\vartheta_0\,.\end{aligned}\right\} \qquad [5\text{-}19]$$

A somiglianza di quanto si è visto per i trasformatori di corrente, si può compensare in parte l'errore di rapporto assumendo un rapporto spire $N_1/N_2 = a$ minore del rapporto nominale k_n introducendo quindi un errore:

$$\eta' = \frac{k_n - a}{k_n} \qquad [5\text{-}20]$$

maggiore di zero. L'errore complessivo è dato dalla somma degli errori:

$$\eta = \eta' + \eta_0 + \eta_c$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_c$$

per la presupposta linearità del sistema.

Per ottenere dei valori piccoli per i parametri ϱ_0 e ϱ_c che determinano l'entità degli errori, è necessario costruire il trasformatore con basse impedenze serie (Z_1 e Z_{12}) ed elevata impedenza a vuoto; anche per i TV il problema della precisione è legato a fattori economici. Per le alte tensioni (al di sopra dei 50 kV) il costo e le dimensioni imposte dall'isolamento possono risultare predominanti rispetto alle esigenze imposte dalla classe del TV, dimodoché si hanno facilmente, per le tensioni più elevate, trasformatori con prestazioni esuberanti (200÷500 VA).

Anche per i trasformatori di tensione si può esprimere l'errore complesso in funzione delle impedenze interne come indicato per i TA. Per avere simmetria nelle relazioni, è preferibile ricorrere ad una trasformazione del circuito equivalente a triangolo (fig. 5-39).

È allora, posto:

$$\dot{Y}_0 + \dot{Y}_c = \dot{Y}_t$$

$$\Delta\dot{V} = \dot{V}_1 - \dot{V}_{12} = \frac{\dot{I}}{\dot{Y}_l} = \frac{\dot{Y}_t}{\dot{Y}_l}\dot{V}_{12}$$

e perciò:

$$\dot{e} = -\frac{\Delta\dot{V}}{\dot{V}_1} = -\frac{\dot{Y}_t}{\dot{Y}_l + \dot{Y}_t}\,. \qquad [5\text{-}21]$$

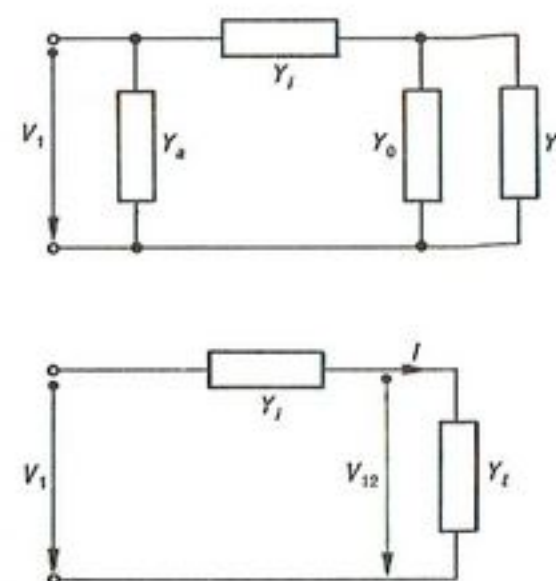



Fig. 5-39

La [5-21] configura un diagramma di Möllinger simile a quello costruito per i TA dove le scale sono tracciate in funzione delle ammettenze; si ricorda tuttavia che è, con buona approssimazione:

$$\frac{1}{\dot{Y}_l} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_{12} + \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_0} \simeq \dot{Z}_1 + \dot{Z}_{12}\,.$$

L'uso del diagramma, data la sostanziale costanza dei vari parametri nel campo di funzionamento del TV, è anche più esteso che non per i TA.

5-3,8. *Caratteristiche costruttive per i TV.*

Fig. 5-40

Nei trasformatori di tensione il problema costruttivo è sensibilmente influenzato dall'isolamento, che impone determinate distanze fra gli avvolgimenti; esso assume anche un notevole interesse economico.

Per ridurre le dimensioni dell'isolamento, per le linee trifasi a tensioni superiori a 50 kV, si preferisce usare tre trasformatori uguali inseriti fra linea e terra, anziché due inseriti fra le fasi; le tensioni nominali di questi trasformatori sono perciò indicate come $V/\sqrt{3}$ (p. es. 150.000: $\sqrt{3}$); anche i secondari sono collegati a stella in modo

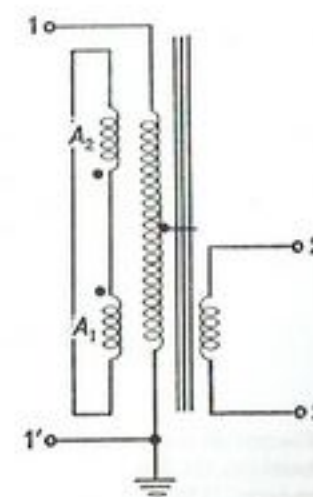
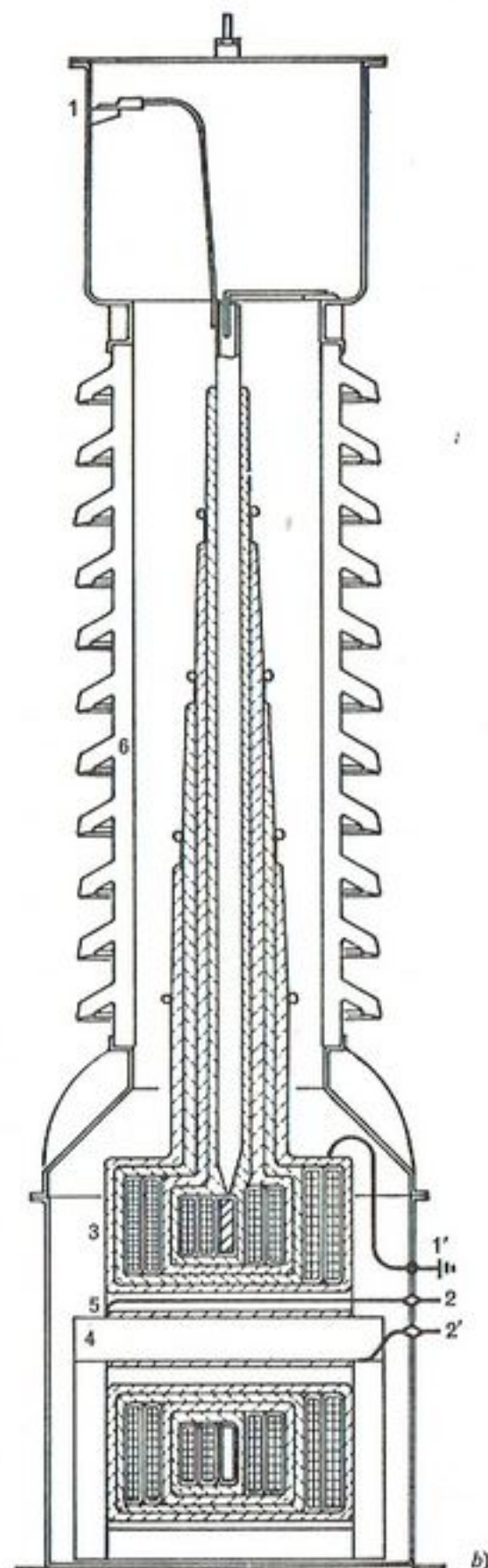



Fig. 5-41
Esempi di trasformatori di tensione: *a*) per connessione fra fasi (15 kV); *b*) per connessione fase-terra ($150:\sqrt{3}$ kV): 1, 1' = morsetti primari; 2, 2' = morsetti secondari; 3 = avvolgimento primario; 4 = nucleo; 5 = avvolgimento secondario; 6 = isolamento verso massa.

da avere sempre in uscita le tensioni concatenate ridotte nel rapporto nominale.

L'isolamento può anche essere ridotto portando il nucleo a metà della tensione applicata (fig. 5-40); l'avvolgimento secondario pur essendo disposto in prossimità dell'estremo a terra, risulta bene accoppiato con tutto l'avvolgimento primario mediante l'aggiunta di due avvolgimenti compensatori A_1 e A_2, di egual numero di spire. Quando infatti i flussi concatenati con questi due avvolgimenti risultano diversi, circola in essi una corrente che tende a ristabilire l'uguaglianza. Con la stessa disposizione si possono costruire trasformatori in cascata, con più elementi in serie.

Nell'avvolgimento primario ad alta tensione circola sempre una corrente, dovuta alla capacità verso il nucleo e verso la massa; questa corrente contribuisce a compensare la corrente magnetizzante e quindi l'errore a vuoto del trasformatore. Tuttavia, al crescere della frequenza, si hanno disuniformità nella distribuzione della tensione lungo l'avvolgimento primario e già a qualche centinaio di periodi l'errore del TV può risultare molto elevato.

Se si verifica un cortocircuito ai morsetti secondari, il trasformatore di tensione risulta percorso da una corrente molto elevata rispetto alla nominale (un TV con errori dello 0,2% può avere una corrente di c.c. pari a circa 500 volte la nominale); vengono perciò talvolta predisposte delle protezioni (fusibili) sulla bassa o sull'alta tensione.

Alcuni tipi di trasformatore di tensione sono illustrati in fig. 5-41.

5-3,9. *Riduttori capacitivi.*

Poiché al crescere delle tensioni di esercizio aumentano le difficoltà costruttive per l'isolamento dei trasformatori di tensione, questi vengono vantaggiosamente sostituiti, alle tensioni di esercizio superiori a 150 kV, con i riduttori capacitivi. Essi consistono (fig. 5-42) in un divisore capacitivo che riduce la tensione al valore V' (compreso fra 5 e 20 kV) e in un

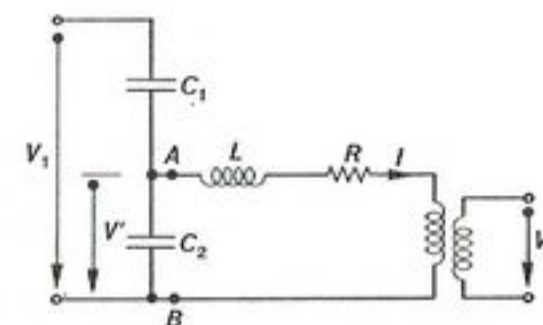



Fig. 5-42

trasformatore (che ha funzione anche di isolamento) per portare la tensione al valore secondario voluto. I condensatori possono essere anche utilizzati per le trasmissioni telefoniche ad onde convogliate.

Il divisore capacitivo si riduce facilmente allo schema equivalente di fig. 5-43 dove è:

$$V_0' = V_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$C_e = C_1 + C_2 ;$$

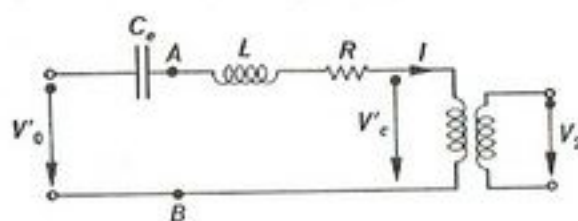



Fig. 5-43

si vede facilmente che, per compensare la caduta di tensione dovuta alla sua impedenza interna (capacitiva), è necessaria una impedenza induttiva ωL, in modo che l'insieme sia risonante per la frequenza di lavoro. In questa impedenza può essere compresa, in tutto o in parte, la reattanza di dispersione del trasformatore. Dal circuito di fig. 5-45 risulta:

$$\frac{\Delta \dot{V}}{\dot{V}_0'} = \frac{\dot{V}_0' - \dot{V}_e'}{\dot{V}_0'} = -(\eta + j\varepsilon) = \frac{\dot{I}}{\dot{V}_0'}\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_e}\right)\right] =$$

$$\simeq \frac{\dot{I}}{\omega_0 C_e \dot{V}_0'}\left[\frac{R}{\omega_0 L} + j\frac{2\,\Delta f}{f}\right] \qquad [5\text{-}22]$$

essendo:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

lo scarto relativo di frequenza rispetto al valore per cui è $\omega_0^2 L C_e = 1$.

Nell'espressione [5-22] compare il fattore:

$$\frac{I}{\omega C_e V_0'} = \frac{P}{\omega C V_1^2} \cdot \frac{V_1 - V_0'}{V_0'}$$

il cui primo termine è il rapporto fra la prestazione P e la potenza reattiva assorbita dai condensatori ($C = (C_1 C_2)/(C_1 + C_2)$) il secondo è il rapporto fra le tensioni sui due elementi del divisore capacitivo. L'altro fattore dell'espressione [5-22] contiene invece l'angolo di perdita dell'induttanza di compensazione e lo scarto relativo fra la frequenza di lavoro e quella di risonanza.

Anche per i riduttori capacitivi, la precisione risulta legata alle dimensioni e quindi al costo. Essi possono però avere, se non ben curati nella realizzazione costruttiva, varie cause aggiuntive di errore; essendo ad esempio le capacità variabili con la temperatura (variazioni da 4 a $6 \cdot 10^{-4}$/K), ogni differenza di temperatura, dovuta a disuniformità dell'ambiente o delle condizioni di smaltimento di calore, fra gli elementi di C_1 e di C_2, si traduce in un errore di rapporto; le variazioni comuni di C_1 e C_2, modificando la capacità equivalente, hanno lo stesso effetto di uno scarto di frequenza.

Le costruzioni attuali garantiscono in genere le stesse caratteristiche di precisione dei trasformatori di tensione, per frequenze limitate a $\pm 0{,}5$ Hz intorno alla frequenza nominale.

Particolare cura deve essere posta nel prevenire o limitare fenomeni di oscillazione propria durante i transitori; essi possono, in alcuni casi, dar luogo a oscillazioni persistenti (subarmoniche) o a ferrorisonanza. Il transitorio più gravoso, da questo punto di vista, è rappresentato dall'apertura di un cortocircuito ai morsetti secondari; si devono spesso inserire adeguati dispositivi di protezione, come spinterometri limitatori della tensione sulla parte magnetica, filtri smorzatori, ecc. Un altro transitorio, durante il quale può interessare il corretto funzionamento del riduttore, è il brusco cortocircuito primario, in seguito al quale la tensione secondaria deve pure estinguersi rapidamente, per assicurare il pronto intervento delle protezioni.

5-4. **Impieghi di elementi anomali.**

5-4,1. *Strumenti magnetoelettrici con raddrizzatori.*

Effettuando la trasformazione di una corrente alternata in una corrente unidirezionale, per mezzo di raddrizzatori, si può estendere alla c.a. l'uso degli strumenti magnetoelettrici.

Quando lo strumento è alimentato da un convertitore a due semionde, in particolare a ponte di Graetz (fig. 5-44) la sua indicazione risulta proporzionale *alla media dei valori assoluti* assunti dalla corrente in un periodo

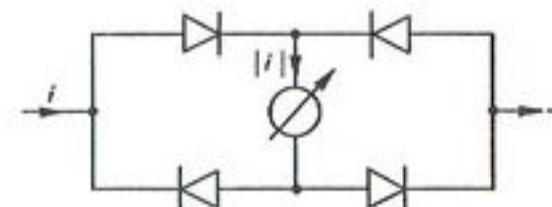



Fig. 5-44

(fig. 5-45); per comodità, si usa graduare la scala in modo da leggervi direttamente il valore efficace, quando la corrente sia sinusoidale; ciò significa che la lettura rappresenta la media suddetta moltiplicata per il fattore 1,11. Quando la corrente che percorre lo strumento non è sinusoidale, la lettura non ha ovviamente più alcun riferimento con il valore efficace; nel caso, molto frequente, di correnti alternate in cui si ha un solo passaggio per lo zero ogni semiperiodo, lo strumento indica il valore medio di una semionda, moltiplicato per 1,11.

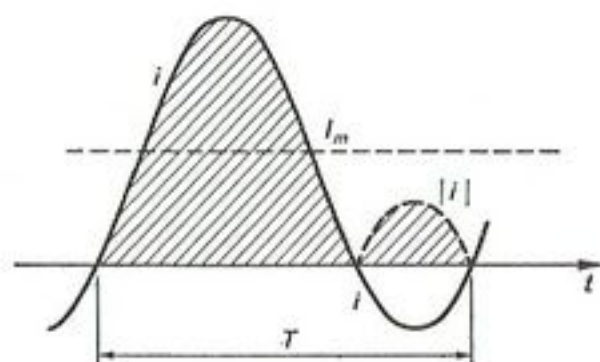



Fig. 5-45

Lo schema a ponte di fig. 5-44 è il più usato, perché consente la migliore utilizzazione dello strumento e dei raddrizzatori; si hanno talvolta schemi a due soli raddrizzatori, del tipo illustrato in fig. 5-46.

Come raddrizzatori sono per lo più usati i raddrizzatori ad ossido di rame che hanno il pregio di più basse cadute di tensione rispetto agli altri tipi. Le caratteristiche (fig. 5-47) mostrano: una resistenza inversa finita, che comporta una corrente inversa nel periodo di blocco; una resistenza diretta, che non è costante ed è relativamente elevata intorno allo zero;

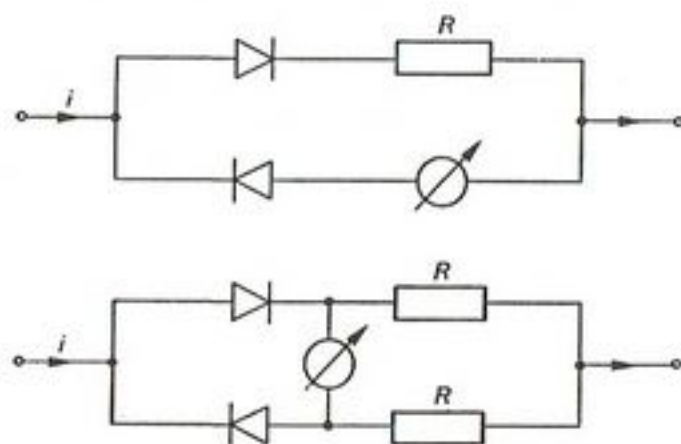



Fig. 5-46

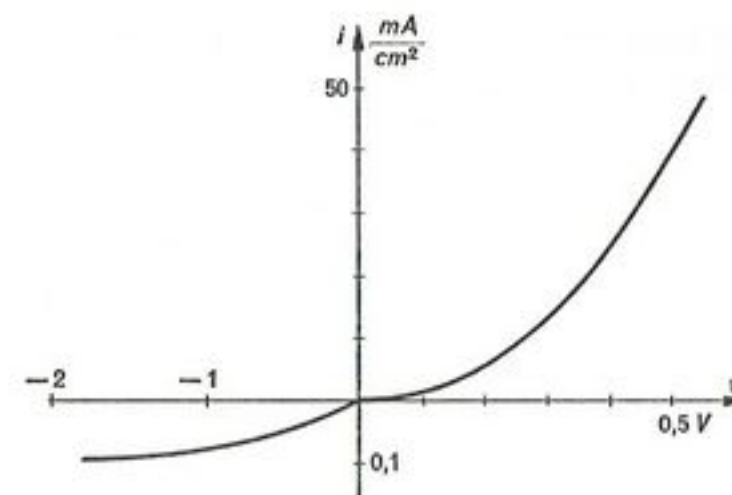



Fig. 5-47

tali resistenze variano con la temperatura, con coefficienti dell'ordine del $-1\%/K$ per la resistenza diretta e del -3% per la inversa.

Per effetto di tali caratteristiche, se il dispositivo convertitore è alimentato da una tensione sinusoidale, risulta percorso da una corrente non sinusoidale; la scala è perciò contratta nella parte iniziale e la misura di correnti non si estende, normalmente, a portate inferiori al mA; si rende inoltre necessaria una resistenza addizionale, in serie sullo strumento, per ridurre l'effetto della non linearità e delle variazioni con la temperatura. Il comportamento del raddrizzatore è tanto più soddisfacente quanto più spinta risulta la sua utilizzazione.

Gli strumenti a raddrizzatore sono perciò utilizzati per misure industriali di tensione e corrente in classe 1,5 o inferiore (strumenti universali); essi hanno un consumo che, pur essendo più elevato rispetto agli strumenti magnetoelettrici, è sempre inferiore a quello degli strumenti per c.a. Il loro impiego può essere esteso a frequenze di alcuni kHz con una costruzione accurata degli shunt e dei resistori addizionali. Lo strumento tende a segnare in meno, a causa della capacità propria dei raddrizzatori (che è dell'ordine di 30 nF/cm^2), che assorbe una certa corrente nel semiperiodo in cui non si ha passaggio di c.c. Gli errori in c.a. possono essere ridotti con l'impiego di riduttori di corrente o di raddrizzatori al germanio, che hanno maggior caduta di tensione, ma capacità e corrente inversa molto minori.

5-4,2. *Voltmetri di cresta.*

La caratteristica anomala dei raddrizzatori può essere convenientemente sfruttata per misurare il valore di cresta di una tensione, con lo schema di fig. 5-48. Il condensatore C, che in assenza della resistenza R resterebbe

carico al valore di cresta della tensione di alimentazione, perde ad ogni periodo T la carica (fig. 5-49):

$$\Delta Q = C\,\Delta V\,;$$

poiché è:

$$Q = Q_0\,\varepsilon^{-t/RC} \simeq Q_0\left(1 - \frac{t}{RC}\right)$$

si ha:

$$\frac{\Delta V}{V_M} = \frac{\Delta Q}{Q_0} = \frac{T}{RC}\,.$$

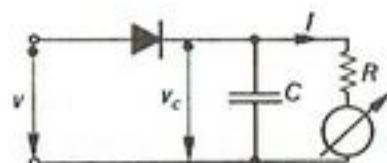
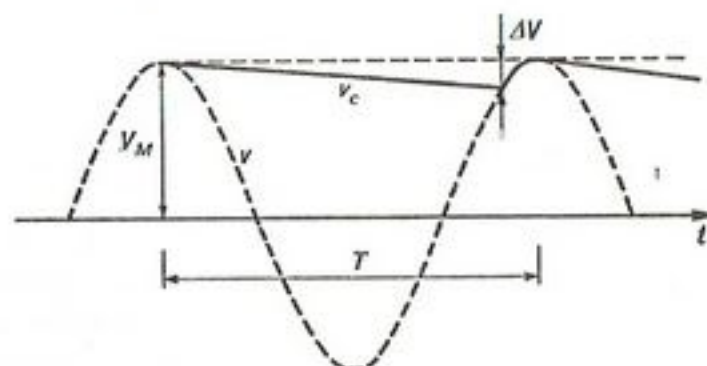



Fig. 5-48 Fig. 5-49

Uno strumento magnetoelettrico misura la corrente $I = V_m/R$ dove il valore medio V_m della tensione differisce dal valore V_M per $\Delta V/2$; si ha perciò un errore:

$$\eta = -\frac{T}{2RC}$$

che può essere reso molto piccolo se la costante di tempo RC del sistema è convenientemente grande rispetto al periodo della tensione da misurare.

Analogo allo schema precedente è quello di fig. 5-50; la tensione v' fra i punti AB è illustrata in fig. 5-51 nel caso ideale di resistenza R infinita. Questo

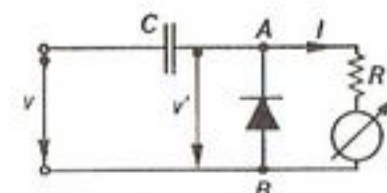
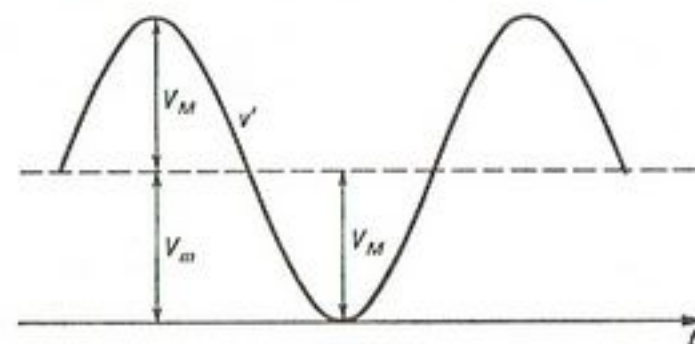



Fig. 5-50 Fig. 5-51

schema consente di mettere a terra un punto del raddrizzatore e di assorbire dalla sorgente una corrente a valor medio nullo, cosa che non si verifica nello schema di fig. 5-48.

Questi schemi consentono, mediante l'impiego di raddrizzatori opportuni, la misura di tensioni fino a parecchi MHz; il limite superiore è posto dalla capacità del raddrizzatore e dall'induttanza dei collegamenti. A questo scopo, per le frequenze più elevate, il circuito contenente la capacità e il raddrizzatore viene montato su una « testa di misura » che può essere portata direttamente a contatto con i punti fra i quali si vuol misurare la tensione; la connessione al voltmetro (elettronico) è quindi percorsa solo da una corrente continua.

5-4,3. *Altri schemi di misura di valori di cresta.*

Se un condensatore di capacità C è alimentato da una tensione variabile v, esso è percorso da una corrente:

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

che si annulla ad ogni massimo o minimo di v.

Nel circuito di fig. 5-52, supposta trascurabile la caduta di tensione nello strumento, ogni raddrizzatore conduce solo nell'intervallo fra un massimo V_M e il successivo minimo V'_M (o viceversa); l'indicazione dello strumento (fig. 5-53) è proporzionale al valor medio della corrente che lo attraversa e cioè a:

$$I = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} C\,\mathrm{d}v = Cf(V_M - V'_M)\,.$$

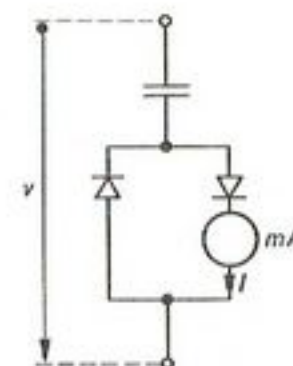



Fig. 5-52

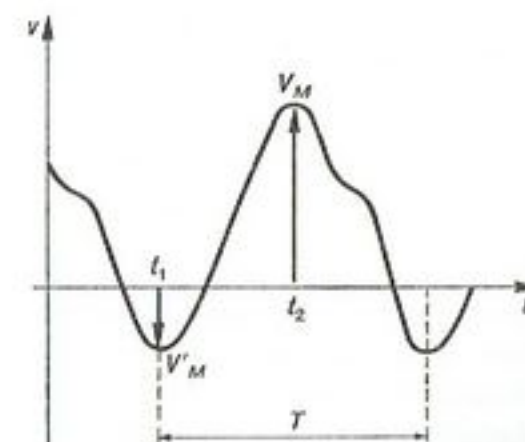
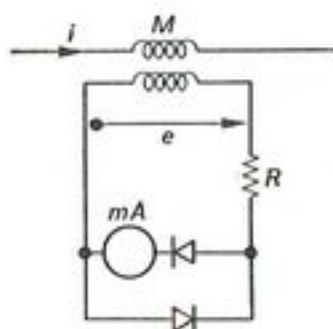



Fig. 5-53

Nel caso quindi in cui la tensione v abbia due semiperiodi simmetrici, con $V'_M = -V_M$, lo strumento fornisce un'indicazione proporzionale a $2V_M$; se v ha un solo massimo (o minimo) per semiperiodo (come accade per una tensione continua con sovrapposta una componente alternativa) lo strumento indica l'ampiezza da picco a picco della componente alternativa. Dualmente, nel circuito di fig. 5-54, se lo strumento ha un consumo così basso da poter ritenere che misuri la f.e.m.:

Fig. 5-54

$$e = M\frac{di}{dt}$$

l'indicazione dello strumento dipende dal valor massimo della corrente i.

5-4,4. *Raddrizzatori comandati.*

Si consideri il circuito di fig. 5-55, alimentato da una tensione sinusoidale; esso è percorso da corrente solo quando è chiuso il contatto mobile c. Se questo si chiude quando la tensione vale:

$$v = V_M \operatorname{sen}\alpha$$

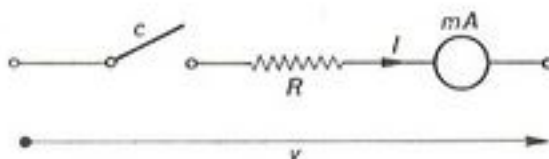



Fig. 5-55

e si apre dopo un semiperiodo, lo strumento indica:

$$I = \frac{1}{T}\int_{\alpha/\omega}^{(\pi+\alpha)/\omega} \frac{V_M}{R}\operatorname{sen}\omega t\,dt = \frac{V_M}{\pi R}\cos\alpha\,;$$

il dispositivo ha dunque la proprietà di indicare il valore di una componente della tensione applicata, con riferimento al sistema che comanda l'apertura e la chiusura del contatto. Se la tensione v contiene delle armoniche, il loro effetto può esser limitato, modificando la durata della chiusura.

Il comando può essere elettromagnetico (raddrizzatore vibrante) o a camme (raddrizzatore rotante) ma in ogni caso il dispositivo deve essere

alimentato da una sorgente isofrequenziale con la tensione v. Nel raddrizzatore vibrante (fig. 5-56) il contatto (4) è soggetto sia all'induzione creata dal magnete permanente (1) sia a quella creata dall'avvolgimento percorso da corrente sinusoidale di periodo T. Il suo moto risulta perciò dello stesso periodo T ((3-5,5); la durata della chiusura si regola con la posizione del contatto fisso, la fase con uno sfasatore esterno. La resistenza diretta è dell'ordine di 10^{-2}, quella inversa dell'ordine di $10^8\ \Omega$.

Fig. 5-56
Raddrizzatore vibrante: 1 = magnete permanente; 2 = avvolgimento di eccitazione in c.a.; 3 = sfasatore; 4 = contatti mobili.

Nel raddrizzatore rotante, il comando di chiusura è dato da una camma mossa da un motorino sincrono; spostando la posizione del contatto fisso si viene a variare la fase della chiusura.

Per ridurre la tensione ai capi dell'interruttore, si usano schemi del tipo di fig. 5-57. Con schemi del tipo di fig. 5-58, il raddrizzatore meccanico

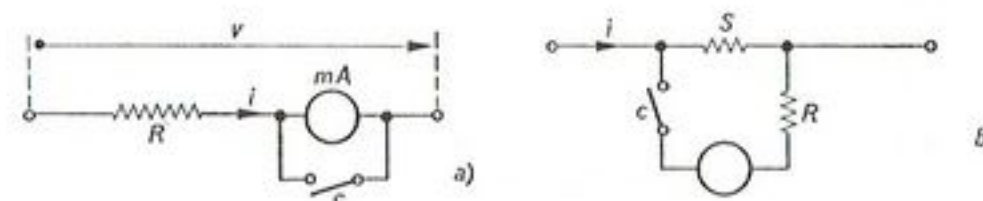
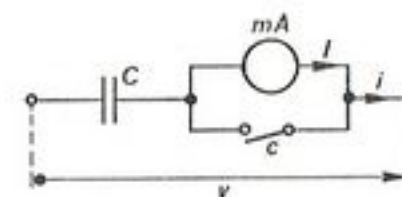



Fig. 5-57

Fig. 5-58

può essere impiegato per la misura dei valori istantanei di una grandezza periodica simmetrica; è infatti, ad esempio, nel circuito di fig. 5-58 a:

$$I = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T/2} i\,dt = Cf\int_{t_0}^{t_0+T/2} dv = fC\left[v\left(t_0+\frac{T}{2}\right) - v(t_0)\right] = 2fCv(t_0);$$

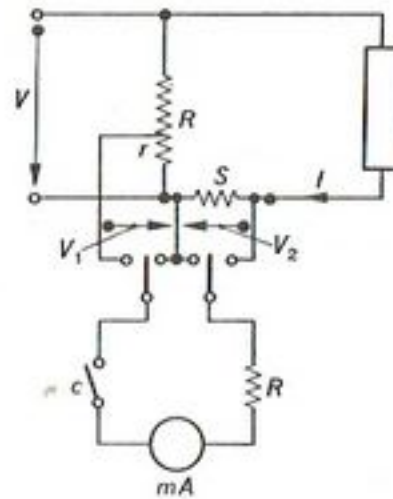



Fig. 5-59

variando l'istante t_0 di inizio della conduzione, si può descrivere l'intero ciclo.

Nello schema di fig. 5-59 si possono misurare i valori massimi della tensione $V_1 = Vr/R$ e $V_2 = SI$, variando l'istante di chiusura del contatto fino a quando sono massime le letture. Se, quando è massima l'una, si sposta il commutatore sull'altra, lo strumento consente di ricavare anche lo sfasamento fra V_1 e V_2 e quindi la potenza assorbita del carico; ciò è valido solo quando almeno una delle due grandezze sia sinusoidale.

Il raddrizzatore comandato, in unione con un galvanometro, costituisce inoltre un rivelatore di zero sensibile alla fase, di caratteristiche cioè simili a quelle dell'elettrodinamometro (3-5,4).

Apparecchiature con caratteristiche simili, ma adatte anche a funzionare a frequenze elevate, si possono costruire con circuiti elettronici analogici, logici o misti, che consentono di determinare separatamente la componente in fase e quella in quadratura di una tensione incognita, rispetto ad un riferimento esterno.

5-4,5. *Convertitore termoelettrico.*

Se una termocoppia, formata dalla giunzione di metalli diversi, viene riscaldata da una corrente di valore efficace I, essa genera una f.e.m. termoelettrica (continua), che è funzione del salto θ di temperatura fra la giunzione riscaldata e le altre giunzioni. Poiché questo salto di temperatura è proporzionale alla potenza riscaldante, risulta:

$$E = f(\theta) = f'(RI^2) = f''(I);$$

la relazione fra E ed I è indipendente dal segno e dalla forma della corrente; questo convertitore consente perciò la trasformazione di correnti continue ed alternate in tensioni continue.

Perché la sovratemperatura θ risulti indipendente dalla temperatura esterna e per ridurre la potenza necessaria, la termocoppia viene generalmente montata nel vuoto (fig. 5-60); essa è costituita ad esempio da una giunzione fra costantana e rame (o ferro) che, con sovratemperature di 200 K dà luogo a una f.e.m. di circa 10 mV richiedendo una potenza di riscaldamento di qualche milliwatt. La trasmissione del calore fra riscaldatore e giunzione è facilitata se essi sono a contatto (croci termiche, fig. 5-61); ciò può dar luogo a qualche inconveniente sia per le correnti continue

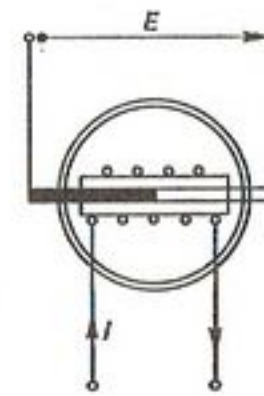



Fig. 5-60

Fig. 5-61

(una frazione della corrente da misurare percorre lo strumento) sia per le correnti ad alta frequenza (corrente assorbita per capacità dallo strumento). Le termocoppie isolate sono perciò oggi preferite.

Le leggi che legano la f.e.m. al salto di temperatura e questa alla potenza dissipata (anche R varia con la temperatura) rendono la tensione di uscita una funzione della corrente elevata ad una potenza maggiore di due; spesso la taratura è diversa per ogni singola termocoppia.

Se il riscaldatore è fatto in modo da limitare le variazioni della sua resistenza con la frequenza, e sono tenuti entro limiti ridotti gli effetti termoelettrici secondari, che provocano differenze di comportamento con il segno della corrente, le termocoppie possono essere utilizzate per la misura del valore efficace di correnti alternate fino a parecchie centinaia di MHz. Attraverso una progettazione e costruzione accurata, si possono ottenere campioni di trasferimento fra correnti continue ed alternate, noti fino a qualche ppm, almeno fino alle frequenze acustiche.

Per la piccola f.e.m. sviluppata e per la relativamente elevata resistenza interna, la tensione di uscita deve essere misurata con un millivoltmetro a basso consumo, adattato come resistenza a quella della termocoppia stessa e tarato con essa; per misure di precisione si ricorre a sistemi potenziometrici.

Un inconveniente delle termocoppie è la scarsa sovraccaricabilità; esse sono perciò usate soprattutto in laboratorio, per la misura di correnti ad alta frequenza e per il confronto fra correnti continue ed alternate.

5-4,6. *Applicazioni dei diodi Zener.*

La caratteristica inversa dei diodi al silicio, che abbiano subito particolari trattamenti (diodi Zener) (fig. 5-62) ne consente l'uso come riferimenti fissi o per modificare le scale degli strumenti; in questi campi essi vanno rapidamente sostituendo gli altri tipi di resistori (in genere di tipo

ceramico) con caratteristica non lineare. Il circuito comprendente il diodo può essere schematizzato (fig. 5-63) con una forza controelettromotrice, in serie ad una resistenza; il funzionamento ideale si avrebbe per $E_0 =$ costante e $R_e = 0$; il valore della resistenza equivalente, il valore e segno del coefficiente di temperatura della E_0 dipendono dalla caratteristica del diodo.

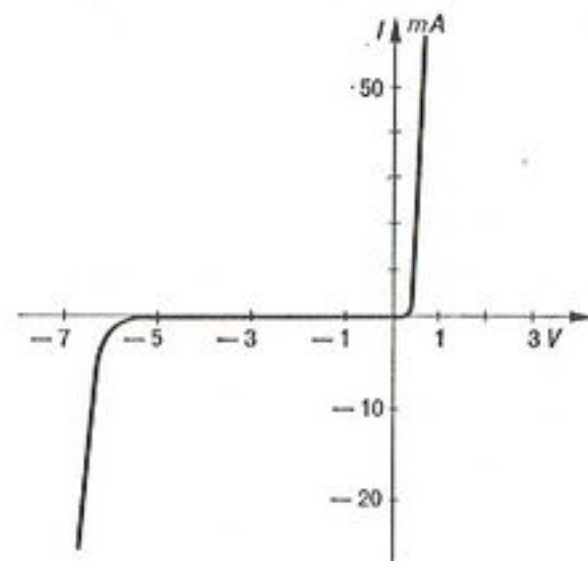



Fig. 5-62

Si ha convenienza ad usare diodi da 4÷8 V, per i quali E_0 varia da + a − 0,4%, per K e i valori di resistenza sono intorno a qualche ohm. Combinazioni di più diodi con caratteristiche diverse possono dar luogo a una compensazione dei coefficienti di temperatura.

Per l'uso come elemento di riferimento, si utilizza lo schema di fig. 5-64; con l'uso del generatore equivalente di fig. 5-63, si ha ($E > E_0$, $R_i \gg R_e$):

$$V = \frac{1}{1 + \frac{R_e}{R_i}} \left[\frac{R_e}{R_i} E + E_0 - R_e I \right] \simeq E_0 - R_e I$$

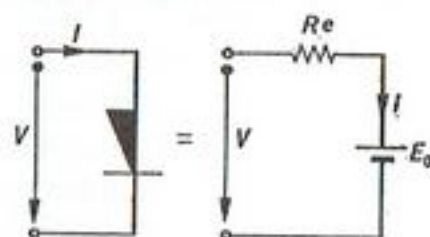
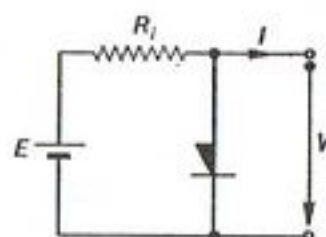



Fig. 5-63 Fig. 5-64

anziché, come sarebbe in assenza del diodo:

$$V = E - R_i I ;$$

la sorgente risulta quindi di bassa resistenza interna, e perciò poco sensibile ai carichi; la tensione di uscita è inoltre poco influenzata dalle variazioni della tensione E della sorgente di alimentazione.

Sorgenti di riferimento di questo tipo, che possono raggiungere, grazie ad un'adeguata stabilizzazione termica, stabilità dell'ordine di 10^{-7}, vengono impiegate negli strumenti portatili (potenziometri automatici o strumenti numerici), con il vantaggio della facilità di trasporto, minor effetto del carico, ecc.

Una caratteristica simile (con tensioni E_0 dell'ordine di alcune decine di volt) si riscontra anche nei tubi a gas, che trovano impiego come riferimento nei circuiti di stabilizzazione degli alimentatori per amplificatori.

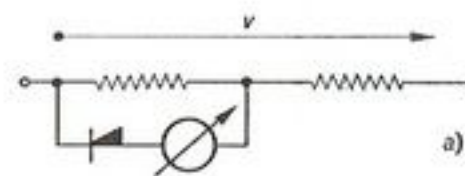
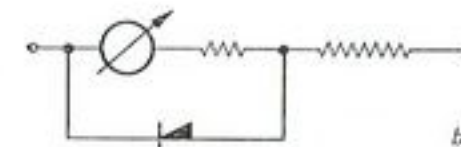



Fig. 5-65 *a* Fig. 5-65 *b*

I voltmetri in corrente continua, con scala contratta all'inizio, sono costituiti secondo lo schema di fig. 5-65 *a*; quelli con scala contratta in fondo, secondo lo schema di fig. 5-65 *b*. Con semplici modifiche si possono realizzare strumenti in c.a., con scala ristretta ad entrambi gli estremi. L'uso degli amperometri è limitato dalle alte cadute necessarie per il funzionamento del diodo e può quindi essere effettuato per strumenti in c.a., inseriti al secondario di speciali TA. Una accurata scelta dei coefficienti di temperatura delle varie resistenze e del diodo può portare a strumenti di precisione industriale, con un campo di letture che, tra due valori distanti un decimo del fondo scala, occupi i 9/10 della scala stessa.

5-4,7. *Convertitore a effetto Hall.*

L'effetto Hall consiste nell'apparizione di una f.e.m. trasversale su un conduttore di spessore d (fig. 5-66) percorso da corrente I e sottoposto ad un'induzione magnetica B, ad essa normale; si ha:

$$E = R_H \frac{BI}{d} ;$$

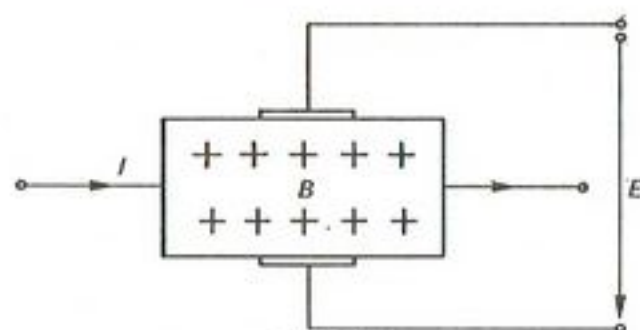



Fig. 5-66

con R_H costante del materiale che forma il conduttore e che, per alcuni materiali come l'arseniuro e l'antimoniuro di indio, raggiunge rispettivamente 1 e 6×10^{-4} m³/As.

Questa f.e.m. si può spiegare, in prima approssimazione, con l'effetto elettrodinamico esercitato dall'induzione B sui filetti di corrente; questi si spostano lungo il moto, creando una disuniformità di carica che dà luogo a una f.e.m. trasversale, che equilibra il fenomeno.

Una piastrina di Hall consente di avere un convertitore del prodotto IB in una f.e.m. E; esso si presta per eseguire il prodotto di due grandezze, in particolare per misure di potenza, fino alle frequenze acustiche.

La f.e.m. sviluppata a vuoto dipende dalla temperatura; la resistenza interna del generatore è anche funzione sia della temperatura che del valore dell'induzione. L'arseniuro di indio, pur dando una f.e.m. minore, si presenta da questo punto di vista nettamente migliore dell'antimoniuro.

Con un'induzione dell'ordine di 1 T e con densità di corrente di 1 A/mm², quali sono imposte da ragioni termiche, si possono avere tensioni dell'ordine della frazione di volt. Per mantenere la proporzionalità fra E e BI entro l'1% è necessario misurare tale f.e.m. con uno strumento con resistenza pari ad almeno 50 volte la resistenza interna della sorgente equivalente; vi sono inoltre alcuni schemi, più complessi, in cui la variazione della resistenza interna risulta compensata.

5-5. **Alcuni convertitori speciali.**

5-5,1. *Trasformatori per c.c.*

Si considerino due nuclei formati da materiale magnetico con caratteristica rettangolare ideale (fig. 5-67); su essi siano avvolti due avvolgimenti (concordi) che producono le amperspire costanti N_cI_c e due avvolgimenti (discordi) alimentati da una sorgente di tensione alternata (fig. 5-68).

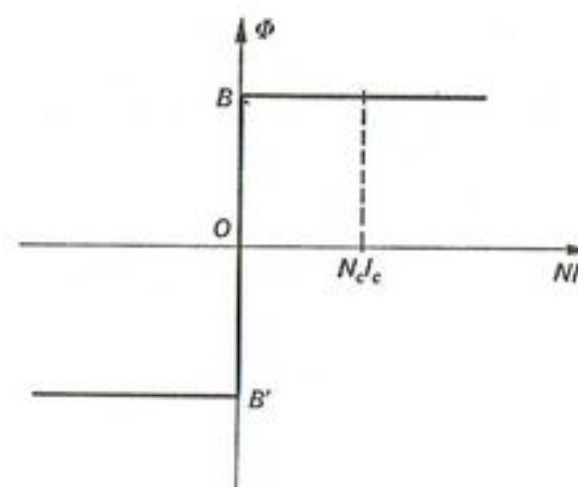
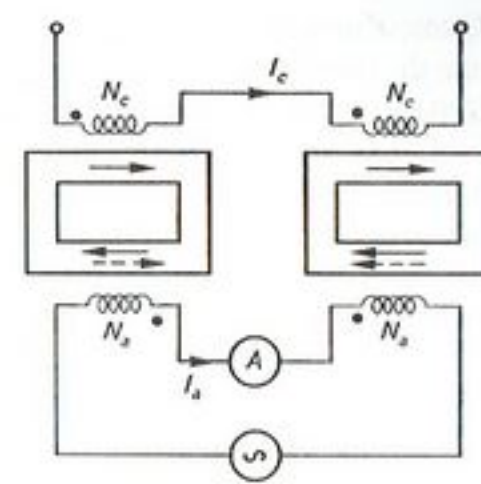



Fig. 5-67 Fig. 5-68

Si suppongano nulle le resistenze e le reattanze di dispersione del circuito in c.a.; per sopperire alla f.e.m. applicata, occorre una variazione del flusso concatenato; questa può avvenire, in un nucleo, se la corrente alternata fornisce, in ogni istante, delle amperspire tali da portarlo a funzionare sul tratto BOB', cioè se fornisce le amperspire:

$$N_a I_a = -N_c I_c\,;$$

poiché gli avvolgimenti in c.c. e c.a. sono concordi su un nucleo e discordi sull'altro, ciò avverrà separatamente in un semiperiodo per un nucleo e nel successivo per l'altro. Per il nucleo in cui le amperspire continue e alternate sono dello stesso segno, non si ha, nelle ipotesi fatte, caduta di tensione. La corrente I_a risulta rettangolare, indipendente entro certi limiti dalla forma, dalla frequenza e dal valore della tensione ausiliaria.

La presenza di resistenze e reattanze di dispersione e gli scostamenti delle caratteristiche dei nuclei dalla forma idealizzata di fig. 5-67 fanno sì che la corrente abbia in genere la forma tratteggiata in parte di fig. 5-69. Ciò non toglie che le indicazioni dell'amperometro inserito sul circuito in c.a. siano funzione del valore assunto dalla corrente continua I_c.

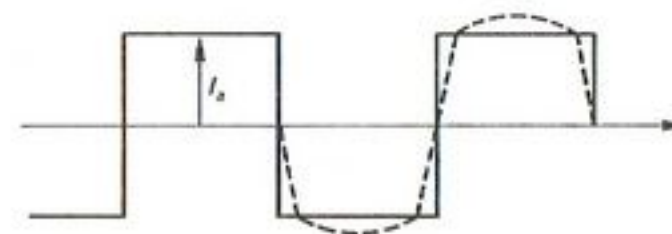



Fig. 5-69

Questo metodo bene si presta specie per la misura delle correnti continue di valore elevato, poiché si ottengono consumi praticamente nulli sul lato c.c. assorbendo qualche centinaio di VA dalla sorgente ausiliaria in c.a. Le precisioni sono dell'ordine di 0,5-1%.

Mediante tali sistemi, e quelli da essi derivati, si ha la possibilità di utilizzare le proprietà dei trasformatori di misura (isolamento, connessione in comune di più strumenti) anche per la misura di correnti (e tensioni) continue. Essi si prestano inoltre per l'alimentazione di contatori ad induzione, per la misura dell'energia, in sostituzione dei più pesanti e meno precisi contatori elettrodinamici.

5-5,2. *Comparatore di c.c.*

Il comparatore ha lo scopo di determinare l'uguaglianza delle amperspire di due avvolgimenti, percorsi da correnti continue, basandosi sulla non-linearità della caratteristica di un nucleo magnetico. Il suo schema di principio è illustrato in fig. 5-70; esso consta di due avvolgimenti, primario e secondario, percorsi dalle correnti da confrontare, che abbracciano due nuclei interni, dotati di un dispositivo di rivelazione di flusso nullo. In pratica, l'apparecchio comprende anche un avvolgimento in cortocircuito, che elimina eventuali componenti alternative, un avvolgimento ausiliario per una regolazione più fine dell'equilibrio e vari schermi magnetici, per ridurre l'influenza di altri circuiti esterni.

La rivelazione della condizione di flusso nullo si basa sull'asimmetria delle variazioni di flusso che si presenta quando, in un nucleo, siano presenti contemporaneamente un flusso alternato ed uno continuo; in queste

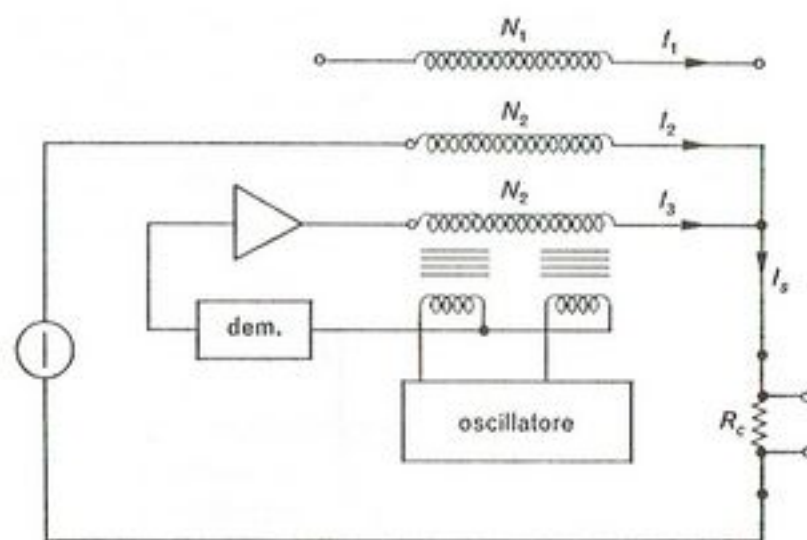



Fig. 5-70

condizioni nasce una f.e.m. di seconda armonica, che si annulla solo in assenza di polarizzazione continua.

In genere i due nuclei hanno avvolgimenti connessi in modo da bilanciare le f.e.m. dovute alla sorgente di alimentazione e da mettere invece in evidenza la sola seconda armonica.

L'impiego più comune del comparatore prevede un dispositivo di autobilanciamento (fig. 5-70); una sorgente continua fornisce le amperspire N_2I_2, mentre la quota N_2I_3 è fornita da un circuito a retroazione, alimentato dal rivelatore, tramite un opportuno demodulatore della seconda armonica. Si realizza allora la condizione:

$$N_2I_2 + N_2I_3 = N_2I_s = -N_1I_1 .$$

Con una corrente I_3 dell'ordine di qualche percento della I_2 ed un guadagno dei circuiti di retroazione di 10^4, l'equilibrio può essere realizzato a meno di qualche p.p.m.

La corrente I_s percorre poi la resistenza R_c di carico, producendovi una d.d.p. che può essere misurata o confrontata con altre d.d.p. prodotte dalla I_1.

5-5,3. *Comparatore di corrente alternata.*

Si considerino (fig. 5-71) due avvolgimenti, con numero di spire rispettivamente N_1 e N_2, avvolti uniformemente su un nucleo magnetico toroidale, e percorsi rispettivamente dalle due correnti sinusoidali $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$, della stessa frequenza. Se è realizzata la condizione:

$$N_1\dot{I}_1 + N_2\dot{I}_2 = 0 \qquad [5\text{-}23]$$

la f.m.m. totale agente sul nucleo, e quindi il suo flusso, sono nulli; il verificarsi di questa condizione può essere rivelata dall'annullarsi della

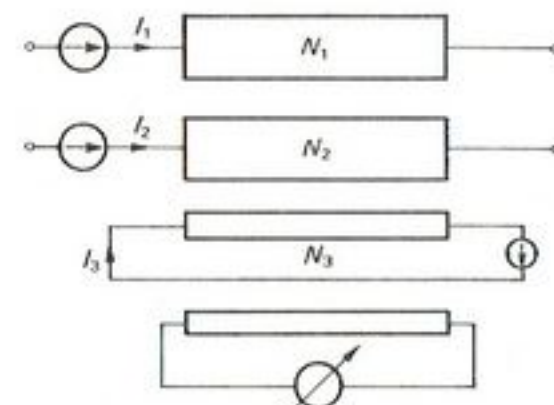



Fig. 5-71

f.e.m. indotta in un terzo avvolgimento, montato direttamente sul nucleo, internamente agli altri due.

Se la condizione [5-23] non è realizzata, l'annullamento del flusso può essere provocato da una corrente nota I_3, inviata in un avvolgimento ausiliario di N_3 spire; in generale, la corrente I_3 è una frazione nota $(a + jb)$ della corrente I_2, cosicché la condizione di zero diviene:

$$N_1\dot{I}_1 = -N_2\dot{I}_2(1 + (a + jb)(N_3/N_2)) \ . \qquad [5\text{-}24]$$

Questa relazione consente di mettere fra di loro in relazione le correnti I_1 e I_2 in un grande campo di rapporti di ampiezza e fase, variando opportunamente i numeri di spire ed i parametri a, b.

Con un'accurata distribuzione degli avvolgimenti, migliorata da uno schermo magnetico con opportuni avvolgimenti compensatori e riducendo, con schermi elettrostatici, gli effetti capacitivi fra avvolgimenti, si realizzano comparatori con risoluzione ed incertezza dell'ordine di qualche parte in 10^{-8}.

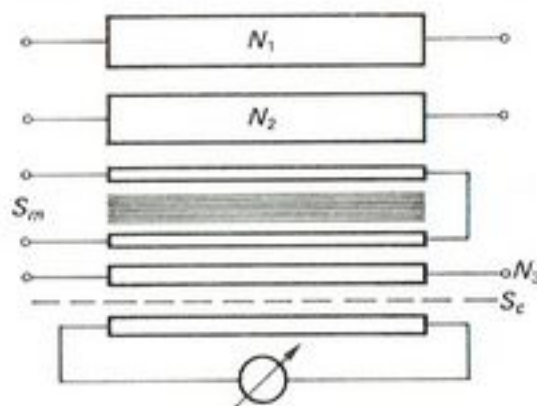



Fig. 5-72

In particolare, per ridurre i flussi dispersi degli avvolgimenti primario e secondario, che possono influire sull'avvolgimento di rivelazione, si dispone fra questi e quello un nucleo magnetico di schermo (S_m in fig. 5-72); su questo nucleo è anche montato un avvolgimento ausiliario, che viene eccitato da una sorgente separata, che annulla la caduta di tensione sull'avvolgimento a N_2 spire, in modo che esso non costituisca un carico per la sorgente che lo alimenta ed inoltre, essendo equipotenziale, riduca anche gli effetti capacitivi. La f.m.m. prodotta dall'avvolgimento ausiliario viene neutralizzata, ai fini dell'equilibrio, da una f.m.m. uguale e contraria, prodotta da un ulteriore avvolgimento, identico al precedente, ma situato internamente allo schermo magnetico.

5-5,4. *Bobina di Rogowski.*

Un semplice mezzo per la misura di una corrente variabile nel tempo è rappresentato dalla cosiddetta bobina di Rogowski, che è in pratica una bobina in aria, convenientemente accoppiata, tramite un coefficiente di mutua induzione M, con la corrente i da misurare. La f.e.m. indotta nella bobina:

$$e = -M\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$$

può essere integrata con un circuito elettronico o con opportuni sistemi passivi, per dare un'uscita proporzionale ad i. Se non si impiegano amplificatori ad elevata impedenza d'ingresso, occorre tener conto della corrente i_c che circola nella bobina, di resistenza R ed induttanza L:

$$i_c = -pMi/(R + pL)$$

che può ricondursi ad una relazione di proporzionalità ($i_c = Mi/L$, se la costante di tempo $T = L/R$ è sufficientemente elevata rispetto ai tempi in gioco (come è nei normali trasformatori di corrente per frequenza industriale, per cui, nel caso di accoppiamento perfetto, ci si riporta alla [5-9]).

Questo metodo viene generalmente usato per la misura di correnti transitorie di grande ampiezza, per le quali sarebbe difficile la costruzione di una mutua induttanza in ferro; è tuttavia necessario che la bobina sia accoppiata solo con la corrente da misurare e che il valore di M sia sufficientemente ben definito e stabile. Ciò può ottenersi dando alla bobina le caratteristiche di un tensiometro magnetico (sezione uniforme, spire uniformemente distribuite, ecc.) che abbracci completamente il conduttore percorso dalla corrente i.

5-5,5. *Convertitori a compensazione di coppia.*

In molti casi, in cui si deve realizzare la misura centralizzata di un elevato numero di grandezze, è utile trasformarle in segnali tutti omogenei

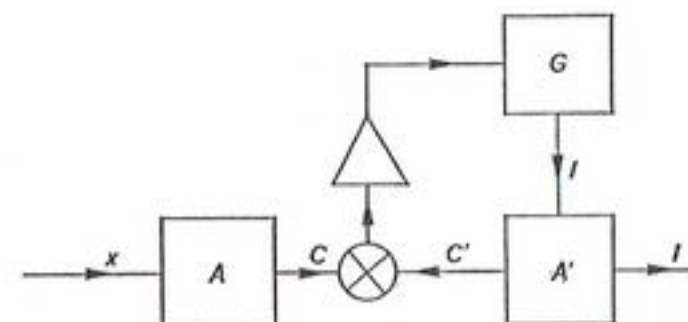



Fig. 5-73

fra loro (per es. tensioni continue o più spesso correnti continue che possono essere trasmesse a distanza senza introdurre errori).

I tipi più semplici (fig. 5-73) confrontano la coppia C, prodotta dalla grandezza x da misurare su un opportuno equipaggio mobile A, con la coppia C' prodotta dalla corrente continua I in un equipaggio magnetoelettrico A'. Un sistema a retroazione influisce sul generatore G che eroga la corrente I, in modo che sia sempre:

$$C = C' \quad \text{e quindi:} \quad x = kI .$$

La misura della grandezza x (tensione, corrente, potenza o altra grandezza in c.c. o c.a. in grado di esser trasformata in una coppia motrice) viene riportata quindi ad una misura della corrente continua I.

5-5,6. *Tecniche di campionamento.*

L'osservazione e la misura di una grandezza periodica a frequenza elevata può essere riportata a quella di una analoga grandezza a frequenza più bassa, mediante l'uso di tecniche di campionamento.

Il campionamento coerente è basato sullo stesso principio dello stroboscopio; si ammetta di avere una tensione di frequenza f, che viene applicata all'ingresso dello strumento solo per istanti brevissimi, ripetuti con frequenza f_0; ciò può ottenersi sbloccando, con impulsi molto brevi ($10^{-10} \div 10^{-11}$ s), un diodo opportunamente polarizzato, ed immagazzinando il valore, così ottenuto, come tensione su un condensatore di memoria.

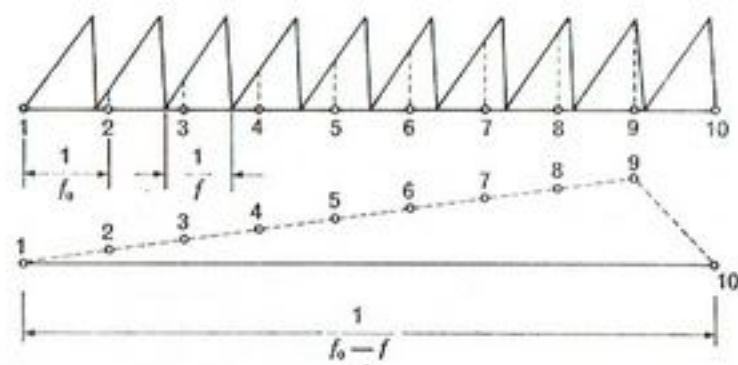



Fig. 5-74

L'insieme dei valori così ottenuti (fig. 5-74) costituisce una tensione con gli stessi valori della tensione d'ingresso, ma con frequenza $f_0 - f$, che può risultare molto minore di f, e consente perciò la misura con uno strumento avente una banda passante corrispondentemente minore.

Questa tecnica è particolarmente usata per realizzare degli oscillografi fino ad alcune centinaia di MHz, dove un tracciato a più punti ravvicinati fornisce un'immagine abbastanza completa dei segnali misurati.

Un campionamento si dice invece incoerente quando l'intervallo di tempo fra due impulsi successivi varia in modo casuale, non ripetibile.

Si può dimostrare che, campionando in tal modo una grandezza sinusoidale, l'insieme degli impulsi risultanti ha gli stessi valori medio, efficace e di picco, di un insieme coerente eseguito con frequenza risultante non nulla.

Si misurano così direttamente tensioni con frequenze fino ai GHz (10^9 Hz).

5-5,7. *Moltiplicatori a divisione di tempo.*

Esistono circuiti che forniscono in uscita un impulso, con ampiezza proporzionale ad una grandezza Y e durata proporzionale ad un'altra grandezza X. L'area dell'impulso, ossia il valore medio della componente continua di uscita risulta allora proporzionale al prodotto XY.

Il circuito base è illustrato in fig. 5-75; esso consta di un oscillatore ad onda triangolare O, la cui tensione e_3 è confrontata con l'uscita e_2 di un integratore; all'ingresso dell'integratore è applicata, oltre al segnale X, una tensione continua $e_1 = \pm E$, di ampiezza costante e segno variabile a seconda della posizione del commutatore S_1.

Il comparatore impone, con la commutazione di S_1, la relazione (fig. 5-76):

$$\frac{X}{R_1} + \frac{E}{R_2}\,\frac{T_1 - T_2}{T} = 0$$

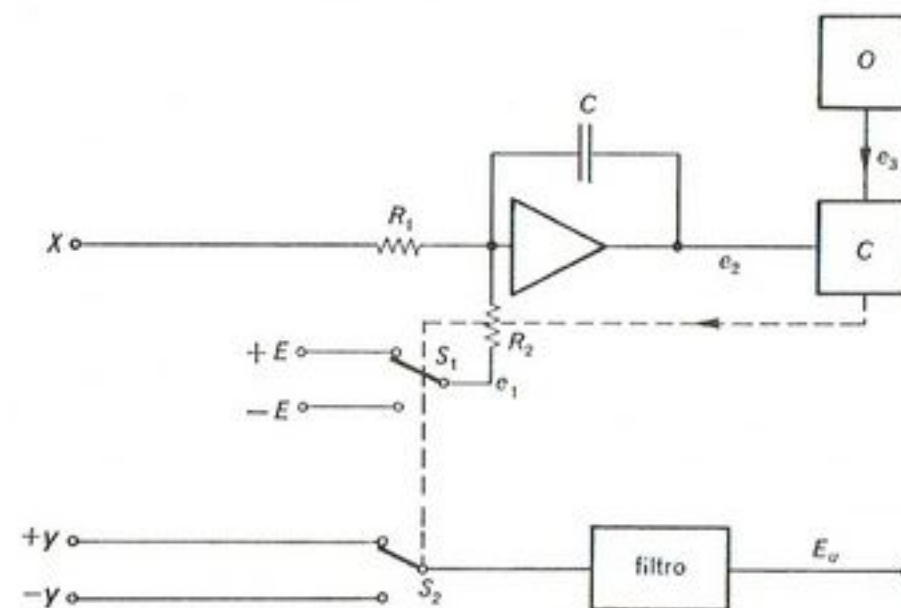



Fig. 5-75

con la contemporanea commutazione di S_2 fra $\pm Y$, si ottiene in uscita una tensione di valore medio:

$$E_u = Y(T_1 - T_2)/T = -XYR_2/R_1E$$

la cui precisione è legata alla costanza della tensione di riferimento E, ad un rapporto di resistenze (che consente cambiamenti di portata) ma non all'ampiezza né alla frequenza della tensione e_3.

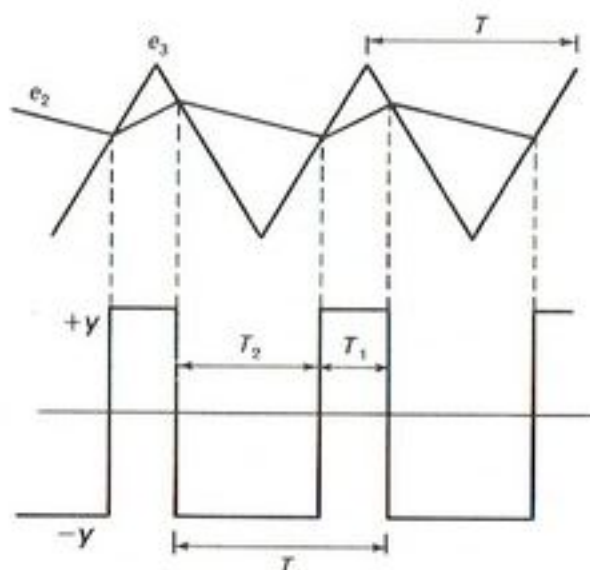



Fig. 5-76

Se il tempo di misura T è sufficientemente piccolo, si possono campionare grandezze variabili nel tempo ed ottenere in uscita, attraverso opportuno filtraggio, il valor medio nel tempo del loro prodotto.

5-6. Sensori e trasduttori per grandezze non elettriche.

5-6,1. *Sensori di grandezze non elettriche.*

Gli strumenti descritti finora, che misurano grandezze elettriche, costituiscono solo una piccola parte dei possibili strumenti atti a misurare grandezze fisiche in generale (geometriche, meccaniche, termiche, chimiche, acustiche, ecc.).

Questi strumenti funzionano in base a principi diversi, riconducibili tuttavia, in linea di principio, ad una serie di operazioni ossia ad una catena di misura, anche nel caso in cui i segnali trasferiti non siano elettrici (ma costituiscano delle grandezze meccaniche, termiche, ecc.). Essi

possono spesso essere trattati nello stesso modo dei segnali elettrici, per ragioni di analogia, cosicché ad essi sono applicabili, pur con le dovute differenze di terminologia, i concetti generali visti al Capitolo I e al par. 5-1.

Ogni trasduttore rappresenta infatti un sistema con grandezze fisiche d'ingresso e di uscita, legate fra loro da un insieme di relazioni, derivate, in genere, dal principio di continuità e da quello di conservazione dell'energia.

In molti casi, le relazioni fra le grandezze di entrata e di uscita possono essere scritte come sistemi lineari nei quali si mettono in evidenza delle grandezze fisiche (X e Y) che rispondano ai seguenti principi:

– le variazioni di energia (e quindi le potenze) sono proporzionali al prodotto XY (come, in termini elettrici, è $P = VI$);

– per ogni percorso chiuso è $\Sigma X = 0$ (analogo del secondo principio di Kirchhoff per le differenze di potenziale);

– per ogni superficie chiusa è $\Sigma Y = 0$ (analogo del primo principio di Kirchhoff).

Alcuni esempi di queste grandezze, analoghe rispettivamente alle tensioni e alle correnti elettriche, sono, in campo meccanico, la velocità e la forza (o la velocità angolare e la coppia); in campo termico, le differenze di temperatura ed il flusso di calore; nel caso di fluidi, la pressione e la portata, ecc.

Molte delle operazioni hanno come uscita una grandezza elettrica, che consente una facile manipolazione successiva, anche a distanza, ed una traduzione nel valore finale di misura, in modo semplice ed economico, con uno dei tanti apparecchi visti nei paragrafi precedenti. L'organo che esegue questa trasformazione è molto spesso il primo elemento della catena di misura o *sensore* della grandezza da misurare, che viene collocato nel punto in cui si vuole eseguire la misura.

A questo primo elemento può far seguito un trasduttore, che converte la grandezza d'uscita del sensore in una grandezza diversa. Più in generale, mentre i sensori hanno tecniche e problemi particolari, si può dire oggi che molti trasduttori rientrano nelle apparecchiature di condizionamento dei segnali di misura, viste in 4-7.

5-6,2. *Classificazione dei sensori.*

Fra i sensori che misurano grandezze non elettriche, trasformandole direttamente in grandezze elettriche, si possono distinguere due tipi fondamentalmente diversi:

1) i sensori *attivi*, che hanno in uscita un segnale elettrico attivo (tensione o corrente) prodotto mediante un'opportuna trasformazione di energia (meccanica, termica, luminosa, ecc.);

2) i sensori *passivi*, in cui la grandezza da misurare influenza una grandezza elettrica passiva (resistenza, capacità, auto o mutua induttanza) alimentata da sorgenti esterne.

I sensori di questo secondo tipo possono funzionare secondo principi fisici diversi, che sfruttano la dipendenza della grandezza elettrica da altre grandezze fisiche (p. es. variabilità di una resistenza con la temperatura). Esiste però una classe molto numerosa di questi sensori che trasforma uno spostamento (o deformazione) nella variazione di una grandezza elettrica passiva. Questi sensori sono importanti perché, essendo lo spostamento uno dei mezzi di visualizzazione più semplici ed immediati, esistono numerosi strumenti che trasformano altre grandezze fisiche in uno spostamento.

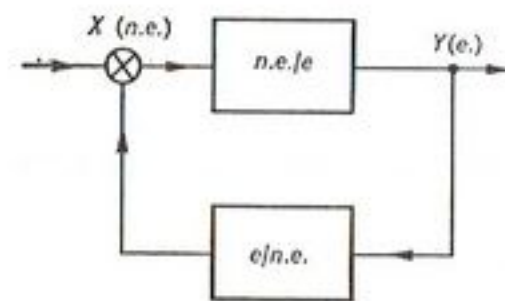



Fig. 5-77

Accanto ai trasduttori che hanno in ingresso una grandezza non elettrica ed in uscita un segnale elettrico, occorrerebbe considerare anche quelli che compiono la trasformazione inversa. Essi possono infatti essere utilizzati in sistemi a retroazione (fig. 5-77) manuale o, più spesso, automatica.

5-6,3. *Schemi equivalenti dei sensori attivi*.

Un sensore attivo può in generale ricondursi ad uno schema equivalente del tipo di fig. 5-78, cioè ad un generatore equivalente di tensione (o al suo duale di corrente fig. 5-79). La *f.e.m. a vuoto E* è funzione (non sempre lineare), della grandezza x da misurare:

$$E = f(x)$$

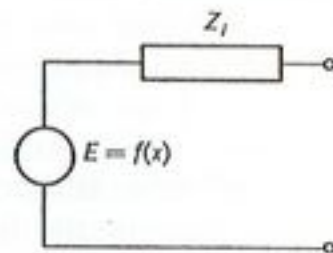



Fig. 5-78

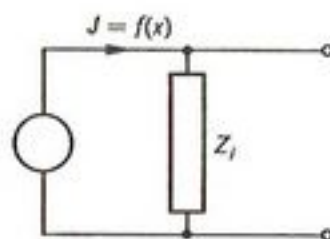



Fig. 5-79

tale tuttavia da risultare nulla quando x è nulla, proprio perché essa deriva da relazioni energetiche.

La misura della tensione ai morsetti del generatore equivalente può presentare difficoltà sia per i valori assoluti delle f.e.m., che — se troppo piccoli — possono risentire di disturbi o rumori di fondo, sia per la presenza dell'impedenza interna Z_i, spesso non costante al variare della stessa x.

5-6,4. *Coppie termoelettriche*.

Le coppie termoelettriche (o termocoppie) sfruttano la f.e.m. che si verifica in un circuito costituito da metalli diversi, quando i loro punti di giunzione si trovano a temperature differenti (effetto Seebeck).

Una coppia di metalli può essere impiegata per realizzare una termocoppia se essa produce una f.e.m. di valore sufficientemente elevato e stabile nel tempo. Le coppie più usate sono: rame (o ferro), costantana o leghe speciali (Chromel-Alumel) che hanno f.e.m. intorno ai 50 μV/K e campo d'impiego fra — 250 e 1000 °C. Per misure di precisione si impiegano coppie al platino-platino rodio. La sensibilità può essere aumentata montando più termocoppie in serie.

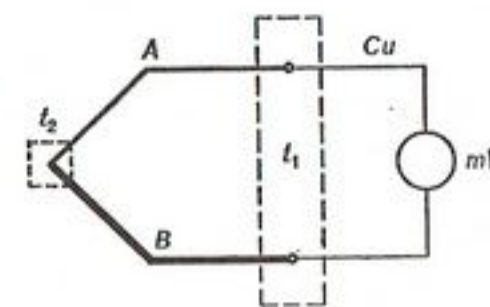



Fig. 5-80

Occorre tener presente che la f.e.m. è funzione (non lineare) della differenza di temperatura fra le due giunzioni dei materiali considerati; occorre perciò sempre conoscere la temperatura della giunzione « fredda » per risalire, dal valore della f.e.m., a quella della giunzione « calda ». I conduttori, di materiale diverso, presenti nel circuito, non influenzano la misura se le rispettive giunzioni sono isoterme (fig. 5-80). Se non è possibile realiz-

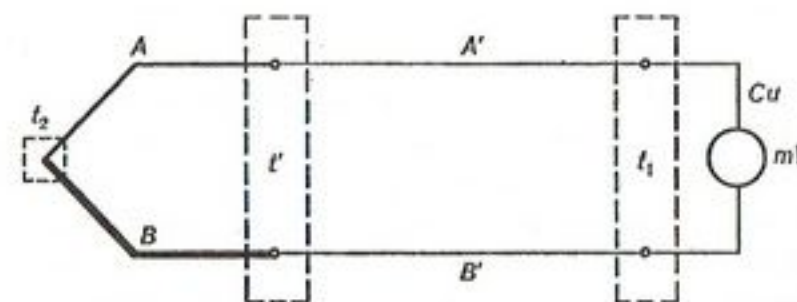



Fig. 5-81

zare i collegamenti alla temperatura di riferimento, si devono inserire conduttori di materiale opportuno che compensino le loro f.e.m. termoelettriche (fig. 5-81) e consentano di riferirsi sempre alla temperatura t_1 come giunzione fredda.

5-6,5. *Generatori tachimetrici.*

Sono trasduttori che convertono la velocità di rotazione di un organo rotante in una f.e.m. (continua o alternata) di valore proporzionale alla velocità stessa. Essi consistono essenzialmente in dinamo o alternatori ad eccitazione costante, del tipo a magnete permanente; nei generatori in c.a., anche la frequenza è univocamente legata, tramite il numero dei poli, alla velocità di rotazione.

Le dinamo tachimetriche hanno il vantaggio di consentire la misura della f.e.m. — che è generalmente dell'ordine di alcuni volt — mediante strumenti a basso consumo; sono perciò ridotti gli errori dovuti alle cadute di tensione per reazione d'indotto o per resistenza interna o dei collegamenti. Per contro, la presenza del collettore, necessariamente con un numero limitato di lamelle, comporta, oltre a problemi di manutenzione, la presenza di una componente alternativa, di variazioni nella f.e.m. dovute all'usura o alle vibrazioni delle spazzole, ecc. Esistono generatori tachimetrici omopolari che evitano in parte questi inconvenienti, ma che possono fornire solo tensioni molto modeste.

I generatori tachimetrici in c.a. sono più semplici e robusti, perché evitano avvolgimenti rotanti; la loro tensione d'uscita — generalmente dell'ordine di alcuni volt — è però più sensibile agli effetti del carico, per la presenza di un'elevata reazione d'indotto. Poiché il variare della tensione è accompagnato da un'analoga variazione della sua frequenza, di ciò va tenuto conto nella scelta degli strumenti su cui si chiude il generatore.

5-6,6. *Sensori foto-elettrici.*

Nella zona di contatto fra due metalli o, meglio, fra un metallo e un semiconduttore, può presentarsi, per effetto di un'energia luminosa incidente, una differenza di potenziale.

Le cellule fotoelettriche (ad ossido di rame o al selenio) sono formate da uno strato metallico molto sottile e trasparente, depositato sul semiconduttore; sono in genere assimilabili a generatori di corrente, con costanti di tempo non trascurabili e mediocri dosi di stabilità.

Più recentemente, sono stati impiegati fotodiodi al germanio o silicio opportunamente drogati, che generano una corrente di parecchi μA per mW di luce incidente e che hanno dimensioni ridotte e costanti di tempo dell'ordine dei 10^{-8} s. Le loro caratteristiche variano tuttavia notevolmente con la temperatura; inoltre, per una buona linearità, essi devono avere delle f.e.m. di polarizzazione.

La disponibilità di sensori fotoelettrici rende possibili collegamenti puramente ottici fra apparecchiature di misura, sfruttando sorgenti comandabili elettricamente (diodi emettitori di luce o laser). La trasmissione dei segnali può avvenire in questi casi anche attraverso fibre ottiche o guide di luce.

5-6,7. *Sensori piezoelettrici.*

Sulle facce dei cristalli di alcuni materiali dielettrici, sottoposti ad azione meccanica, compaiono cariche elettriche; il materiale più usato è il quarzo, tagliato in opportune direzioni, in modo da essere sensibile a sforzi o di compressione o di taglio.

Le cariche elettriche (dell'ordine dei pC/N) producono, sulla capacità propria del cristallo e sulle eventuali capacità in parallelo, delle tensioni, misurabili con sistemi ad alta impedenza.

5-7. **Principi per la misura elettrica di grandezze non elettriche.**

5-7,1. *Schemi equivalenti per trasduttori passivi.*

Si consideri una grandezza elettrica — per semplicità una resistenza R — il cui valore sia funzione di un'altra grandezza non elettrica x; il caso più semplice si verifica quando la relazione:

$$R = f(x) \qquad [5\text{-}25]$$

si traduce in una legge di proporzionalità diretta ($R = kx$) o che possa facilmente ricondursi a questa. In molti casi, invece, la grandezza x ha solo una influenza secondaria sulla R, per cui si può scrivere:

$$R = R_0(1 + a(x - x_0) + \ldots) \qquad [5\text{-}26]$$

che altro non è che uno sviluppo in serie della [5-25], intorno al punto $R(x_0)$, sviluppo che può essere arrestato ai primi termini, proprio perché essi sono piccoli rispetto all'unità.

In questo caso, una volta fissata convenientemente la condizione di riferimento x_0, si può scrivere:

$$\Delta R = k\,\Delta x\,. \qquad [5\text{-}27]$$

È evidente che la [5-27] richiede la misura corretta delle *variazioni* della grandezza elettrica, più che dei suoi valori assoluti; ne consegue che dovranno essere usati metodi (di confronto o differenziali), con elevate qualità di sensibilità e di risoluzione. In questi casi, inoltre, occorre tener accuratamente in conto le altre grandezze d'influenza che possono introdurre sulla R variazioni non desiderate, talvolta dello stesso ordine di grandezza di quelle che si vogliono misurare.

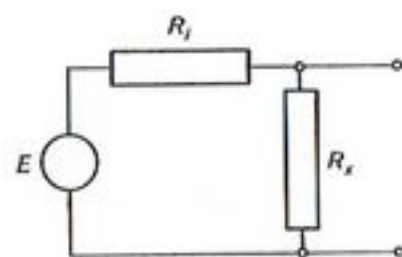



Fig. 5-82

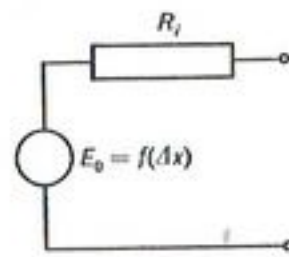



Fig. 5-83

In ogni caso, il sistema richiede una sorgente ausiliaria di f.e.m. E (o di corrente) dando luogo ad uno schema equivalente del tipo di fig. 5-82. Se il circuito è disposto in modo da fornire un'uscita nulla per determinate condizioni di riferimento x_0, ci si può ricondurre allo schema equivalente di fig. 5-83, in cui sia:

$$E_0 = Ef(\Delta x)$$

ma la f.e.m. E_0 risulta direttamente legata al valore della sorgente ausiliaria di f.e.m. E.

5-7,2. *Conversione temperatura-resistenza.*

È noto che la resistenza di un conduttore metallico varia con la temperatura: questa proprietà può essere sfruttata per sensori di temperatura costituiti da un semplice filo metallico.

I metalli più usati sono il platino, il nichel e il rame, che possono essere ottenuti con elevato grado di purezza e quindi di stabilità e riproducibilità. Per misure di precisione è preferito il platino, le cui caratteristiche, determinate con riferimento ai punti fissi, si mantengono pressoché lineari in un ampio campo di valori (fino a circa 600 °C). Particolare cura deve essere posta nel montaggio e nell'uso, per evitare contaminazioni e incrudimenti del metallo, che ne altererebbero la taratura. Le dimensioni e il montaggio determinano le condizioni di trasmissione e accumulo di calore e perciò la costante di tempo del sensore.

Il rame e il nichel, meno costosi, hanno variazioni relative più elevate del platino, ma un campo di funzionamento lineare più ridotto.

Mediante materiali semiconduttori con un alto coefficiente (negativo) di temperatura (termistori), o meglio governati da leggi del tipo:

$$R = ae^{b/T}$$

si possono realizzare elementi di grande sensibilità e piccole costanti di tempo. I procedimenti di invecchiamento artificiale consentono di ottenere elementi stabili, ma di taratura singola, perché difficilmente riproducibili, aventi resistività elevate ($1 \div 10^3$ Ωm).

5-7,3. *Conversione deformazione-resistenza.*

Un filo di materiale conduttore varia la sua resistenza elettrica R se, a causa di una sollecitazione, varia la sua lunghezza L, secondo la relazione:

$$\frac{\Delta R}{R} = k\frac{\Delta L}{L};$$

il fattore k può essere dell'ordine di 1 a 2 se non intervengono nella deformazione del filo cambiamenti di struttura, raggiunge valori da 3 a 5 in alcune leghe particolari. Si sono anche realizzati estensimetri a strato o a semiconduttore, con valori cento volte maggiori di k.

La variazione relativa di lunghezza è limitata dalle caratteristiche meccaniche del filo a qualche 10^{-3}: le variazioni di resistenza devono perciò essere misurate con metodi ad elevata sensibilità, evitando differenze di temperatura anche dell'ordine del grado, che possono dare variazioni dello stesso ordine di grandezza di quelle da misurare.

L'uso di questi estensimetri è molto diffuso, per le loro doti di semplicità e rapidità di risposta; la loro applicazione deve tuttavia essere molto curata (supporto, collante, condizioni atmosferiche, invecchiamento) per ottenere buoni risultati.

5-7,4. *Conversione intensità luminosa-resistenza.*

La resistenza di uno strato semiconduttore (Se, CdS, ecc.) varia con l'illuminamento cui esso è sottoposto con relazione di tipo esponenziale; si possono ottenere elementi sensibili, specie per il campo dell'infrarosso, con disposizioni del tipo di fig. 5-84.

Molto più usati, in vari campi, sono oggi i fotomoltiplicatori (fig. 5-85); si ha emissione di elettroni in un tubo a vuoto se il suo catodo metallico è colpito da una radiazione luminosa con energia dei fotoni superiore a

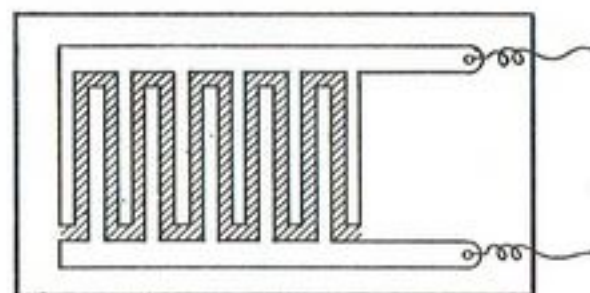



Fig. 5-84

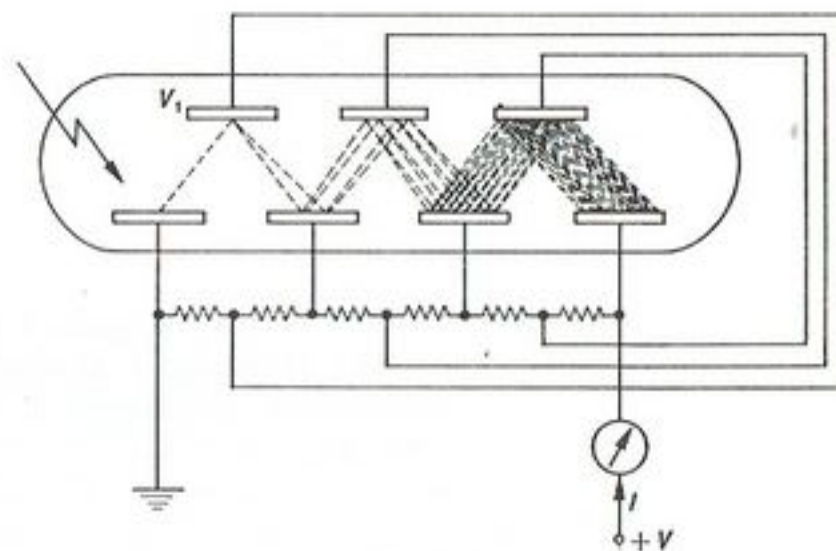



Fig. 5-85

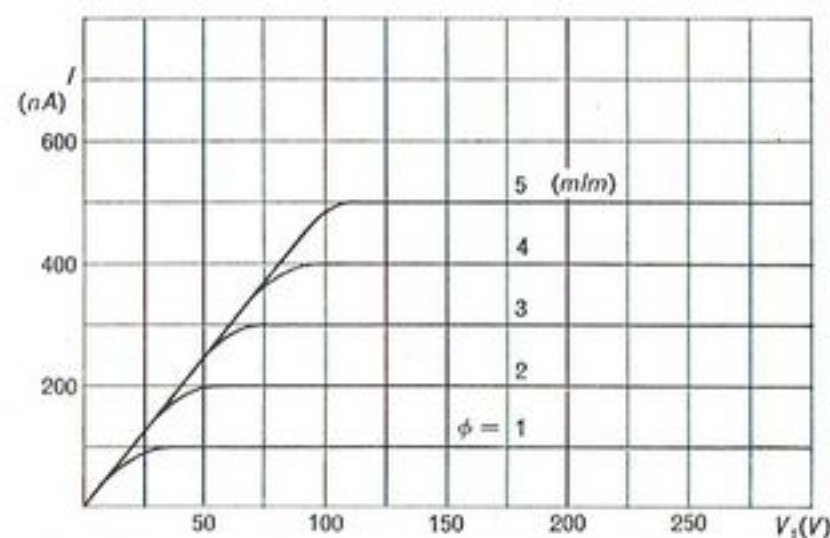



Fig. 5-86

quella di estrazione degli elettroni dal metallo. Gli elettroni, accelerati dal primo anodo, vi liberano numerosi elettroni secondari ed il fenomeno si può ripetere, esaltandolo.

I fotomoltiplicatori hanno funzionamento molto stabile e sicuro, elevata sensibilità, risposta in tempi dell'ordine di 10^{-8} s, il che li rende adatti a numerosi impieghi. Poiché la loro caratteristica, in funzione delle tensioni anodiche, presenta una zona di saturazione (fig. 5-86) il segnale di corrente d'uscita può esser reso pressoché indipendente dalla tensione, venendo a costituire un vero e proprio generatore di corrente.

5-7,5. *Rivelatori di spostamento resistivi o capacitivi.*

Il trasduttore più semplice spostamento-resistenza è costituito da un resistore a potenziometro, con un cursore mobile, con moto lineare o rotatorio; con opportuni artifici costruttivi la relazione fra posizione del cursore e resistenza può essere di vario tipo (p. es. sinusoidale, logaritmica, ecc.).

Si usano prevalentemente potenziometri a filo metallico, avvolto in più spire, su supporto isolante, in modo da avere lunghezza e diametro del filo adeguati allo smaltimento termico. Per evitare errori di linearità nel passaggio fra spire, si costruiscono cursori a moto elicoidale.

Il contatto strisciante, con le sue variazioni di resistenza, e le altre cause di discontinuità danno origine, durante il movimento, ad un rumore di fondo che limita la velocità di spostamento del cursore.

I trasduttori a variazione di capacità possono agire sia per variazione delle superfici di due elettrodi affacciati che per variazione della loro distanza, più raramente per spostamento di un materiale ad alta costante dielettrica. Essi presentano in genere una impedenza di uscita elevata e sono sensibili ai disturbi esterni; consentono tuttavia, se ben realizzati, di misurare spostamenti anche molto piccoli, con elevata rapidità di risposta.

5-7,6. *Trasduttori induttivi di spostamento.*

L'induttanza di una bobina può essere variata spostando nel suo interno un nucleo magnetico (fig. 5-87); più sensibile è una disposizione a circuito magnetico pressoché chiuso, in cui si variano le dimensioni del traferro (fig. 5-88).

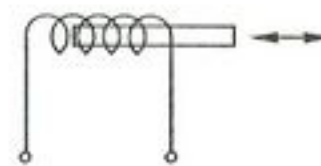



Fig. 5-87

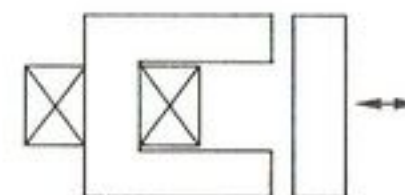



Fig. 5-88

Più comuni sono i trasduttori in cui lo spostamento, lineare o circolare, della parte mobile dà luogo ad una variazione di mutua induttanza; essi assumono rispettivamente la forma di un trasformatore ad accoppiamento variabile o di una macchina elettrica trifase (sincro).

Il trasformatore ad accoppiamento variabile (fig. 5-89) si presta bene a schemi di misura differenziali (fig. 5-90). Limitando lo spostamento del nucleo, si possono avere buone caratteristiche di linearità e risoluzione; occorre invece qualche attenzione per eliminare le tensioni residue che si presentano, per accoppiamento capacitivo o per altre cause, anche in condizioni di simmetria.

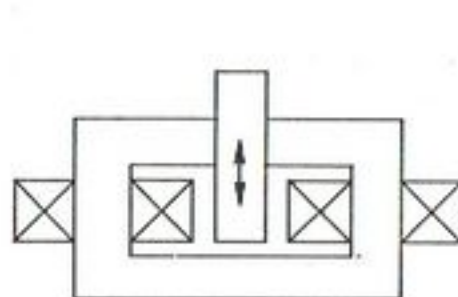
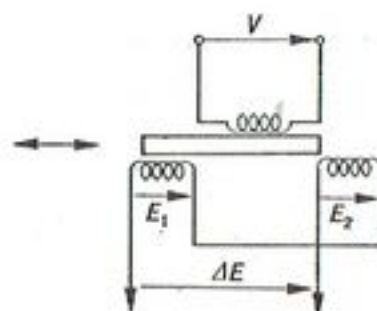



Fig. 5-89 Fig. 5-90

Il sincro (fig. 5-91) ha tre avvolgimenti statorici uguali, disposti a 120° fra loro, ed un avvolgimento rotorico; quando questo è alimentato da una sorgente di f.e.m., si inducono negli avvolgimenti statorici tre f.e.m. della stessa frequenza, ma di valore diverso, in dipendenza del diverso accoppiamento con il rotore. La terna di valori delle f.e.m. statoriche risulta quindi una funzione della posizione angolare del rotore. Per la misura, si collegano questi avvolgimenti statorici con quelli di un secondo

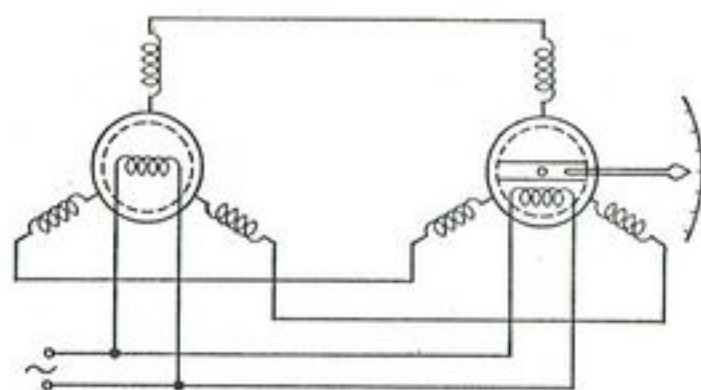



Fig. 5-91

sincro, identico al precedente; si crea in esso un flusso che ha, rispetto agli avvolgimenti statorici, la stessa posizione angolare. Se l'avvolgimento rotorico del secondo sincro è aperto, si misura su di esso una f.e.m. proporzionale al coseno dell'angolo esistente fra gli assi rotorici. Se i due avvolgimenti rotorici sono invece alimentati in parallelo, i due rotori assumono la stessa posizione.

Capitolo VI

MISURE SU CIRCUITI A REGIME

6-1. Fondamenti generali. Circuiti in corrente continua.

6-1,1. *Sezione di misura.*

Per lo studio dei metodi di misura, che impiegano i principi e gli apparecchi descritti nei precedenti capitoli, considereremo innanzitutto il problema della misura delle grandezze elettriche (tensioni, potenze, ecc.) di circuiti, o più in generale di sistemi elettrici, funzionanti in condizioni di regime, mediante l'inserzione di strumenti indicatori.

In pratica, queste misure vengono effettuate in vista di specifiche esigenze o finalità e, come tali, possono richiedere particolari cautele o modalità di esecuzione. Riservando qualche caso particolare alle applicazioni, considereremo innanzitutto il problema generale della misura della potenza trasmessa tra due distinte parti di un sistema, attraverso la sezione in cui sono inseriti gli strumenti (sezione di misura); supporremo perciò di poter individuare i collegamenti che rappresentano l'unico legame fra le due parti del sistema, l'una delle quali assorbe potenza dall'altra.

Dovremo perciò stabilire quali siano le misure necessarie e sufficienti a determinare, oltre al valore della potenza trasmessa, le condizioni di tensione, corrente, fattore di potenza ecc., sotto cui si effettua tale trasferimento, mostrando anche come si deducano, dai valori misurati, le altre grandezze elettriche (resistenza, reattanza, impedenza ecc.) dei bipoli — o in generale degli m-poli — che fanno capo ai morsetti della sezione di misura.

I valori, così ottenuti, di queste grandezze comprendono in generale, oltre agli errori propri degli strumenti impiegati, anche gli effetti delle

diverse grandezze d'influenza sul circuito oggetto della misura (come ad esempio il suo riscaldamento, la presenza di armoniche ecc.); benché essi non siano sempre nettamente separabili dagli errori strumentali, ci limiteremo in seguito a considerare solo l'influenza di questi.

6-1,2. *Misura su un bipolo in corrente continua.*

La misura delle grandezze elettriche di un bipolo passivo U, in regime continuo stazionario, si può eseguire mediante due soli strumenti, un voltmetro ed un amperometro (fig. 6-1) inseriti in modo da misurare rispettivamente la tensione V fra i morsetti 1, 1′ del bipolo e la corrente I entrante in esso.

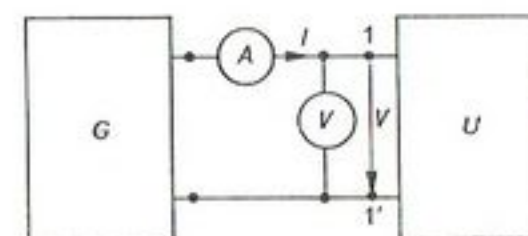



Fig. 6-1

Supposti nulli i consumi degli strumenti (vedi 6-1,3) ed i loro errori d'indicazione, dalle due grandezze misurate si ottiene sia il valore della potenza che attraversa la sezione di misura:

$$P = VI \qquad [6\text{-}1]$$

sia il valore della resistenza equivalente del bipolo:

$$R = \frac{V}{I}. \qquad [6\text{-}2]$$

Questa resistenza, che può essere in generale funzione dei valori di tensione o di corrente, rappresenta, come è noto, la resistenza equivalente del bipolo ai fini del suo comportamento ai morsetti della sezione di misura, indipendentemente dalla reale costituzione interna del bipolo stesso.

Lo stesso schema serve a misurare la potenza fornita dal bipolo attivo G, ma non può definire completamente i due parametri (p. es. f.e.m. a vuoto e resistenza interna), se non in condizioni di linearità, ripetendo le misure in due diverse condizioni di carico.

6-1,3. *Correzioni per i consumi strumentali.*

Nello schema di fig. 6-2, la tensione V indicata dal voltmetro differisce dalla tensione V_R, esistente sulla resistenza R, per la caduta di tensione sull'amperometro, provocata dal passaggio della corrente I nella sua resistenza interna R_A; è perciò:

$$V_R = V - V_A = V - R_A I. \qquad [6\text{-}3]$$

Non tenendo conto di tale caduta, la misura della tensione risulterebbe affetta da un errore relativo in più:

$$e_V = \frac{V - V_R}{V_R} = \frac{V_A}{V_R} = \frac{R_A}{R}; \qquad [6\text{-}4]$$

lo stesso errore relativo in più si commette nella determinazione della potenza e della resistenza.

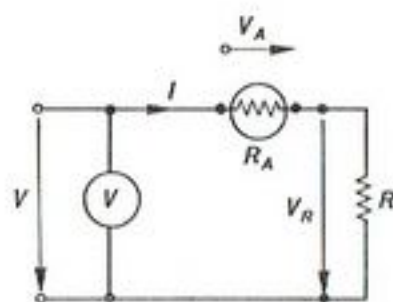



Fig. 6-2

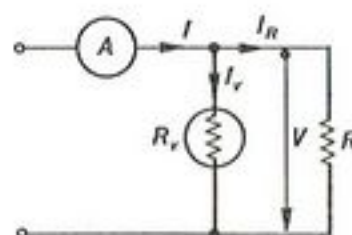



Fig. 6-3

Nella inserzione di fig. 6-3 il voltmetro misura la tensione ai morsetti della resistenza R, mentre la corrente I indicata dall'amperometro comprende, oltre alla corrente I_R che percorre R, la corrente I_V assorbita dal voltmetro, di resistenza interna R_V; è quindi:

$$I_R = I - I_V = I - \frac{V}{R_V}. \qquad [6\text{-}5]$$

Non tenendo conto della corrente I_V, si commette sulla misura della corrente, l'errore relativo in più:

$$e_I = \frac{I - I_R}{I_R} = \frac{I_V}{I_R} = \frac{R}{R_V}; \qquad [6\text{-}6]$$

lo stesso errore relativo si trasporta nella determinazione della potenza, con lo stesso segno, nella determinazione della resistenza equivalente, con il segno cambiato.

La correzione si esegue, conoscendo i consumi propri degli strumenti impiegati, mediante la [6-3] o la [6-5], a seconda dello schema usato; essa è necessaria quando l'errore relativo conseguente sia sensibile rispetto agli errori propri degli strumenti. Le [6-4] e [6-6] servono anche a valutare quale sia lo schema da preferirsi, nei singoli casi; si adotta infatti lo schema che dà il minor errore relativo, ossia la correzione minore [1]. Si tenga però presente che la resistenza di un circuito voltmetrico è, in genere, più facilmente nota e più costante che non quella di un circuito amperometrico.

La correzione dei consumi elimina solo l'errore d'indicazione degli strumenti dovuto ai consumi stessi; essa non può evidentemente tener conto di quali sarebbero i valori di tensione e di corrente che si sarebbero misurati se entrambi gli strumenti fossero privi di consumo, poiché non può eliminare, per esempio, la caduta di tensione che la corrente voltmetrica produce nel circuito a monte, caduta di tensione che esiste anche nell'inserzione di fig. 6-2.

6-1,4. *Errori strumentali.*

I valori di tensione e di corrente, letti sugli strumenti, anche se corretti dei consumi, sono sempre affetti dagli errori propri degli strumenti stessi.

Questi errori vengono a combinarsi, sommando le relative fascie di incertezza, nella determinazione dei valori della potenza e della resistenza.

Ripetendo più letture, in condizioni equivalenti, in più punti della scala, si può ridurre — facendo la media dei risultati — l'influenza di quella parte dell'errore strumentale che si presenta di natura fortuita (p. es. errori di lettura, di attrito, di irregolarità sulla scala). La parte sistematica dell'errore strumentale può essere ridotta od eliminata solo attraverso la taratura dello strumento nelle effettive condizioni di impiego.

6-1,5. *Misura delle piccole resistenze.*

Nella misura di resistenze inferiori all'ohm può essere rilevante l'errore dovuto alle resistenze di contatto (2-3,2); occorre pertanto far ricorso, in questi casi, ad una disposizione a quattro morsetti (fig. 6-4) collegando i morsetti voltmetrici internamente, rispetto a quelli amperometrici.

---

[1] L'incertezza del termine correttivo non è quasi mai inferiore a qualche percento, non tanto per l'incertezza dei valori misurati, quanto per quella delle resistenze proprie degli strumenti, che possono differire dai valori nominali, indicati dal costruttore. Ciò non ha importanza quando la correzione sia dell'ordine di grandezza degli errori strumentali; se è invece di ordine di grandezza maggiore, può influire sull'incertezza totale del risultato. In alcuni casi, può essere opportuno misurare direttamente il consumo, nelle condizioni d'impiego.

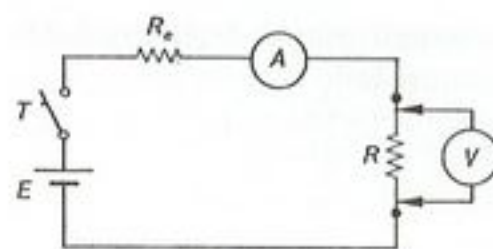



Fig. 6-4

Le resistenze di contatto dei morsetti voltmetrici hanno un effetto tanto minore quanto più elevata è la resistenza del circuito voltmetrico.

Spesso ad un basso valore della resistenza si associa un'elevata induttanza (è il caso, ad esempio, degli avvolgimenti delle macchine elettriche). In questo caso, occorre tener presente il comportamento del circuito durante i transitori d'inserzione o disinserzione. Ai fini dell'incolumità degli strumenti, il voltmetro deve essere staccato dal circuito alla chiusura e soprattutto all'apertura dell'interruttore T, allo scopo di evitare di danneggiarlo per effetto delle sovratensioni che si presentano sull'induttanza.

Agli effetti della precisione della misura, la lettura degli strumenti va eseguita in condizioni di regime, ossia quando sia stabile la lettura, soprattutto del voltmetro. Per diminuire l'attesa, si può diminuire la costante di tempo del circuito, impiegando valori più elevati di resistenza esterna e corrispondentemente di f.e.m.

Il circuito deve in ogni caso essere eseguito con cura al fine di evitare brusche variazioni di resistenza durante il suo funzionamento (dovute per es. a contatti incerti, riscaldamento, ecc.); queste variazioni si ripercuotono infatti amplificate sulle indicazioni del voltmetro.

6-1,6. *Misura di grandi resistenze.*

Nella misura di resistenze superiori al megaohm, può essere rilevante l'errore dovuto alle resistenze di dispersione (2-3,3); oltre ad utilizzare schemi del tipo di fig. 6-2, è necessario prevedere un'adeguata schermatura, che eviti il passaggio, attraverso l'amperometro, della corrente I' che percorre le resistenze di dispersione (fig. 6-5).

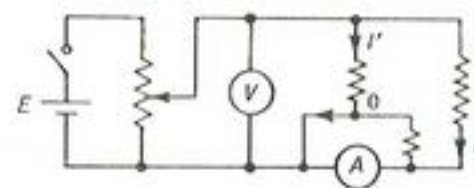



Fig. 6-5

La realizzazione dello schermo O, in cui confluiscono le correnti di dispersione, è diversa a seconda della disposizione e natura dell'oggetto in prova.

Le resistenze di valore elevato si presentano spesso con una capacità in parallelo; in questo caso occorre quindi limitare i transitori di corrente che, soprattutto all'inserzione, potrebbero danneggiare l'amperometro, sia cortocircuitandolo, sia regolando gradualmente la tensione di alimentazione.

6-2. **Misure di potenza su circuiti in corrente alternata monofase.**

6-2,1. *Misura delle grandezze di un bipolo.*

Ogni sezione di misura, in un circuito monofase in corrente alternata sinusoidale, è caratterizzata da tre valori: la tensione fra i conduttori, la corrente attraverso di essi, lo sfasamento fra queste due grandezze.

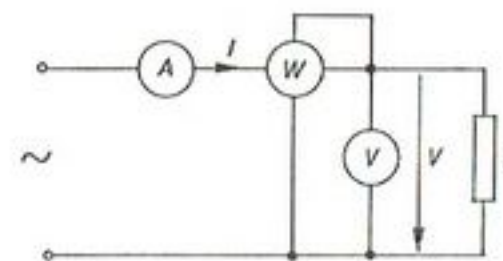



Fig. 6-6

Per individuare queste tre grandezze occorre l'impiego di tre strumenti, che sono usualmente un amperometro, un voltmetro, e un wattmetro (fig. 6-6). Dalle loro letture, I, V e P si ricavano anche:

$$Q = \sqrt{(VI)^2 - P^2} \quad \text{potenza reattiva} \quad [6\text{-}7]$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{VI} \quad \text{fattore di potenza} \quad [6\text{-}8]$$

$$Z = \frac{V}{I} \quad \text{impedenza equivalente.} \quad [6\text{-}9]$$

Di questa impedenza si possono calcolare le componenti, reale e reattiva, per uno schema equivalente in serie (fig. 6-7 *a*) o in parallelo (fig. 6-7 *b*).

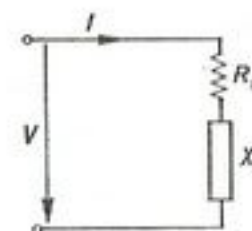
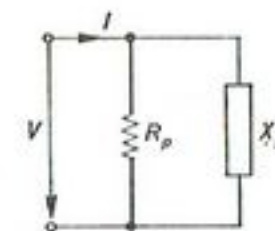



Fig. 6-7 *a* Fig. 6-7 *b*

6-2,2. *Determinazione del segno della potenza reattiva.*

Nelle relazioni del precedente paragrafo rimane indeterminato il segno da attribuire alla potenza reattiva; ad esso si può risalire mediante artifici diversi, fra i quali segnaliamo i seguenti:

a) In circuiti a bassa tensione, con correnti modeste, è possibile inserire, in parallelo al carico (fig. 6-8), un condensatore che assorba una potenza reattiva dello stesso ordine di grandezza di quella del carico; se questo è di tipo induttivo si ha allora una compensazione, indicata da una diminuzione nel valore della corrente totale; se è capacitivo, aumenta la potenza apparente e con essa l'indicazione dell'amperometro.

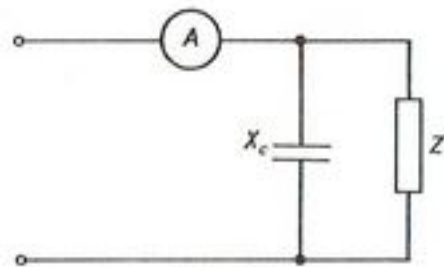



Fig. 6-8

b) Quando sia possibile modificare la frequenza di alimentazione, si può riconoscere il segno della reattanza equivalente del carico perché essa — al crescere della frequenza — aumenta, in valore assoluto, se è induttiva e diminuisce se capacitiva.

c) Qualora non sia possibile, o conveniente, modificare il funzionamento del circuito in esame, si dispone, in serie alla resistenza R del circuito voltmetrico del wattmetro, una reattanza magnetica X, di valore intorno al $10 \div 20\%$ di R. Si viene così a introdurre un errore di fase (vedi 3-4,5):

$$\eta = \frac{X}{R} \operatorname{tang} \varphi \qquad [6\text{-}10]$$

il cui segno dipende dal segno della potenza reattiva; in particolare, l'indicazione del wattmetro aumenta se il carico è induttivo, diminuisce se è capacitivo.

Questo principio può cadere in difetto se l'angolo φ è piccolo, cioè se $\operatorname{tang}\varphi$ è confrontabile con X/R, perché non sono più valide le semplificazioni che consentono di scrivere la [6-10].

6-2,3. *Correzioni per i consumi strumentali.*

In analogia con quanto avviene per misure in c.c., quando si impiega lo schema di fig. 6-6, con le bobine voltmetriche a valle delle amperometriche, occorre tener conto dei consumi esistenti nei circuiti voltmetrici; se si utilizza lo schema di fig. 6-9, occorre invece tener conto dei consumi dei circuiti amperometrici.

Le relazioni che si possono scrivere per le tensioni e correnti presenti nel circuito sono tutte relazioni vettoriali, che non possono essere risolte dalla

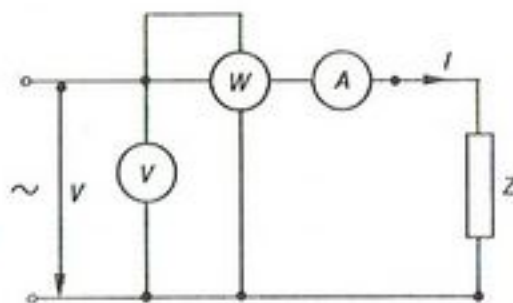



Fig. 6-9

conoscenza dei soli moduli delle varie grandezze interessate, letti sugli strumenti. Conviene pertanto utilizzare le relazioni algebriche che esistono, in base al principio di conservazione delle potenze complesse, fra i valori sia delle potenze attive che di quelle reattive.

Siano allora V, I, P, Q le grandezze risultanti dalle misure, V_z, I_z, P_z e Q_z quelli esistenti sul carico; nel caso di fig. 6-6, l'insieme dei due circuiti voltmetrici di resistenza R_W e R_V fra loro in parallelo, può essere rappresentato da una resistenza equivalente R_e, che potremo supporre pura, tale cioè da assorbire solo potenza attiva (fig. 6-10). Si ha anche:

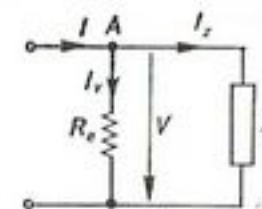



Fig. 6-10

$$V = V_z .$$

Per la conservazione delle potenze attive entranti nel nodo A, si avrà:

$$P = P_z + \frac{V^2}{R_e} ; \qquad [6\text{-}11]$$

per la conservazione delle potenze reattive:

$$Q^2 = (VI)^2 - P^2 = Q_z^2 = (V_z I_z)^2 - P_z^2 ; \qquad [6\text{-}12]$$

combinando la [6-12] con la [6-11] si ottiene la relazione:

$$I_z^2 = I^2 - \frac{P^2 - P_z^2}{V^2} = I^2 - \frac{P + P_z}{R_e} \qquad [6\text{-}13]$$

mediante la quale si può eseguire la correzione sul valore della corrente.

Questa correzione è sempre minore o tutt'al più uguale alla correzione algebrica:

$$I_v = \frac{V}{R_e} ;$$

infatti, in una prima approssimazione valida per correzioni piccole, si può porre:

$$P + P_z \simeq 2P = 2VI\cos\varphi$$

da cui si ottiene per la [6-13]:

$$e_I \simeq \frac{I - I_z}{I} \simeq 1 - \sqrt{1 - \frac{2V}{R_e I}\cos\varphi} \simeq \frac{I_v}{I}\cos\varphi$$

relazione che può risultare comoda per un calcolo preliminare approssimato dell'errore.

Nel caso di fig. 6-9, le bobine amperometriche presentano una resistenza

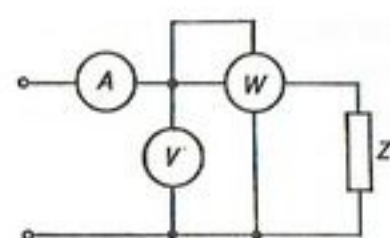



Fig. 6-11

complessiva R_a ed una reattanza complessiva X_a; è perciò:

$$P = P_z + R_a I^2 ; \qquad Q = Q_z + X_a I^2 ;$$
$$V_z^2 = \frac{P_z^2 + Q_z^2}{I^2} .$$

Delle correzioni per i consumi strumentali occorre tener conto, come già indicato in [6-13], quando esse siano comparabili con gli altri errori strumentali. Gli schemi che tengono separate le due amperometriche, o le due voltmetriche, come quello di fig. 6-11, sono in genere da evitarsi perché comportano una maggior complessità nel calcolo delle correzioni.

6-2,4. *Connessioni.*

Un wattmetro presenta due coppie di morsetti, l'una amperometrica — generalmente di maggiori dimensioni — da collegare in serie al circuito su cui si esegue la misura, l'altra, voltmetrica, da collegare in derivazione. Esistono però diverse possibilità di connessione, fra le quali occorre saper scegliere quella corretta, in base alle considerazioni seguenti:

a) la coppia motrice, direttamente proporzionale alla potenza, cambia segno se si invertono le connessioni amperometriche o quelle voltmetriche. Esiste perciò in ogni coppia un morsetto contrassegnato (generalmente con $\pm$) che indica la corrispondenza fra amperometrica e voltmetrica che porta la lettura nell'interno della scala (correnti I_f e I_m entrambi entranti od uscenti dai morsetti contrassegnati);

b) nei wattmetri elettrodinamici è opportuno che la bobina mobile (che fa direttamente capo al morsetto voltmetrico contrassegnato), sia praticamente allo stesso potenziale della bobina fissa per evitare effetti elettrostatici fra le bobine (correnti di capacità, coppie elettrostatiche) e, al limite, una scarica fra di esse;

c) il wattmetro è sempre affetto da errore di consumo; la connessione voltmetrica va perciò eseguita a monte o a valle dell'amperometrica a seconda dello schema scelto per le misure.

In conclusione, inserita l'amperometrica con il morsetto contrassegnato rivolto verso il generatore (fig. 6-12), l'analogo morsetto voltmetrico deve essere collegato con uno degli estremi dell'amperometrica, e precisamente al punto 1 se si preferisce includere nella lettura il consumo amperometrico, al punto 1' se si preferisce includervi quello voltmetrico.

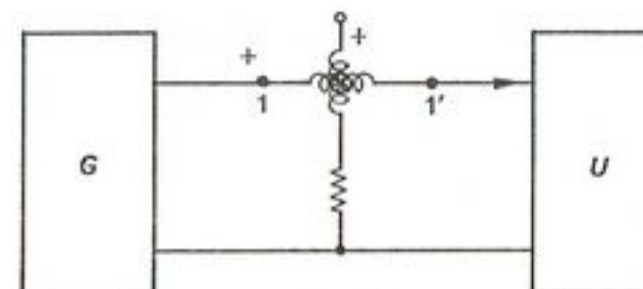



Fig. 6-12

Queste sono le uniche connessioni che rispettino le condizioni precedenti; di ciò ci si può rendere facilmente conto esaminando p. es. le diverse inserzioni in corrente continua; i risultati si possono riportare in corrente alternata, considerando in particolare la componente della corrente in fase con la tensione o viceversa.

Quando la potenza misurata cambia segno (il che può accadere p. es. nel collegamento fra due generatori che scambino potenza o nei sistemi trifasi) per far rimanere lo strumento in scala, si può invertire l'amperometrica, cortocircuitandone durante la manovra i morsetti, in modo da non interrompere il circuito di misura. Alcuni strumenti sono invece provvisti di un commutatore che inverte la sola bobina voltmetrica.

6-2,5. *Errori strumentali.*

Nelle misure in sistemi monofasi in c.a. si possono ripetere, per gli errori strumentali commessi sulle letture del voltmetro e dell'amperometro, le stesse considerazioni fatte in 6-1,4 per le misure in c.c.; occorre solo tener presente che essi si riflettono direttamente solo sui valori della potenza apparente e dell'impedenza del carico.

Per quanto riguarda la potenza attiva, occorre tener conto dell'errore strumentale del wattmetro che, a parità di altre condizioni, produce una fascia di incertezza crescente in ampiezza al diminuire del fattore di potenza.

Si ha infatti, detta c la classe del wattmetro e V_0, I_0 e $\cos\varphi_0$ i suoi valori nominali, una fascia d'incertezza di ampiezza percentuale:

$$\eta\% = \frac{cP_0}{P} = \frac{cV_0 I_0 \cos\varphi_0}{VI\cos\varphi} . \qquad [6\text{-}14]$$

A questo errore si può in parte ovviare scegliendo un wattmetro con portate massime $V_M > V > V_0$ e $I_M > I > I_0$, cioè sovraccaricando lo strumento entro i limiti consentiti o scegliendo uno strumento per basso $\cos\varphi$ (ossia con $\cos\varphi_0 < 1$).

L'errore percentuale ε_Q sulla potenza reattiva, ove interessi, può esser ricavato dai valori degli errori percentuali ε_V, ε_A ed η rispettivamente del

voltmetro, dell'amperometro e del wattmetro, secondo la relazione:

$$\varepsilon_Q = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}(\varepsilon_V + \varepsilon_A + \eta\cos^2\varphi) \qquad [6\text{-}15]$$

ottenuta differenziando la [6-7].

6-2,6. *Metodo dei tre voltmetri.*

Quando si vogliano eseguire misure in condizioni che escludano l'impiego di wattmetri (come è il caso di frequenze elevate o di tensioni molto piccole), si fa ricorso al metodo dei tre voltmetri (fig. 6-13) o al suo duale, con tre amperometri (fig. 6-14), che presenta il vantaggio di un punto in comune fra i tre strumenti. In entrambi i casi si ricorre ad un'impedenza di modulo Z_0 ed argomento γ, noti.

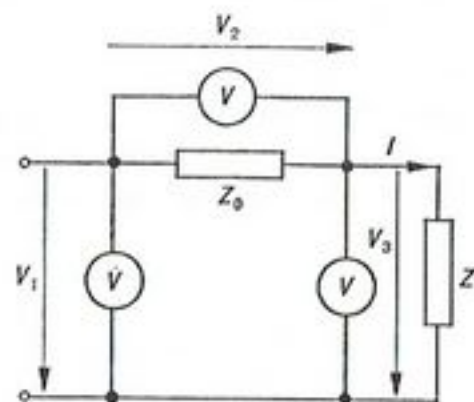
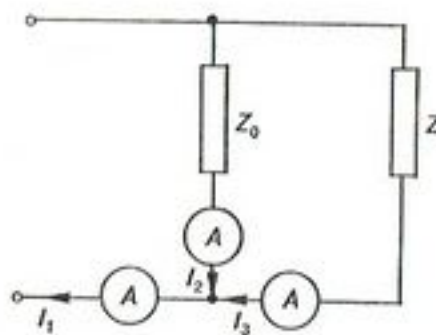



Fig. 6-13

Fig. 6-14

Supposti trascurabili i consumi strumentali, si ha, nel caso dei tre voltmetri:

$$I = \frac{V_2}{Z_0}; \qquad V = V_3$$

e perciò:

$$Z = \frac{V_3}{V_2} Z_0 ;$$

si ha inoltre, per il teorema di Carnot (fig. 6-15):

$$V_1^2 = V_2^2 + V_3^2 + 2V_2V_3\cos\beta$$

da cui si ricava l'argomento φ dell'impedenza incognita:

$$\varphi = \gamma - \beta .$$

Per limitare l'influenza degli errori strumentali, l'impedenza Z_0 deve essere dello stesso ordine di grandezza dell'impedenza incognita Z; ciò conduce spesso ad adottare per Z_0 reattanze capacitive, in cui non si ha praticamente dissipazione di energia.

È invece, in generale, preferibile l'impiego di una resistenza pura $R_0(\gamma = 0)$ (1); in tal caso infatti, si ha, indipendentemente dalla forma delle tensioni in gioco:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v_3 i \, dt = \frac{1}{TR_0}\int_0^T v_3 v_2 \, dt ;$$

Fig. 6-15

fra i valori istantanei delle tre tensioni sussiste la relazione:

$$v_1^2 = (v_2 + v_3)^2 = v_2^2 + v_3^2 + 2v_3v_2$$

da cui risulta:

$$P = \frac{1}{2TR_0}\int_0^T (v_1^2 - v_2^2 - v_3^2)\, dt = \frac{1}{2R_0}(V_1^2 - V_2^2 - V_3^2) \qquad [6\text{-}16]$$

essendo V_1, V_2 e V_3 i valori efficaci delle tre tensioni.

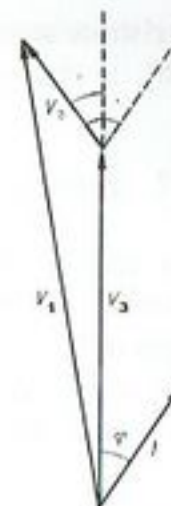
Il calcolo è analogo per il caso dei tre amperometri. La potenza determinata in base alla [6-16] comprende anche il consumo del voltmetro della V_3 come accade nello schema di fig. 6-6; la resistenza del voltmetro che misura la V_2 deve inoltre essere compresa nella R_0, per non dar luogo ad un supplementare errore di consumo sui valori della corrente e della potenza. Se la resistenza R_0 non risulta pura, essa dà luogo, nella misura della potenza, ad un errore di fase.

Gli errori assoluti E_v propri dei tre voltmetri, di classe c e fondo scala V_0:

$$E_{vi} = \frac{c_i}{100} V_{0i} \qquad i = 1, 2, 3$$

si ripercuotono sulla potenza con un'incertezza globale:

$$E_p = \pm \frac{1}{100 R_0} \sum c_i V_i V_{0i}$$

(1) L'impiego di resistenze (o di reattanze) pure, consentendo di ricavare direttamente $\cos\varphi$ (o $\operatorname{sen}\varphi$), elimina l'incertezza sul valore di φ che può derivare dalla relazione trigonometrica: $\cos\beta = \cos(\varphi - \gamma)$.

che risulta sempre abbastanza elevato, rispetto al valore di P dato dalla [6-16], il che costituisce una limitazione del metodo [1].

6-2,7. *Misure con trasformatori di tensione e corrente.*

La fig. 6-16 illustra uno schema per la misura di potenza con un sistema monofase a tensione elevata; esso comprende, per ragioni d'isolamento, l'impiego di un TA anche nel caso di correnti adatte all'inserzione diretta degli strumenti. Nel caso di correnti elevate e tensioni basse, lo schema si riduce a quello della fig. 6-17.

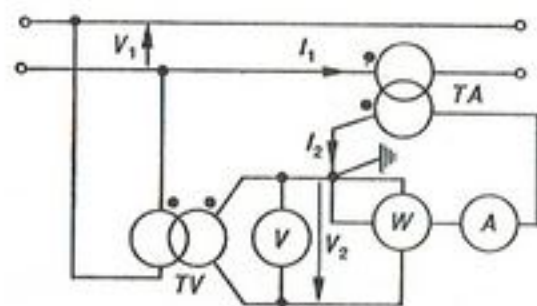



Fig. 6-16

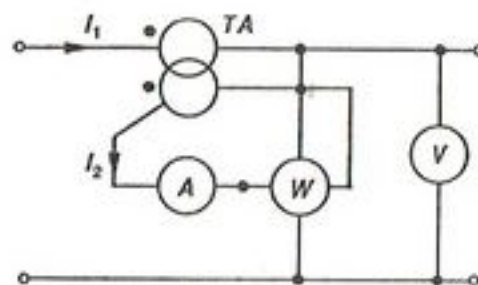



Fig. 6-17

In ognuno di questi schemi si realizza una connessione fra i circuiti amperometrico e voltmetrico del wattmetro, connessione che viene collegata a terra nel caso in cui entrambi i circuiti non abbiano potenziale imposto.

Le portate degli strumenti devono essere riferite alle rispettive grandezze primarie; le relative costanti strumentali si calcolano facilmente moltiplicando le portate amperometriche per il rapporto nominale del TA, quelle voltmetriche per il rapporto del TV.

I consumi strumentali risultano generalmente trascurabili rispetto alle potenze in gioco; quando se ne debba tener conto, devono essere calcolati ai morsetti primari, aggiungendo al consumo degli strumenti quello proprio del trasformatore.

La presenza degli errori di rapporto η_A e η_V e degli errori d'angolo ε_A e ε_V, dovuti ai trasformatori, rispettivamente di corrente e di tensione, com-

[1] Si pensi che, nel caso, pur ideale, in cui fosse $\dot{Z} = R_0$ e cioè $V_1 = 2V_2 = 2V_3$, anche se tutti gli strumenti di classe c lavorassero a fondo scala, si avrebbe un errore percentuale sulla potenza pari a $6c$.

In ogni caso, detta V la maggiore fra le due letture V_2 e V_3, la V_1 è compresa fra V e $2V$, e dipende sia dal fattore di potenza che dal rapporto $\alpha = V_2/V_3 = R_0/Z$. La miglior sensibilità di V_1 al fattore di potenza si ha per $\alpha = 1$.

porta in una misura, a fattore di potenza $\cos\varphi$, degli errori che si sommano a quelli propri degli strumenti.

Essi risultano, in valore percentuale:

per il voltmetro: η_V

per l'amperometro: η_A

per il wattmetro: $(\eta_A + \eta_V) + (\varepsilon_A - \varepsilon_V)\operatorname{tang}\varphi$.

Questi errori possono essere corretti, conoscendo in valore e segno $\eta_A, \eta_V, \varepsilon_A$ ed ε_V, quali si ricavano dalle curve di taratura dei trasformatori, nelle condizioni di carico relative agli strumenti impiegati.

6-2,8. *Errori introdotti dalle connessioni.*

Fra i vantaggi dei trasformatori di misura, vi è anche la facilità di trasportare le indicazioni degli strumenti dagli impianti alle sale quadri; il collegamento avviene mediante cavetti lunghi spesso decine o centinaia di metri.

È interessante notare, a questo proposito, che la resistenza dei cavetti costituisce per i TA una prestazione supplementare; per ridurne il valore, si utilizzano talvolta secondari da 1 A piuttosto che da 5 A.

Nei TV, i cavetti secondari danno luogo ad una caduta di tensione che si aggiunge direttamente agli errori del riduttore; ad es. una prestazione di 200 VA a $100{:}\sqrt{3}$ volt, assorbe circa 3,5 A; per provocare un errore dello 0,2% (pari a circa 0,11 volt) è sufficiente una resistenza delle connessioni di 33 milliohm.

Ciò comporta spesso delle connessioni voltmetriche di sezione più elevata delle stesse connessioni amperometriche.

6-2,9. *Misure con tensioni e correnti deformate.*

Quando le tensioni e le correnti nel circuito di fig. 6-6 non siano di forma sinusoidale, si determinano — con l'impiego di amperometri e voltmetri di tipo adatto — i loro valori efficaci: il wattmetro misura in ogni caso il valore della potenza trasmessa attraverso la sezione di misura.

Le grandezze derivate, ricavate mediante le relazioni del paragrafo 6-2,1, assumono però, in questo caso, significati diversi.

In particolare, non è possibile separare la potenza reattiva Q dalla potenza deformante D, essendo:

$$(VI)^2 - P^2 = Q^2 + D^2\,;$$

il fattore di potenza, pur conservando il ruolo implicito nella [6-8], non è più interpretabile in termini di sfasamento fra tensione e corrente.

Non è inoltre corretto interpretare come impedenza del carico il rapporto fra i valori efficaci delle tensioni e delle correnti, salvo il caso particolare di circuiti non deformanti.

Inoltre, a differenza di quanto avviene in regime sinusoidale, la presenza di impedenze a monte della sezione di misura può alterare la forma d'onda sul carico e quindi i rapporti fra le varie grandezze misurate.

Lo stesso fenomeno si verifica anche quando si eseguono misure su circuiti con elementi non lineari, come accadde assai di frequente, ad esempio, per reattanze contenenti materiali ferromagnetici. In questi casi può risultare sinusoidale solo la f.e.m. applicata, ma non la corrente assorbita, o viceversa; spesso entrambe le grandezze risultano più o meno deformate.

6-3. **Principi generali delle misure sui circuiti trifasi.**

6-3,1. *Misure di potenza su sistemi a più fili.*

Le misure su circuiti trifasi, a tre o a quattro fili, sono il caso più frequente e più importante di misura su un sistema polifase o, più in generale, in una sezione di misura che comprenda m conduttori.

Si consideri una rete (fig. 6-18), con tensioni e correnti sinusoidali, formata da due parti, completamente separabili tra loro mediante la sezione di m collegamenti; fra le correnti che percorrono tali collegamenti vale ovviamente la relazione:

Fig. 6-18

$$\sum_{1}^{m} \dot{I}_r = 0 \, .$$

La rete può essere allora immaginata composta da $m-1$ sistemi monofasi indipendenti, con il ritorno in comune su uno qualsiasi dei conduttori, p. es. il conduttore s-esimo; la potenza trasmessa fra le due parti della rete sarà quindi [1]:

$$P = \sum_{r \neq s} (\dot{V}_{rs} \times \dot{I}_r)$$

[1] Per semplicità di scrittura, si userà, nelle relazioni riguardanti le potenze attive, la notazione $\dot{V} \times \dot{I}$ indicante il prodotto interno $VI\cos\varphi$ dei vettori $\dot{V}$ e $\dot{I}$; per analogia si userà la notazione $\dot{V} \wedge \dot{I}$, ossia il prodotto esterno dei vettori $\dot{V}$ e $\dot{I}$, per le relazioni che coinvolgono le potenze reattive, il cui valore è pari al *modulo* $VI\operatorname{sen}\varphi$ del prodotto stesso, ed il cui segno segue la regola del prodotto esterno, per fissare il verso di φ.

Si ricordi la relazione:

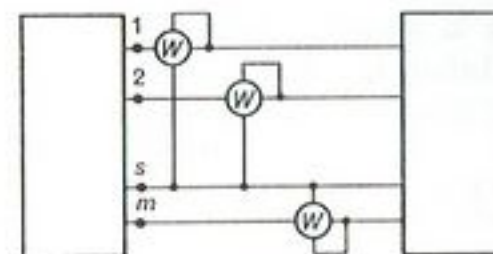
$$(j\dot{V}) \times \dot{I} = -\dot{V} \wedge \dot{I} \, .$$

e potrà essere misurata dalla somma di $m-1$ wattmetri, inseriti ognuno con l'amperometrica su un diverso conduttore (escluso s) e con la voltmetrica fra tale conduttore e s (fig. 6-19).

La potenza trasmessa P può anche essere misurata prendendo come riferimento per i potenziali un punto generico O, interno od esterno alla rete; si ha allora la relazione:

Fig. 6-19

$$P = \sum (\dot{V}_{r0} \times \dot{I}_r)$$

che è realizzata mediante l'inserzione di m wattmetri, inseriti ognuno con l'amperometrica su un diverso collegamento e con la voltmetrica fra tale collegamento e il punto O. Questa inserzione equivale a supporre che da O esca un $(m+1)$-esimo conduttore, percorso da corrente nulla.

6-3,2. *Misure wattmetriche nei sistemi trifasi a tre fili.*

In un sistema a tre fili, sono possibili nove diverse inserzioni di un wattmetro, distinte per avere la bobina amperometrica su una delle tre fasi e la voltmetrica su una delle tre tensioni concatenate. La fig. 6-20 mostra ad esempio le tre inserzioni possibili con l'amperometrica inserita sulla fase 1 [1].

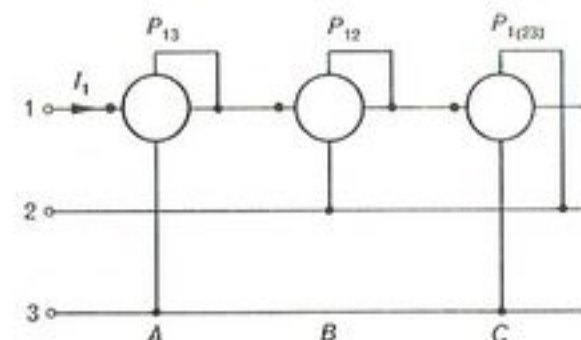



Fig. 6-20

Le indicazioni di queste nove inserzioni wattmetriche non risultano però indipendenti, dato che esistono le relazioni

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \qquad [6\text{-}17]$$

[1] Queste inserzioni vengono designate con opportuni indici: $P_{1(23)}$ indica ad esempio la lettura con l'amperometrica sul filo 1 (primo indice) e la voltmetrica fra gli altri due fili (nell'ordine); nel caso più comune che i due primi indici siano uguali (p. es. $P_{1(13)}$) essi si possono unificare (scrivendo P_{13}). Le tre inserzioni di fig. 6-20 sono anche dette di tipo A (anticiclico), B e C.

per le correnti di linea, e:

$$\dot{V}_{12} + \dot{V}_{23} + \dot{V}_{31} = 0 \qquad [6\text{-}18]$$

fra le tensioni concatenate.

Infatti la potenza $P_{1(23)}$ misurata dal wattmetro che ha l'amperometrica sul filo 1 e la voltmetrica fra le fasi 2 e 3, vale, applicando la [6-18]:

$$P_{1(23)} = \dot{V}_{23} \times \dot{I}_1 = (-\dot{V}_{31} \times \dot{I}_1 - \dot{V}_{12} \times \dot{I}_1) = \dot{V}_{13} \times \dot{I}_1 - \dot{V}_{12} \times \dot{I}_1 = P_{13} - P_{12}.$$

Le tre indicazioni che hanno l'amperometrica sullo stesso filo non sono perciò indipendenti; ciò consente di considerare solo inserzioni con una connessione voltmetrica comune con l'amperometrica; per semplice rotazione degli indici, scriveremo perciò:

$$\left.\begin{aligned} P_{1(23)} &= P_{13} - P_{12} \\ P_{2(31)} &= P_{21} - P_{23} \\ P_{3(12)} &= P_{32} - P_{31} \end{aligned}\right\} . \qquad [6\text{-}19]$$

Per il principio esposto in [6-3,1] la potenza totale di un sistema trifase è uguale alla somma (algebrica) delle due misure wattmetriche eseguite su una qualsiasi coppia di fili, rispetto al terzo e cioè:

$$P = P_{12} + P_{32} = P_{23} + P_{13} = P_{31} + P_{21}. \qquad [6\text{-}20]$$

Con ciò, si hanno solo quattro letture wattmetriche indipendenti; di esse una e una sola coppia deve avere il secondo indice comune (inserzione Aron, fig. 6-21). Questa coppia di letture consente di determinare la potenza totale di un sistema, a tre fili, qualunque sia il suo grado di dissimmetria (nelle tensioni concatenate) o di squilibrio (nelle correnti).

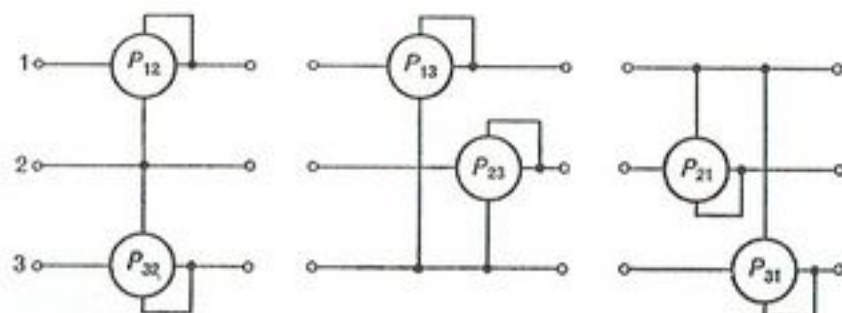



Fig. 6-21

6-3,3. *Potenze di fase nei sistemi a tre fili.*

La potenza totale di un sistema trifase a tre fili è indipendente dalla posizione del suo centro stella; ciò non vale per le potenze assorbite dalle singole fasi:

$$\begin{aligned} P_1 &= \dot{E}_1 \times \dot{I}_1 \\ P_2 &= \dot{E}_2 \times \dot{I}_2 \\ P_3 &= \dot{E}_3 \times \dot{I}_3 . \end{aligned}$$

Dalla somma di due misure wattmetriche con il primo indice uguale (cioè inserite con le amperometriche nello stesso filo) si ottiene:

$$P_{12} + P_{13} = \dot{V}_{12} \times \dot{I}_1 + \dot{V}_{13} \times \dot{I}_1 = (\dot{E}_1 - \dot{E}_2 + \dot{E}_1 - \dot{E}_3) \times \dot{I}_1 = 3(\dot{E}_1 - \dot{E}_0) \times \dot{I}_1$$

essendo:

$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 3\dot{E}_0 .$$

Se si fa riferimento, anziché alla reale tensione di fase E_1, alla tensione:

$$\dot{E}_{10} = \dot{E}_1 - \dot{E}_0$$

riferita al centro stella ideale del sistema (per cui è nulla la somma delle tensioni stellate (fig. 6-22)) si ha:

$$\left.\begin{aligned} P_{12} + P_{13} &= 3\dot{E}_{10} \times \dot{I}_1 = 3P_{10} \\ P_{23} + P_{21} &= 3\dot{E}_{20} \times \dot{I}_2 = 3P_{20} \\ P_{31} + P_{32} &= 3\dot{E}_{30} \times \dot{I}_3 = 3P_{30} \end{aligned}\right\} \qquad [6\text{-}21]$$

ossia la somma delle potenze di due wattmetri con l'amperometrica sul filo m è uguale a tre volte la potenza assorbita dalla fase m, quando le tensioni stellate siano riferite al centro stella ideale del sistema.

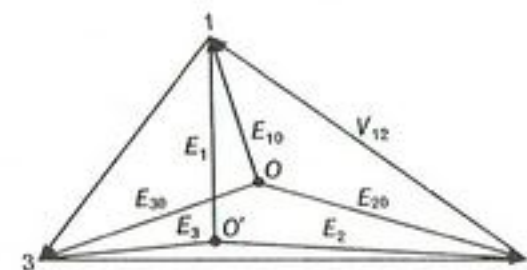



Fig. 6-22

6-3,4. *Potenze reattive nei sistemi trifasi a tre fili.*

Tutte le relazioni esistenti fra le potenze attive possono essere trasportate alle potenze reattive, misurabili con varmetri ideali, inseriti nello stesso modo dei rispettivi wattmetri.

Si ha perciò:

$$Q_{1(23)} = Q_{13} - Q_{12}$$
$$Q_{2(31)} = Q_{21} - Q_{23}$$
$$Q_{3(12)} = Q_{32} - Q_{31} \,.$$

La potenza reattiva totale risulta:

$$Q = Q_{12} + Q_{32} = Q_{23} + Q_{13} = Q_{31} + Q_{21} \,. \qquad [6\text{-}22]$$

Le potenze reattive delle singole fasi, riferendo la tensione al centro stella ideale del sistema, sono:

$$3Q_{10} = Q_{12} + Q_{13}$$
$$3Q_{20} = Q_{23} + Q_{21}$$
$$3Q_{30} = Q_{31} + Q_{32} \,.$$

La validità di queste relazioni non si estende, in generale, alle potenze apparenti, per le quali non sussiste il principio di conservazione.

6-3,5. *Potenze reattive nei sistemi trifasi con tensioni simmetriche.*

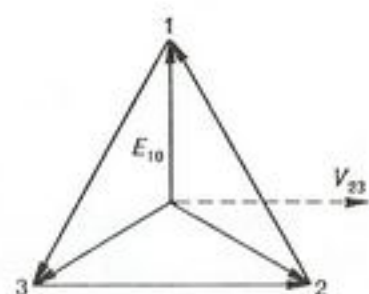



Fig. 6-23

Quando il sistema trifase è alimentato da una terna di tensioni simmetriche, le potenze reattive delle singole fasi e dell'intero sistema possono essere ricavate da letture wattmetriche.

Si ha infatti, per un sistema di tensioni concatenate simmetriche dirette (fig. 6-23):

$$\dot{V}_{23} = -j\sqrt{3}\dot{E}_{10} \qquad [6\text{-}23]$$

da cui si ricava:

$$\dot{V}_{23} \times \dot{I}_1 = \sqrt{3}\dot{E}_{10} \wedge \dot{I}_1 = \sqrt{3}Q_{10} \,;$$

ossia la tensione $\dot{V}_{23}$ è sfasata di 90° in ritardo, ed è di modulo uguale a $\sqrt{3}$ volte la tensione stellata $\dot{E}_{10}$; la potenza segnata da un wattmetro, alimentato dalla V_{23} e dalla I_1, indica quindi, a parte il fattore $\sqrt{3}$, il valore della potenza reattiva della fase 1, riferita al centro stella ideale del sistema.

Si deduce quindi dalle [6-19]:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{3}Q_{10} &= P_{13} - P_{12} \\ \sqrt{3}Q_{20} &= P_{21} - P_{23} \\ \sqrt{3}Q_{30} &= P_{32} - P_{31} \end{aligned}\right\} \qquad [6\text{-}24]$$

ossia: la potenza reattiva di una fase, riferita al centro stella ideale del sistema, è ricavabile, nel caso di tensioni simmetriche, dalla differenza delle due letture wattmetriche che hanno l'amperometrica inserita sulla fase considerata.

Se il sistema delle tensioni concatenate è simmetrico inverso, la [6-23] diviene:

$$\dot{V}_{23} = j \cdot \sqrt{3}\dot{E}_{10}$$

e cambia il segno delle relazioni [6-24].

Si riconosce pertanto come il segno della potenza reattiva possa essere determinato, quando sia noto il senso ciclico con cui si succedono le fasi e, viceversa, come tale senso ciclico sia deducibile, una volta noto il segno della potenza reattiva.

6-3,6. *Altre proprietà dei sistemi trifasi.*

In molti casi, come si vedrà in seguito, è possibile esprimere le potenze attiva e reattiva di un circuito con relazioni del tipo:

$$P = A + B$$
$$Q = \sqrt{3}(A - B) \,.$$

In questo caso, posto:

$$x = \frac{A}{B} \,,$$

il fattore di potenza del circuito risulta:

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{A + B}{2\sqrt{A^2 + B^2 - AB}} = \frac{1 + x}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} \qquad [6\text{-}25]$$

ossia può essere direttamente dedotto dal rapporto fra le due grandezze A e B.

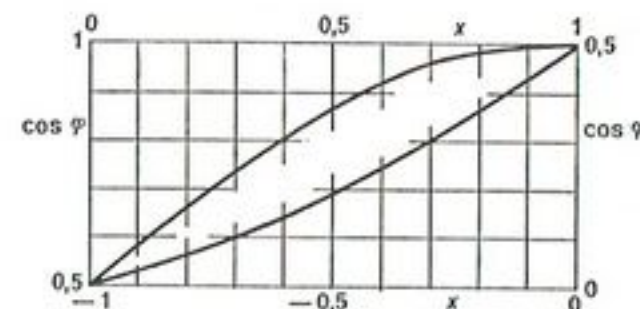



Fig. 6-24

Si noti che la [6-25] è indipendente dal segno di Q e non cambia se al posto del rapporto A/B si pone il suo reciproco B/A. La rappresentazione grafica della relazione [6-25] può quindi limitarsi al campo:

$$-1<x<1\ ;$$

il valore del $\cos\varphi$ è zero per $x=-1$, è uguale ad uno per $x=1$ e vale 0,5 per $x=0$. La rappresentazione può quindi essere condensata come appare in fig. 6-24.

6-3,7. *Determinazione del senso ciclico.*

La determinazione del senso ciclico di un sistema di tensioni trifasi può avere interesse quando esso debba essere applicato ad una specifica rete, in un ordine predeterminato; ha, in generale, interesse in quanto dalla conoscenza del senso ciclico si può risalire al segno della potenza reattiva, come si è visto in [6-3,5].

Data una terna di morsetti, a cui supporremo applicata una terna di tensioni simmetriche, preso uno dei morsetti come riferimento (ossia, ad esempio, come fase 1), si vuole riconosce per quale degli altri due morsetti la tensione stellata risulta in ritardo rispetto a quella della fase di riferimento. Questo morsetto sarà denominato con 2, per avere la corretta successione ciclica in ordine diretto.

Il metodo più semplice (sequenscopio) è rappresentato da un piccolo motore asincrono che indica, col suo verso di rotazione, in quale ordine si succedono nel tempo le tensioni sulle tre fasi delle sue bobine statoriche.

Altri sistemi, statici, si basano sul confronto degli sfasamenti fra le tensioni del sistema con quelli introdotti da opportuni circuiti, a resistenza e capacità.

Lo schema più diffuso e più semplice è indicato in fig. 6-25; per esso è facile dimostrare che il centro stella cade sul semicerchio $AP1$ di fig. 6-26;

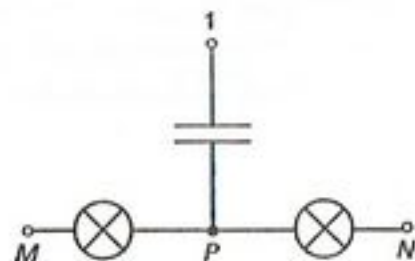



Fig. 6-25

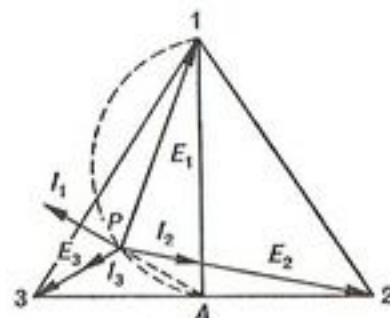



Fig. 6-26

infatti il vettore che rappresenta la corrente:

$$\dot I=\dot I_2+\dot I_3=\frac{1}{R}(\dot E_2+\dot E_3)$$

dovendo essere in fase con la somma delle tensioni $\dot E_2$ ed $\dot E_3$, passa per il punto A, baricentro del quadrilatero che ha per lati tali tensioni. D'altra parte, dovendo essere nulla la somma delle correnti nei tre rami della stella, è anche:

$$\dot I=-\dot I_1=-j\frac{\dot E_1}{X_c}$$

e perciò $\dot I$ deve risultare a 90° in ritardo rispetto ad $\dot E_1$.

Il luogo dei punti, per cui queste condizioni possono essere rispettate, è appunto il semicerchio indicato. Scegliendo in modo opportuno il valore di X_c rispetto a R, si può far in modo che la tensione E_2 — cioè quella sulla fase che è in ritardo rispetto a quella di riferimento, collegata al condensatore — risulti convenientemente maggiore di E_3. Se le resistenze sono costituite da due lampade, quella corrispondente alla fase 2 risulta perciò accesa.

Un altro schema, più complesso ma di impiego più sicuro anche con sistemi aventi piccoli squilibri, è indicato in fig. 6-27.

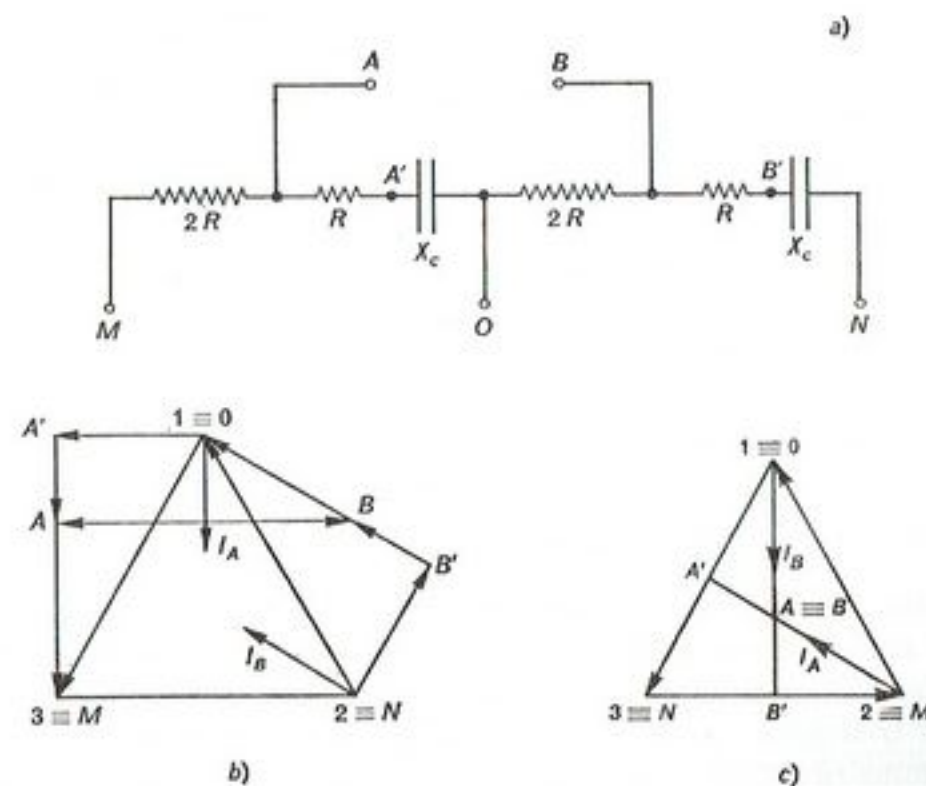



Fig. 6-27 *a, b, c*

Ponendo $X_c = \sqrt{3}R$, le due impedenze fra M e O e fra O e N, entrambe capacitive, hanno argomento di 30°; come risulta dai relativi diagrammi vettoriali, se al punto N è collegata la fase in ritardo rispetto ad O, la tensione V_{AB} assume il valore della tensione concatenata; la stessa tensione è nulla se in N è collegata la fase che è in anticipo rispetto ad O.

Inserendo fra i punti A e B una lampada al neon, dal suo accendersi si ricava quindi il senso ciclico delle tensioni applicate.

6-3,8. *Sistemi trifasi a quattro fili.*

In base a quanto esposto in 6-3,1, le misure di potenza su sistemi trifasi a quattro fili si eseguono scegliendo arbitrariamente un conduttore come « neutro » e considerando gli altri tre conduttori come appartenenti a tre sistemi monofasi indipendenti, con ritorno comune sul neutro.

Per questi tre sistemi monofasi vengono singolarmente determinate, mediante voltmetro, amperometro e wattmetro, tutte le grandezze che interessano, comprese le rispettive potenze reattive secondo quanto indicato in 6-2,1.

La potenza attiva totale del sistema è la somma delle potenze attive dei tre circuiti, segnate dai tre wattmetri; la potenza reattiva totale è la somma (algebrica) delle potenze reattive.

Per evitare incertezze nei segni delle potenze reattive e disuniformità nelle portate degli strumenti, nei sistemi trifasi non molto squilibrati si ha convenienza a scegliere come neutro il conduttore relativo al centro stella del sistema.

Per definire la posizione reciproca dei tre sistemi monofasi, si può eseguire la misura delle tre tensioni fra i conduttori di linea, che formano un triangolo chiuso, sui cui vertici si appoggia la stella delle tre tensioni verso il neutro.

6-4. Misure sui sistemi trifasi a tre fili.

6-4,1. *Sistemi trifasi simmetrici ed equilibrati.*

Un sistema trifase simmetrico (nelle tensioni) ed equilibrato (nelle correnti) è completamente determinato, come un sistema monofase, da tre grandezze indipendenti; il valore di una tensione concatenata individua infatti il triangolo equilatero delle tensioni, il valore di una corrente, la stella simmetrica delle correnti, un angolo di sfasamento la posizione reciproca di queste due terne di vettori (fig. 6-28).

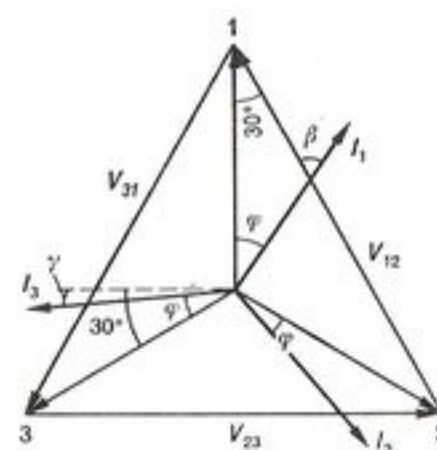
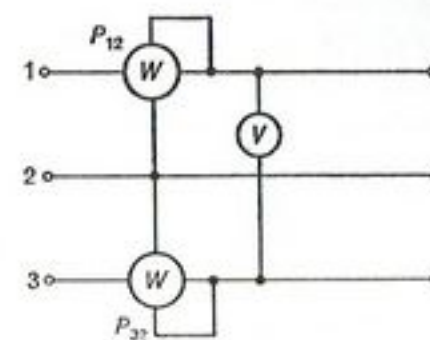



Fig. 6-28 Fig. 6-29

Lo schema da preferire, fra i molti possibili, è quello di fig. 6-29, con 2 wattmetri in inserzione Aron ed una misura voltmetrica; esso consente infatti di ottenere sicuramente la potenza totale del sistema, indipendentemente dall'ipotesi di perfetta simmetria; permette il controllo dell'equilibrio delle varie fasi (vedi 6-4,2) e di passare rapidamente a schemi più complessi.

La coppia di misure wattmetriche P_{12} e P_{32} copre tutte le misure wattmetriche realizzabili, perché — in virtù della simmetria del sistema — si ha:

$$\left.\begin{array}{l} P_{12} = P_{23} = P_{31} \\ P_{21} = P_{32} = P_{13} \end{array}\right\} .$$

Dalle misure P_{12}, P_{32} e V si ottiene, in base alle [6-20] e [6-24]:

$$P = P_{32} + P_{12} \qquad [6\text{-}26]$$

$$Q = 3Q_{10} = \sqrt{3}(P_{13} - P_{12}) = \sqrt{3}(P_{32} - P_{12}) \qquad [6\text{-}27]$$

$$I = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{3}V} = \frac{2}{\sqrt{3}V}\sqrt{P_{12}^2 + P_{32}^2 - P_{12}P_{32}} . \qquad [6\text{-}28]$$

Il fattore di potenza, oltre che dalla relazione:

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{3}VI} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{3P_{12}P_{32}}{P^2}}}$$

può ricavarsi direttamente dal rapporto x fra la minore e la maggiore delle due letture wattmetriche, poiché le [6-27] e [6-26] consentono l'applicazione della [6-25].

Le impedenze, della stella o del triangolo equivalente, si determinano in modo del tutto analogo a quanto si è visto per un sistema monofase.

Se il senso ciclico è tale per cui le fasi si succedono secondo la numerazione adottata, si riconosce facilmente che il carico è induttivo se è $P_{32} > P_{12}$, capacitivo in caso contrario.

Il metodo sopra illustrato è generalmente preferibile a quello in cui si misura la potenza di una sola fase e la potenza totale viene ricavata moltiplicando per tre il valore misurato, in quanto ciò è corretto solo se il carico è perfettamente simmetrico.

6-4,2. *Segno delle potenze.*

I due wattmetri, nell'inserzione Aron di fig. 6-29, indicano rispettivamente (fig. 6-28):

$$P_{12} = \dot{V}_{12} \times \dot{I}_1 = VI\cos\beta = VI\cos(\varphi + 30)$$
$$P_{32} = \dot{V}_{32} \times \dot{I}_3 = VI\cos\gamma = VI\cos(\varphi - 30)$$

le due letture dipendono dall'angolo di sfasamento φ, secondo l'andamento del diagramma di fig. 6-30. Esso è limitato ad angoli di $\pm 90°$, nell'ipotesi che la potenza totale sia da considerarsi positiva. Si riconosce tuttavia l'esistenza di due zone ($\varphi > 60$ o $\varphi < -60$, ossia $\cos\varphi < 0{,}5$) in cui una delle due letture ha segno negativo. Ciò è da tener ben presente, in quanto tutte le relazioni dei precedenti paragrafi sono relazioni algebriche ed un errore sul segno di una lettura può portare ad errori grossolani nella valutazione delle potenze attive e reattive, delle correnti, ecc.

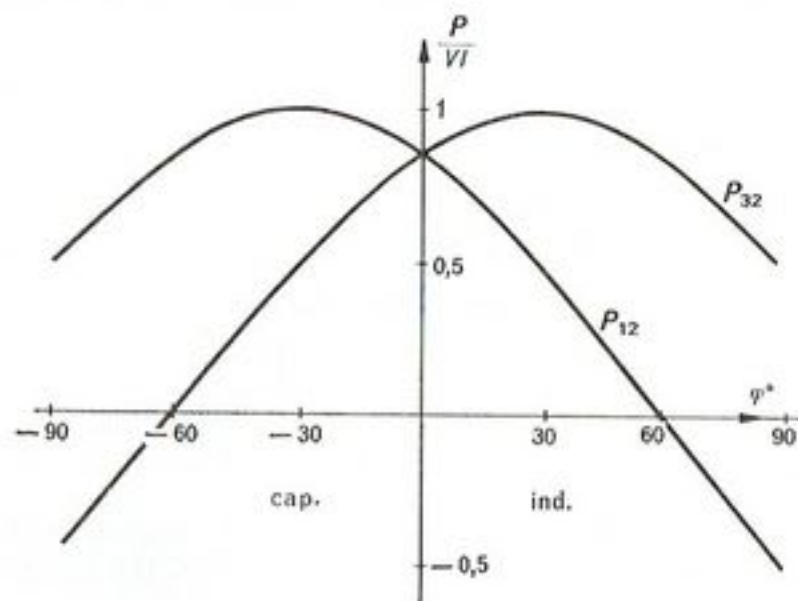



Fig. 6-30

Il segno da attribuire ad una lettura wattmetrica si deduce in primo luogo dalla posizione dell'indice dello strumento, quando questo sia correttamente inserito: per valori positivi l'indice si porta in una posizione interna alla scala, per valori negativi esso tende a spostarsi al di là della posizione di zero.

Si ha tuttavia la possibilità di un controllo del segno, anche prescindendo dalle connessioni degli strumenti, partendo da due wattmetri, in inserzione Aron, disposti in modo da avere entrambe le letture nell'interno della scala. Si sconnettano infatti i terminali voltmetrici dal filo comune (che abbiamo indicato con 2) e li si colleghino rispettivamente alle fasi 3 e 1, come mostra la fig. 6-31. Il wattmetro che, nella primitiva inserzione, indicava la P_{12} segna ora la potenza P_{13}; quello che segnava la P_{32} indica la P_{31}: si ha però, per la simmetria:

Fig. 6-31

$$P_{13} = P_{32}; \qquad P_{31} = P_{12};$$

ciò significa che i wattmetri si scambiano le letture, in valore e segno. Se, in tali condizioni, entrambe le letture restano nell'interno della scala, le P_{12} e P_{32} sono entrambe dello stesso segno e perciò positive; se gli indici tendono al di là della posizione di zero, le P_{12} e P_{32} sono di segno diverso e si assume come negativa la minore, in modo che la potenza totale risulti positiva.

Poiché ciò accade — se il sistema è simmetrico ed equilibrato — contemporaneamente su entrambi gli strumenti, la verifica può essere effettuata commutando anche una sola voltmetrica. Con la commutazione di entrambe si ha invece anche la possibilità di controllare se il sistema è realmente simmetrico ed equilibrato.

6-4,3. *Sistemi trifasi simmetrici ma squilibrati.*

Nel caso, in pratica molto frequente, di un sistema trifase simmetrico di tensioni che alimenta un carico squilibrato, per cui è:

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3\,,$$

la determinazione del sistema richiede la misura di cinque grandezze indipendenti.

Esistono, a questo proposito, numerosi schemi, tutti in generale com-

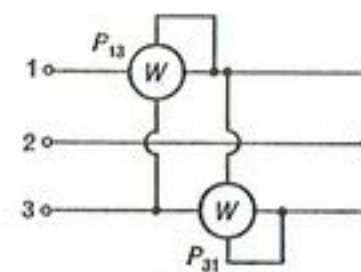
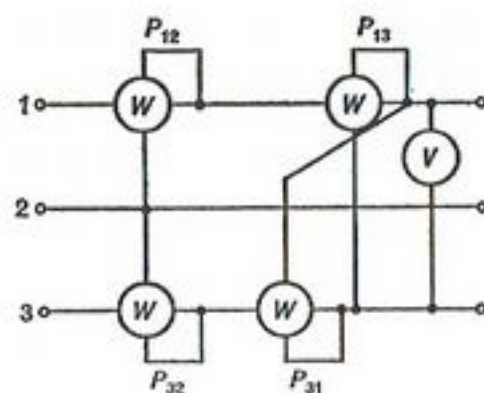



Fig. 6-32

prendenti due misure wattmetriche in inserzione Aron; sceglieremo, per la sua semplicità, lo schema Barbagelata (fig. 6-32) che comprende quattro misure wattmetriche indipendenti (P_{12}, P_{32}, P_{13}, P_{31}) ed una misura voltmetrica. Per carichi costanti nel tempo, la misura può facilmente eseguirsi con due soli wattmetri, effettuando la commutazione indicata al par. 6-4,2, ossia partendo dallo schema indicato per i sistemi simmetrici ed equilibrati.

Quando si vogliano determinare separatamente le grandezze delle singole fasi, conviene procedere secondo lo schema seguente, riassunto nella Tabella 6-1.

Tabella 6-1

V / AV	1	2	3	$A+B$	$x=\frac{A}{B}$	$\cos\varphi=\frac{1+x}{2\sqrt{x^2-x+1}}$	$I=\frac{A+B}{\sqrt{3}V\cos\varphi}$
1	—	P_{12}	P_{13}	$3P_{10}$	x_1	$\cos\varphi_{10}$	I_1
2	P_{21}	—	P_{23}	$3P_{20}$	x_2	$\cos\varphi_{20}$	I_2
3	P_{31}	P_{32}	—	$3P_{30}$	x_3	$\cos\varphi_{30}$	I_3
	P	P	P	$3P$			

Dalla lettura dei wattmetri, in inserzione Aron, si ha la potenza attiva totale del sistema:

$$P=P_{12}+P_{32};$$

si possono allora ricavare i valori delle altre letture wattmetriche:

$$P_{21}=P-P_{31}$$
$$P_{23}=P-P_{13}.$$

Da questi valori si ricavano le potenze attive e reattive delle singole fasi:

$$\left.\begin{aligned}3P_{10}&=P_{12}+P_{13}\\3P_{20}&=P_{23}+P_{21}\\3P_{30}&=P_{31}+P_{32}\end{aligned}\right\}\qquad[6\text{-}29]$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{3}Q_{10}&=P_{13}-P_{12}\\\sqrt{3}Q_{20}&=P_{21}-P_{23}=P_{13}-P_{31}\\\sqrt{3}Q_{30}&=P_{32}-P_{31}.\end{aligned}\right\}\qquad[6\text{-}30]$$

Dalle [6-29] e [6-30] si possono ricavare, sia attraverso il calcolo diretto, sia attraverso l'uso delle regole indicate in 6-3,6, i valori dei fattori di potenza e delle correnti delle tre fasi.

Se, anziché le grandezze delle singole fasi, interessano le grandezze globali del sistema, si può ricavare direttamente la potenza reattiva globale della somma delle [6-30]:

$$\sqrt{3}Q=\sqrt{3}(Q_{10}+Q_{20}+Q_{30})=P_{32}-P_{12}+2(P_{13}-P_{31})\qquad[6\text{-}31]$$

ovvero, con semplici passaggi:

$$Q=\sqrt{3}(P_{32}-P_{12})-\frac{2}{\sqrt{3}}[(P_{32}-P_{13})-(P_{12}-P_{31})]$$

che contiene, come caso particolare, la [6-27] valida per sistemi simmetrici.

Il fattore di potenza globale del sistema è definito dalla relazione:

$$\cos\Phi=\cos\operatorname{arc\,tang}\frac{Q}{P}=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}};$$

esso coincide, per quanto è noto dalla teoria delle componenti simmetriche, con il fattore di potenza della sequenza diretta delle correnti che è l'unica, nel caso di tensioni simmetriche dirette, a produrre potenza attiva e reattiva.

Se si vuole definire un unico valore di corrente:

$$I=\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{\sqrt{3}V}=\frac{P}{\sqrt{3}V\cos\phi}$$

esso coincide con il valore della corrente di sequenza diretta I_d.

Si noti che ponendo:

$$B=P_{12}+P_{23}+P_{31}\quad\text{(somma delle potenze cicliche)}$$
$$A=P_{21}+P_{32}+P_{13}\quad\text{(somma delle potenze anticicliche)}$$

si possono scrivere le relazioni:

$$3P=A+B;\qquad 3Q=(A-B)\sqrt{3}$$

che consentono l'impiego delle relazioni e del diagramma indicati al paragrafo 6-3,6, per ricavare il fattore di potenza globale del sistema.

La conoscenza del sistema può essere completata dalla determinazione

della corrente di sequenza inversa I_i; è infatti, per ogni sistema trifase puro:

$$I_d^2 + I_i^2 = \frac{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}{3}$$

da cui, nota la I_d e le correnti di fase, si può ricavare il valore di I_i ed il grado di squilibrio (I_i/I_d) del sistema.

6-4,4. *Costruzione del diagramma vettoriale.*

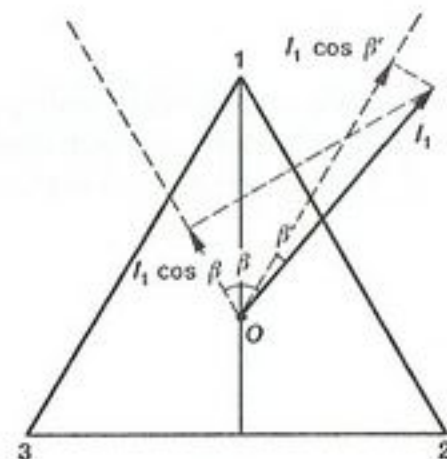
La rappresentazione di un sistema trifase simmetrico ma squilibrato può essere completata dal tracciamento del suo diagramma vettoriale; ad esso si può anche pervenire direttamente dall'insieme delle cinque misure indipendenti, $P_{12}, P_{32}, P_{13}, P_{31}$ e V.

La conoscenza del valore V consente infatti di tracciare il triangolo equilatero delle tensioni concatenate; questo tracciamento non è tuttavia univoco, se non è fissato il senso ciclico. Come si è visto in 6-3,5, le due soluzioni comportano segni differenti per le potenze reattive.

Fig. 6-33

Per individuare il vettore rappresentativo della corrente $\dot{I}_1$, si calcolano le sue proiezioni, rispettivamente, nelle direzioni della V_{12} e della V_{13}:

$$I_1 \cos\beta = \frac{P_{12}}{V}$$

$$I_1 \cos\beta' = \frac{P_{13}}{V}.$$

Il vertice del vettore $\dot{I}_1$ giace sull'incontro delle due normali condotte dagli estremi di queste proiezioni (fig. 6-33).

In analogo modo si ricava la I_3, tramite le potenze P_{32} e P_{31}; la corrente $\dot{I}_2$ è poi determinata da:

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_3 - \dot{I}_1.$$

6-4,5. *Segno delle potenze nei sistemi squilibrati.*

Il metodo più generale, e spesso il più rapido, per controllare i segni delle letture wattmetriche, in un sistema squilibrato, consiste nell'eseguire, mediante la commutazione di tre wattmetri, tutte le inserzioni del tipo P_{mn}, e cioè, oltre a quelle già indicate in 6-4,3, anche quelle relative alla fase 2.

Assumendo come positiva la potenza totale P del sistema, ed essendo:

$$P = P_{12} + P_{32} = P_{23} + P_{13} = P_{31} + P_{21}$$

si attribuisce il segno positivo alla lettura maggiore per ognuna delle tre coppie in inserzione Aron.

Commutando il wattmetro che ha l'amperometrica sulla fase 1 dalla P_{12} alla P_{13} (fig. 6-34), quello della fase 2 dalla P_{21} alla P_{23}, quello della fase 3 dalla P_{32} alla P_{31}, si riconoscono facilmente quali letture abbiano segno concorde con le letture assunte positive, e quali segno discorde.

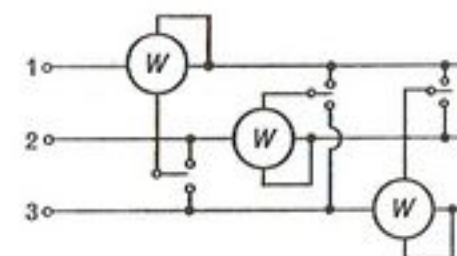



Fig. 6-34

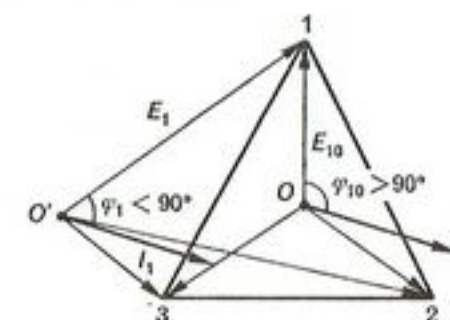



Fig. 6-35

Per piccoli squilibri, può essere sufficiente la regola data in 6-4,2. Per ogni fase m, è possibile infatti costruire un diagramma, del tipo illustrato in fig. 6-30, in funzione del relativo angolo di fase φ_m. Occorre però ricordare che le potenze P_{m0} sono delle potenze fittizie perché sono riferite al centro stella ideale O e non a quello reale O' del sistema; esse possono perciò risultare negative, anche per un carico costituito da soli elementi passivi (fig. 6-35); il diagramma deve perciò essere esteso per angoli φ fra $+180$ e $-180°$.

6-4,6. *Considerazioni sugli errori.*

Per i sistemi a tre fili alimentati da tensioni simmetriche, si possono fare le considerazioni seguenti:

a) Consumi voltmetrici. Nello schema di fig. 6-29 i due wattmetri segnano rispettivamente le potenze:

$$\left.\begin{aligned} P'_{12} &= P_{12} + \frac{V^2}{R_w} + \frac{1}{2}\frac{V^2}{R_v} \\ P'_{32} &= P_{32} + \frac{V^2}{R'_w} + \frac{1}{2}\frac{V^2}{R_v} \end{aligned}\right\} \qquad [6\text{-}32]$$

Il secondo termine corrisponde per ciascun wattmetro al consumo della propria wattmetrica; l'ultimo termine è la potenza indicata da ognuno dei

due strumenti, per effetto di una corrente di carico in fase con $\dot{V}_{31}$, e perciò con $\cos\beta = 0,5$ rispetto a $\dot{V}_{12}$ e a $\dot{V}_{32}$.

Le relazioni [6-32] sono naturalmente di natura algebrica. Analoghe considerazioni possono farsi quando le voltmetriche dei wattmetri sono collegate fra 1 e 3: il loro consumo è compreso sia nella P_{13} che nella P_{31}.

Una correzione che comprenda tutte le potenze (attive e reattive) assorbite dagli strumenti può essere eseguita sui valori totali delle potenze (rispettivamente attive e reattive) ed anche sulle potenze di fase, purché le letture degli strumenti siano state eseguite tutte nelle stesse condizioni di consumo.

b) Errori strumentali. Se c è la classe dei due wattmetri, supposti uguali, con valori nominali rispettivamente V_0 e I_0 (e $\cos\varphi_0 = 1$), il massimo errore assoluto che si può commettere, in ognuna delle due letture, è:

$$E_w = \frac{c}{100} V_0 I_0 \,. \qquad [6\text{-}33]$$

L'incertezza percentuale corrispondente sulla somma algebrica delle due indicazioni è quindi:

$$e_p = \pm \frac{2cV_0I_0}{\sqrt{3}VI\cos\phi} = \pm 1,1 \frac{cV_0I_0}{VI\cos\phi} \qquad [6\text{-}34]$$

praticamente analoga a quella calcolata [6-14] per un solo wattmetro, delle stesse caratteristiche, inserito in un circuito monofase, con gli stessi valori di V, I e $\cos\varphi$.

Viene però a mancare, nel sistema trifase, la possibilità di ridurre notevolmente tale incertezza con gli strumenti a basso $\cos\varphi_0$ o sovraccaricabili; le indicazioni dei due wattmetri non tendono infatti a zero, al diminuire del fattore di potenza, ma, per esempio, in un sistema equilibrato, ai valori rispettivamente di $+0,5VI$ e $-0,5VI$. Si ricorre perciò spesso, nelle misure a basso $\cos\varphi$, all'inserzione di tre wattmetri (vedi 6-4,8).

c) In un sistema *simmetrico ed equilibrato*, la presenza dell'incertezza strumentale $\pm E_w$ sulle due letture wattmetriche comporta anche un'incertezza sulla potenza reattiva, che vale $\pm 2\sqrt{3}E_w$ [1]. Le condizioni di errore massimo sulla potenza attiva e su quella reattiva non sono però coincidenti cosicché la $\sqrt{P^2+Q^2}$ è affetta da un'incertezza che vale rispettivamente $\pm 2\sqrt{3}E_w \operatorname{sen}\varphi$ ovvero $\pm 2E_w\cos\varphi$ a seconda della discordanza o concordanza di segno fra gli errori, dello stesso valore assoluto E_w,

[1] Lo stesso vale per tutti i sistemi in cui P e Q siano esprimibili nella forma indicata in 6-3,6 e perciò anche nello schema Barbagelata.

dei due wattmetri; come incertezza relativa, essa risulta sempre minore di quella sulla potenza attiva.

Se la corrente è ricavata attraverso la [6-28], si può porre per la incertezza percentuale e_I:

$$e_I \simeq \pm 1,5 \frac{cV_0I_0}{VI} \pm e_V$$

dove e_V è l'incertezza percentuale sulla lettura voltmetrica; si ha invece un errore maggiore se la corrente viene ricavata dai valori di P, V e $\cos\varphi$.

L'incertezza sulle letture wattmetriche comporta anche un'incertezza sul fattore di potenza, che può essere calcolata, in valore percentuale, dalla relazione [6-25]:

$$e_{\cos\varphi} \simeq 2\frac{cV_0I_0}{VI}\operatorname{sen}\varphi \qquad \text{per } \cos\varphi > 0,5$$

$$\simeq e_p \qquad \text{per } \cos\varphi < 0,5 \,.$$

È tuttavia importante notare che errori maggiori possono essere introdotti, nella determinazione della potenza reattiva e quindi dalle altre grandezze che ne derivano, dall'ipotesi di sistema equilibrato, quando ciò non sia vero, ossia quando le differenze $(P_{32}-P_{13})$ e $(P_{12}-P_{31})$ siano maggiori degli errori strumentali dei wattmetri.

d) Errori di fase. Se i due wattmetri hanno lo stesso errore di fase ε, le misure possono pensarsi come risultanti da due wattmetri ideali, sottoposti ad un sistema di tensioni ruotate di un angolo ε rispetto al sistema reale. Si ha allora:

$$P' = \sqrt{3}VI\cos(\varphi+\varepsilon) = P\cos\varepsilon - Q\operatorname{sen}\varepsilon \simeq P - \varepsilon Q \,;$$

ne risulta un errore:

$$\eta = \frac{P'-P}{P} = -\varepsilon\frac{Q}{P} = -\varepsilon\operatorname{tang}\phi$$

uguale a quello che si verifica nelle misure monofasi.

e) Sistemi con quattro fili. Accade talvolta che il sistema sia solo apparentemente a tre fili ed abbia in realtà un quarto conduttore. Questo è ad esempio il caso delle linee aeree ad alta tensione, in cui la terra può costituire un circuito di ritorno per le correnti capacitive delle tre fasi.

In questo caso l'inserzione Aron misura la potenza:

$$P' = P_{12} + P_{32} = P - 3(\dot{E}_2 \times \dot{I}_0)$$

che dipende dal valore della corrente di sequenza zero I_0 ($3I_0$ è la corrente nel quarto filo) e dalla sua fase rispetto alla tensione $\dot{E}_2$ del conduttore

in cui manca l'inserzione wattmetrica. L'errore può perciò sussistere anche se la corrente fra i conduttori di fase e il quarto filo sia dovuta a pure reattanze (p. es. capacità parassite).

6-4,7. *Sistemi dissimmetrici e squilibrati.*

Un sistema dissimmetrico e squilibrato rappresenta il caso più generale di un sistema a tre fili; la determinazione completa di tutti i suoi elementi risulta complessa e ci si limita perciò talvolta a misurare, oltre alla potenza reale, che è sempre:

$$P = P_{12} + P_{32}$$

la media delle tre tensioni e quella delle tre correnti. In questo caso, evidentemente, non si da luogo ad una determinazione della potenza reattiva e del fattore di potenza.

La rappresentazione corretta più semplice è quella grafica [1], per la quale si impiegano sette letture (tre misure voltmetriche e le quattro wattmetriche indipendenti); date infatti le tre tensioni concatenate, si può disegnare il relativo triangolo ed individuare il centro stella ideale, dall'intersezione delle mediane (fig. 6-36). Dalle letture wattmetriche si ricavano le potenze di fase, dopo di che la determinazione delle correnti si esegue con lo stesso procedimento indicato in 6-4,4; dal diagramma si ricavano poi graficamente le potenze reattive delle singole fasi e la potenza reattiva globale.

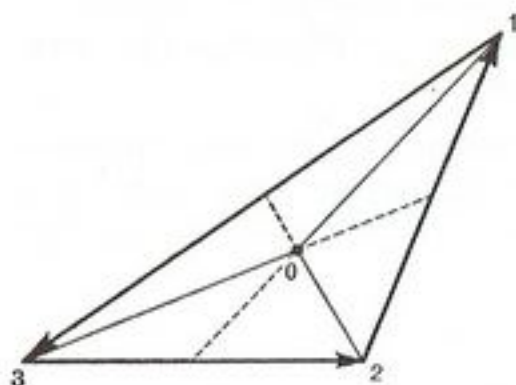



Fig. 6-36

Si può anche procedere per via analitica, misurando le grandezze $V_{12}, I_1, P_{12}, V_{32}, I_3, P_{32}$, come quelle di due sistemi monofasi indipendenti; la potenza reattiva globale è:

$$Q = Q_{12} + Q_{32} = \sqrt{(V_{12}I_1)^2 - P_{12}^2} + \sqrt{(V_{32}I_3)^2 - P_{32}^2}\,.$$

Il fattore di potenza globale del sistema è, corrispondentemente:

$$\cos\phi = \frac{P}{\sqrt{Q^2 + P^2}}\,.$$

[1] La soluzione analitica si basa sulle relazioni generali che esistono fra le potenze attive e reattive, nelle varie inserzioni dei wattmetri, con tensioni note e comunque sfasate fra loro, tale sfasamento essendo ricavato, con il teorema di Carnot (vedi 6-2,6) dal triangolo delle tensioni.

Occorre però essere sicuri della concordanza di segno delle potenze reattive Q_{12} e Q_{32}; questo controllo si può fare con uno dei metodi illustrati in 6-2,2 per i sistemi monofasi. Si può però verificare misurando anche la corrente I_2 e la tensione V_{13}, in modo da determinare i due triangoli delle tensioni e delle correnti, che possono essere orientati reciprocamente, per via grafica, secondo le indicazioni fornite dalle P_{12} e P_{32} (fig. 6-37).

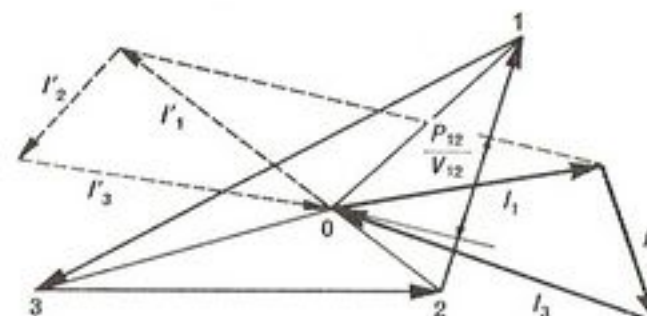



Fig. 6-37

6-4,8. *Uso di tre wattmetri.*

In base a quanto illustrato in 6-3,1, è possibile determinare la potenza di un sistema trifase a tre fili mediante l'impiego di 3 wattmetri, collegati, come in fig. 6-38, rispetto ad un punto O comune. La posizione del centro stella fittizio O è indifferente, purché sia la stessa per tutti e tre gli strumenti; spesso essa è determinata dalle impedenze dei tre circuiti wattmetrici, che devono perciò restare immutati durante le tre letture. La potenza globale è data dalla somma algebrica delle tre potenze così misurate.

Questo schema consente, nel caso di misura a basso fattore di potenza, di usare strumenti per basso $\cos\varphi$ o sovraccaricabili, in modo praticamente analogo a quanto avviene nei circuiti monofasi.

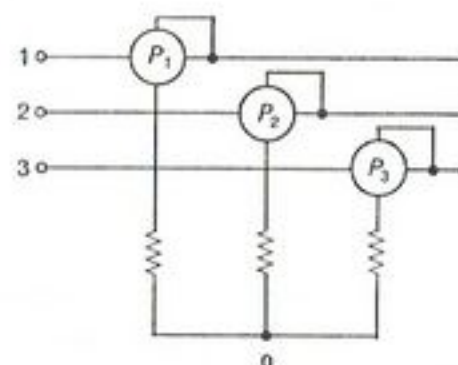



Fig. 6-38

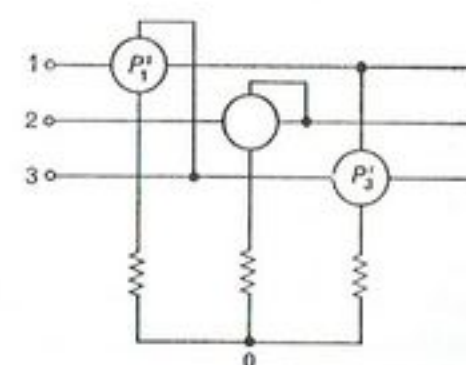



Fig. 6-39

In un sistema con tensioni simmetriche, se i tre wattmetri hanno uguali circuiti voltmetrici, il punto O cade nel centro stella ideale del sistema.

In questo caso, scambiando due connessioni wattmetriche (fig. 6-39),

si misura:

$$P_1' = \dot{E}_3 \times \dot{I}_1 = j\frac{\dot{V}_{12}}{\sqrt{3}} \times \dot{I}_1 = \frac{-Q_{12}}{\sqrt{3}}$$

$$P_3' = \dot{E}_1 \times \dot{I}_3 = j\frac{\dot{V}_{23}}{\sqrt{3}} \times \dot{I}_3 = \frac{Q_{32}}{\sqrt{3}}.$$

Risulta perciò, dalla [6-22]:

$$Q = Q_{12} + Q_{32} = \sqrt{3}(P_3' - P_1')$$

relazione che consente la misura della potenza reattiva globale, anche per sistemi squilibrati.

6-4,9. *Misure con trasformatori di tensione e di corrente.*

• La misura delle potenze, in un sistema trifase ad alta tensione, con l'inserzione Aron, richiede l'uso di due trasformatori di tensione e due trasformatori di corrente, secondo lo schema di fig. 6-40.

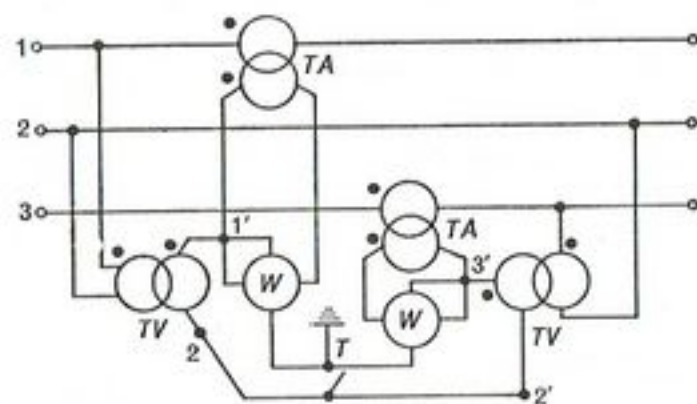



Fig. 6-40

Il punto T, comune ad entrambi gli strumenti, può essere messo al potenziale di terra; aprendo la connessione fra 2 e T si può controllare il segno delle letture wattmetriche.

Analoghi schemi possono essere usati per le inserzioni più complesse, in sistemi a tre o a quattro fili.

Mediante le proprietà dei trasformatori di misura, di consentire la somma vettoriale di più grandezze si possono realizzare alcuni schemi particolari; ad esempio, se il sistema è simmetrico ed equilibrato, lo strumento inserito

come in fig. 6-41 indica:

$$P = \dot{V}_{13} \times (\dot{I}_1 - \dot{I}_3) = \dot{E}_1(1 - \alpha) \times \dot{I}_1(1 - \alpha) = (1 - \alpha)^2 \dot{E}_1 \times \dot{I}_1 = 3EI\cos\varphi$$

Il wattmetro misura perciò direttamente la totale potenza assorbita dal carico.

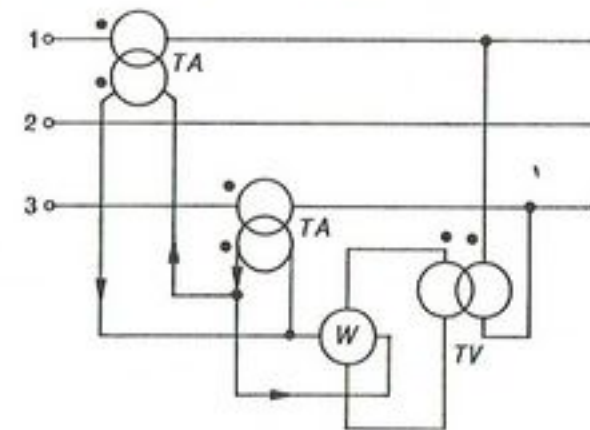



Fig. 6-41

6-5. **Misure di energia.**

6-5,1. *Contatori.*

La misura dell'energia elettrica assorbita da un dato carico, in un determinato intervallo di tempo, può essere eseguita integrando i valori della potenza che transita in un'opportuna sezione di misura.

Tutti gli schemi, precedentemente illustrati, per le misure di potenza in sistemi in c.c., in c.a. monofase o trifase, possono quindi essere estesi alla corrispondente misura di energia, qualora ai wattmetri indicatori siano sostituiti opportuni strumenti wattmetrici integratori, detti *contatori*.

I contatori elettrodinamici, già visti in 3-6,5, sono limitati al campo delle correnti continue mentre nel caso, molto più diffuso, di grandezze alternate sono impiegati contatori più semplici ed economici, basati sul principio degli strumenti ad induzione.

La costruzione di questi strumenti deve infatti rispondere alle esigenze contrastanti di una lavorazione in serie a basso costo (produzione annua italiana circa 1,5 milioni di sistemi) che garantisca tuttavia una buona precisione anche per un lungo periodo di funzionamento (15-20 anni) senza revisioni o manutenzione.

I limiti d'errore ammissibili hanno, d'altra parte, notevole interesse economico essendo la misura d'energia la base per gli scambi economici fra produttori ed utenti di energia elettrica e per la riscossione delle imposte che gravano su alcuni tipi di consumi.

6-5,2. *Strumenti ad induzione.*

Negli strumenti ad induzione, la coppia motrice trae origine dalle azioni esercitate su un disco conduttore da un insieme di flussi variabili, fra loro sfasati nel tempo e nello spazio.

Si consideri un disco di materiale conduttore (fig. 6-42) libero di ruotare, con asse in O, nel traferro di due elettromagneti, che vi producono i flussi ϕ_a e ϕ_b, che si suppongono sinusoidali, di pulsazione ω, sfasati fra loro dell'angolo β.

Questi flussi inducono nel disco delle correnti, il cui andamento dipende dalle geometrie degli elettromagneti e del disco; quest'ultimo si può tuttavia assimilare, agli effetti elettrici, ad un avvolgimento secondario, di una sola spira, dotata di resistenza R e reattanza X; questi parametri si possono considerare di ugual valore, per i due elettromagneti, se essi hanno egual forma e posizione rispetto al disco.

Fig. 6-42

Si può quindi scrivere, per le correnti indotte:

$$\dot{I}_{2a} = \frac{-j\omega\dot{\phi}_a}{R+jX} \qquad \dot{I}_{2b} = \frac{-j\omega\dot{\phi}_b}{R+jX}$$

esse risultano sfasate, nei riguardi delle rispettive forze elettromotrici E_{2a} ed E_{2b}, dello stesso angolo γ per cui è:

$$\cos\gamma = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}$$

come indicato in fig. 6-43.

La corrente indotta da un elettromagnete dà luogo ad una coppia motrice per effetto del flusso prodotto dall'altro elettromagnete; si vede chiaramente dalla fig. 6-42 come — in virtù della posizione reciproca dei due

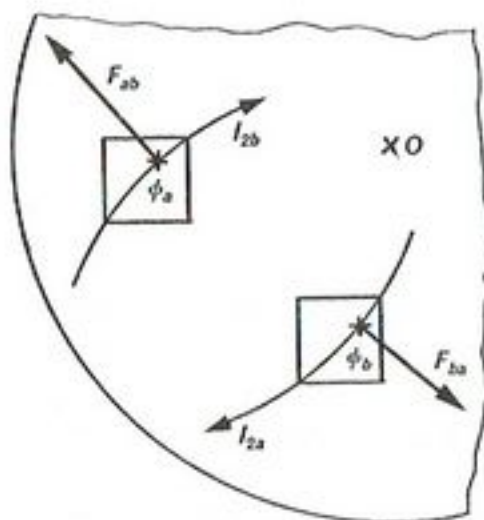
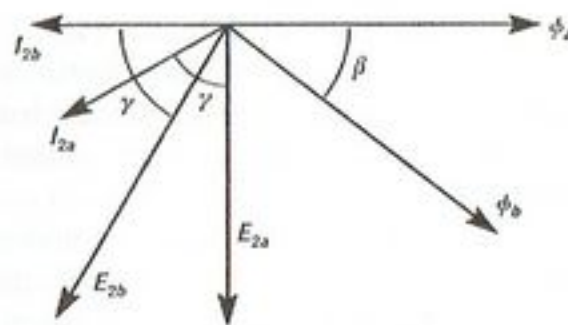



Fig. 6-43

elettromagneti — la coppia risultante è la differenza delle due coppie istantanee, ossia:

$$c > \varphi_b i_{2a} - \varphi_a i_{2b}\,.$$

Poiché correnti e flussi sono sinusoidali nel tempo, il valore medio della coppia risulta:

$$C_m = \phi_b I_{2a} \cos\widehat{\phi_b I_{2a}} - \phi_a I_{2b} \cos\widehat{\phi_a I_{2b}}\,.$$

Gli angoli esistenti fra flussi e correnti possono ricavarsi dal diagramma vettoriale di fig. 6-43 e si ha:

$$C_m = \phi_a\phi_b \frac{\omega}{\sqrt{R^2+X^2}}[\cos(90+\gamma-\beta) - \cos(90+\gamma+\beta)];$$

risulta allora:

$$C_m = 2\phi_a\phi_b \frac{\omega}{\sqrt{R^2+X^2}} \cos\gamma \operatorname{sen}\beta = 2\frac{\omega R}{R^2+X^2}\phi_a\phi_b \operatorname{sen}\beta\,.$$

Lo strumento possiede quindi una coppia motrice:

$$C_m = \phi_a\phi_b \operatorname{sen}\beta \qquad [6\text{-}35]$$

proporzionale cioè al valore del prodotto esterno dei due vettori ϕ_a e ϕ_b; perché la coppia abbia valore non nullo occorre pertanto che i due flussi siano sfasati fra loro nel tempo.

La costante di proporzionalità dipende tuttavia direttamente dalla pulsazione ω (la coppia è nulla per frequenza zero) mentre il termine $R/(R^2+X^2)$ dipende, oltre che da ω, dalla resistività del disco e quindi dalla sua temperatura.

Lo strumento che ne risulta è però semplice e robusto, perché si possono ottenere coppie elevate senza contatti elettrici striscianti, la parte mobile essendo ridotta al semplice disco conduttore.

La [6-35] può anche essere ottenuta dalla teoria del campo rotante, ciò che giustifica il nome di strumenti a campo Ferraris, talvolta ad essi attribuito.

Si consideri, a tal proposito, la forma costruttiva di fig. 6-44, che talvolta sostituisce la più comune disposizione di fig. 6-42. Il rotore, costituito da un cilindro conduttore d'alluminio, è sottoposto all'azione di due flussi alternativi ϕ_a e ϕ_b, sfasati di 90° nello spazio e dell'angolo β nel tempo.

Essi possono, come è noto, scomporsi in due flussi di ampiezza costante, ϕ_d e ϕ_s, che ruotano con velocità angolare ω, rispettivamente in senso destrorso e sinistrorso; il cilindro risulta perciò sottoposto alla differenza

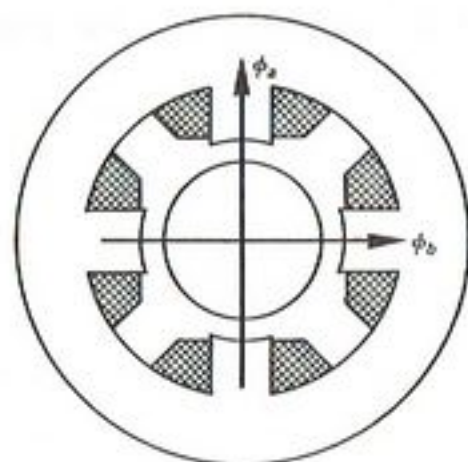



Fig. 6-44

Fig. 6-45

fra le coppie motrici dovute a questi due flussi:

$$C_m = \phi_d^2 - \phi_s^2 \,;$$

ognuna di queste coppie è infatti proporzionale al quadrato del flusso, secondo un coefficiente che dipende dalla geometria del sistema, dalla resistività del materiale che costituisce il cilindro, nonché dalla frequenza.

Si ha, come risulta dalla disposizione di fig. 6-45:

$$\phi_d^2 = \left(\frac{\phi_a}{2} + \frac{\phi_b}{2}\operatorname{sen}\beta\right)^2 + \left(\frac{\phi_b}{2}\cos\beta\right)^2$$

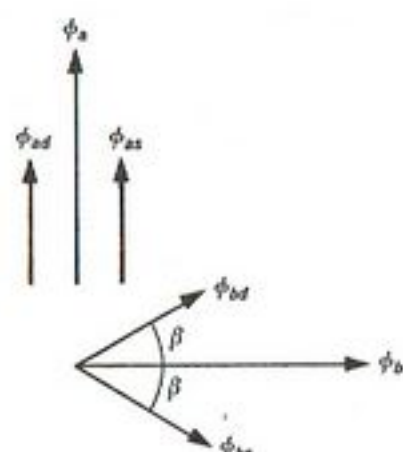
$$\phi_s^2 = \left(\frac{\phi_a}{2} - \frac{\phi_b}{2}\operatorname{sen}\beta\right)^2 + \left(\frac{\phi_b}{2}\cos\beta\right)^2$$

da cui si ottiene nuovamente la [6-35].

In realtà, la composizione dei vari termini è valida per le f.m.m., mentre i flussi sono distorti dalle disuniformità del circuito magnetico lungo il traferro.

6-5,3. *Contatore ad induzione.*

Per realizzare una coppia motrice proporzionale alla potenza che fluisce in un circuito monofase con tensione V e corrente I, sfasate fra loro dell'angolo φ, occorre realizzare una coppia di elettromagneti in cui sia:

$$\left.\begin{aligned} \phi_a &\equiv I \\ \phi_b &\equiv V \\ \operatorname{sen}\beta &= \cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad [6\text{-}36]$$

La prima condizione è facilmente verificata poiché, a causa dei traferri, il flusso dell'elettromagnete è, con buona approssimazione, proporzionale alla corrente di eccitazione; le altre due condizioni potrebbero essere realizzate qualora $\dot\phi_a$ fosse in fase con $\dot I$ e fosse:

$$\dot V = j\omega\dot\phi_b \qquad [6\text{-}37]$$

nel qual caso verrebbe anche in parte corretta l'influenza della frequenza sulla coppia motrice.

In pratica però, la corrente $\dot I$ è sfasata in anticipo dell'angolo δ rispetto al flusso $\dot\phi_a$, per effetto delle componenti attive sia della corrente magnetizzante che della I_{2a} (fig. 6-46), mentre la relazione [6-37] potrebbe esser realizzata, per un elettromagnete semplice, solo in assenza di fenomeni dissipativi.

Fig. 6-46

Si consideri invece la disposizione di fig. 6-47 in cui il flusso utile ϕ_b costituisce solo una parte del flusso totale che interessa il resto dell'elettromagnete e che si concatena con l'avvolgimento di eccitazione. La parte ϕ_b', che non investe il disco, può esser considerata come un flusso disperso, legato ad una reattanza di dispersione X_d dell'avvolgimento stesso.

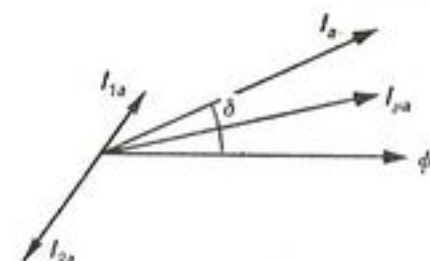
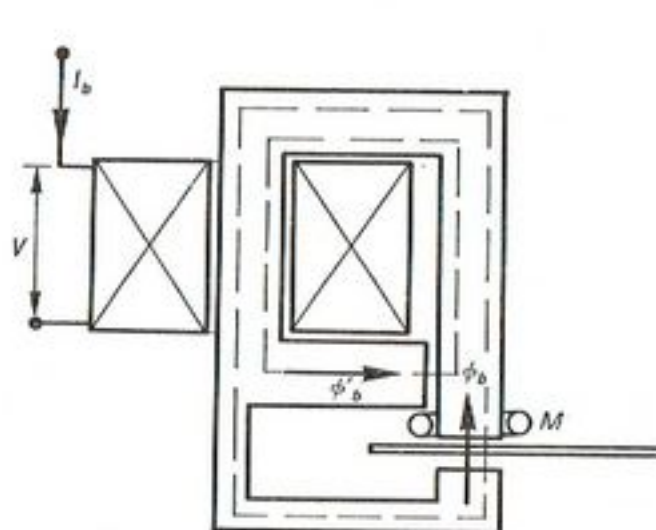
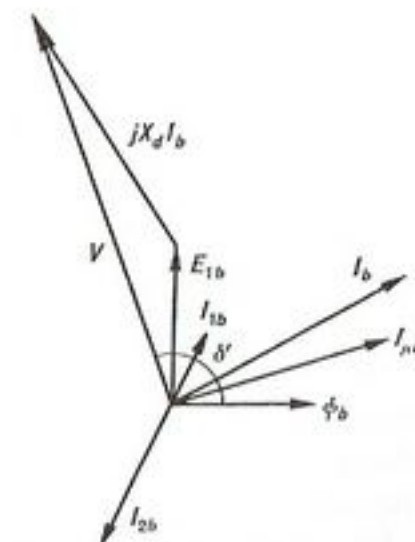



Fig. 6-47 Fig. 6-48

L'angolo di sfasamento δ' fra la tensione V e il flusso ϕ_b può allora raggiungere e superare i 90°, come si vede nel diagramma vettoriale di fig. 6-48; il suo valore può essere regolato mediante un anello M, di resistenza varia-

bile, in modo che risulti:

$$\delta' = 90 + \delta$$

cosicché si ha:

$$\beta = \delta' - \delta - \varphi = 90 - \varphi .$$

L'anello di regolazione può essere montato sia sull'elettromagnete voltmetrico che su quello amperometrico.

Per integrare la potenza, la coppia resistente deve risultare proporzionale alla velocità di rotazione dn/dt del disco; ciò si ottiene facendo passare il disco stesso fra le espansioni di un magnete permanente (fig. 6-49); a regime, è allora:

$$P = \frac{dn}{dt}$$

e perciò:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \int_{n_1}^{n_2} dn = n_2 - n_1$$

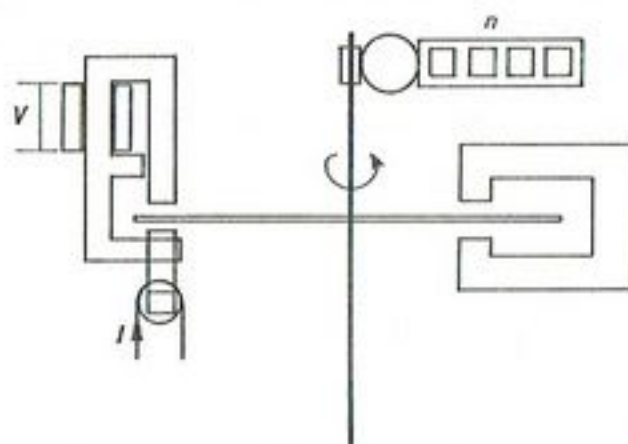



Fig. 6-49

L'indicazione dell'energia fluita nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ è fornita dal numero di giri che il disco ha effettuato nello stesso intervallo; questo è indicato da un contagiri meccanico, a ruote dentate, che fornisce un'indicazione numerica, proporzionale all'energia da misurare.

La coppia frenante dipende dalla resistività del disco e perciò dalla sua temperatura: questo effetto compensa però in parte l'analogo effetto della temperatura sulla coppia motrice.

Un contatore, che debba funzionare in reti a tensione costante e carico variabile, presenta, in funzione del valore della corrente che lo attraversa, delle curve di errore del tipo di fig. 6-50; ai bassi carichi, le coppie

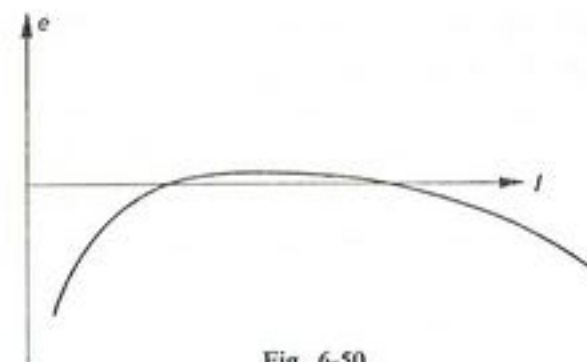



Fig. 6-50

d'attrito rallentano il moto del disco e tendono ad arrestarlo al di sotto di un valore limite della coppia motrice; agli alti carichi, si fa sentire l'influenza della coppia frenante dovuta al moto del disco, con velocità dn/dt, sotto il flusso amperometrico ϕ_a; questa coppia risulta:

$$C_e = \phi_a^2 \frac{dn}{dt} ;$$

l'analogo termine, dovuto al flusso voltmetrico ϕ_b è invece praticamente costante.

Tutta la curva degli errori può essere spostata, parallelamente a sé stessa, spostando la posizione del magnete, radialmente, sul disco.

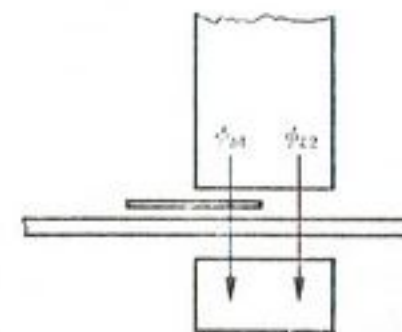
Per limitare gli errori dovuti alla coppia d'attrito, che si può supporre in prima approssimazione costante, si dispone una coppia, pure costante, fornita dall'elettromagnete voltmetrico; ciò si ottiene con una lamina metallica asimmetrica rispetto all'elettromagnete stesso (fig. 6-51); essa produce un effetto simile all'anello di fig. 6-47 e dà luogo ad una coppia motrice costante (se ϕ_b è costante).

Per evitare che questa compensazione possa far girare il disco a vuoto, si dispone inoltre sull'asse una lamina ferromagnetica, che viene debolmente attratta dall'elettromagnete voltmetrico e che blocca il disco in modo da far comparire, sul fronte del contatore, un segno di riferimento.

Fig. 6-51

La regolazione della coppia compensatrice, che avviene spostando la lamina, è eseguita in modo che il contatore stia fermo a vuoto, e giri allo 0,5% del carico nominale (vedi 8-2,3).

La compensazione della coppia frenante amperometrica si realizza disponendo un derivatore magnetico saturabile sull'elettromagnete amperome-

trico; si ottiene un flusso ϕ_a che cresce più che proporzionalmente con I e che fa crescere la coppia motrice più di quanto aumenti la coppia resistente.

Grazie a disposizioni e materiali particolari, si sono ottenuti contatori che mantengono la loro precisione fino a una corrente I_M maggiore della corrente nominale (contatori a campo esteso, o sovraccaricabili con valori di sovraccarico da 3 a 10 volte) senza perderla ai bassi carichi.

6-5,4. *Caratteristiche costruttive.*

Un primo problema costruttivo, in un contatore, è la limitazione della coppia d'attrito; i perni, e soprattutto quello inferiore, che sopporta il peso dell'equipaggio, devono essere costruiti con particolare cura, per non presentare usura nel tempo anche in assenza di lubrificazione. Si usano, in generale, per il perno inferiore, delle sfere di rotolamento; il perno superiore, che serve da guida, può scaricare parte del peso dell'equipaggio utilizzando sospensioni magnetiche.

L'attrito dell'integratore, che non deve superare qualche parte in 10^{-4} della coppia motrice alla corrente nominale, si riduce con opportuno proporzionamento dei rotismi e con l'impiego, nella loro costruzione, di parti in materia plastica anziché in metallo.

Il magnete permanente è spesso racchiuso in uno schermo metallico, per evitare gli effetti smagnetizzanti di campi esterni; a tal scopo servivano un tempo le calotte metalliche che vengono ora sostituite da calotte in plastica disponendo la schermatura in vicinanza del magnete.

La costruzione dei circuiti magnetici e relativi avvolgimenti deve tener conto dei limiti imposti ai consumi voltmetrici ($<$ 1,2 W) che gravano come carico fisso non registrato (l'inserzione è usualmente eseguita con la voltmetrica a monte).

In ogni contatore occorrono i dispositivi che permettano la messa a punto della fase fra flusso voltmetrico e tensione applicata (o del flusso amperometrico rispetto alla corrente), la regolazione della coppia motrice ausiliaria di compensazione degli attriti nonché lo spostamento in senso radiale del magnete freno.

Ogni contatore deve portare incisa la sua costante ossia il numero di giri che corrisponde a 1 kWh. In alcune norme straniere si preferisce invece indicare l'inverso (kWh per giro).

6-5,5. *Caratteristiche di errore dei contatori.*

Anche per i contatori ad induzione si hanno classi diverse di precisione, con caratteristiche prescritte dalle Norme.

Per i contatori di uso più comune, denominati di classe 2, gli errori, a tensione e frequenza nominali, ad una temperatura di riferimento (20° ± 10), a $\cos\varphi = 1$ e a $\cos\varphi = 0{,}5$ in ritardo, dovrebbero restare entro i limiti della Tabella 6-2.

Tabella 6-2

I	$\cos\varphi$	e %
$0{,}1I_n \div I_M$	1	±2
$0{,}05I_n$	1	±2,5
$0{,}2I_n \div I_M$	0,5	±2
$0{,}1I_n$	0,5	±2,5

Quando variano le condizioni di funzionamento, si possono avere errori maggiori; le variazioni delle grandezze d'influenza (temperatura, frequenza, tensione, ecc.) modificano infatti sia l'ampiezza che la fase delle diverse grandezze elettriche proprie del contatore. Mentre l'effetto di variazioni di ampiezza è più o meno facilmente determinabile, quello delle variazioni di fase dipende in buona parte dal modo con cui è realizzata la compensazione e dal fattore di potenza del carico.

Se, per esempio, a parità di flussi, si aumenta la frequenza di alimentazione nel rapporto k, la coppia motrice varia all'incirca nello stesso rapporto, poiché aumentano in modo praticamente proporzionale le correnti indotte; varia però la fase di $\dot{I}$ rispetto a ϕ_a e di $\dot{V}$ rispetto a ϕ_b; l'errore di fase che ne risulta è la differenza fra quelli dovuti ai due elettromagneti; esso può essere positivo o negativo, a seconda delle modalità con cui sono realizzati.

Per la stabilità di un contatore, nei riguardi sia dell'invecchiamento che dell'effetto di sovraccorrenti, è di particolare importanza la natura e la forma del magnete; si usano leghe speciali, invecchiate artificialmente e protette, mediante supporti metallici, dall'azione dei campi esterni.

Le Norme, sia nazionali che internazionali, prescrivono per i contatori una serie di prove di tipo, che ne omologhino la conformità a tutte le prescrizioni delle Norme stesse, in particolare nei riguardi degli effetti delle grandezze d'influenza.

Per l'accettazione di una partita di contatori, uguali ad un prototipo omologato, si esegue invece in genere un collaudo statistico (vedi 8-6,6) eseguendo una serie di prove su n campioni, prelevati a caso dal lotto di N elementi (per es. $n = 30$ per $100 < N < 500$). Nessun difetto è ammesso nelle prove di isolamento o sulla costante del contatore, mentre

vi sono opportuni limiti di accettazione per altri difetti (marcia a vuoto, avviamento, precisione, ecc.).

Per garantire la qualità dei contatori di uso più comune, il cui collaudo sarebbe troppo oneroso per il singolo utente, si è introdotto da vari anni in Italia, da parte dell'Istituto del Marchio di Qualità, un controllo che ripete periodicamente le prove di tipo ed effettua prelievi mensili di campioni della produzione, per stabilirne la conformità ai livelli di qualità previsti.

Molte cause di errore proprie dei contatori ad induzione possono tuttavia essere superate con particolari accorgimenti costruttivi e con l'impiego di materiali di qualità. Per scopi particolari, si possono pertanto costruire *contatori campioni* con valori limitati degli errori propri e con limitata sensibilità alle varie grandezze d'influenza.

A differenza dei contatori usuali, essi possono essere provvisti di portate multiple, sia in corrente che in tensione, ed essere equipaggiati di dispositivi di avviamento, di arresto e di riporto a zero dell'indice. Questo è normalmente del tipo ruotante con più numeratori e lettura anche della frazione di giro.

6-5,6. *Contatori polifasi per energia attiva e reattiva.*

La misura dell'energia in un sistema polifase può essere eseguita sommando le indicazioni di più contatori monofasi, inseriti nei modi già indicati per le misure wattmetriche. La somma dovendo essere algebrica, ogni contatore deve essere in grado di ruotare in entrambi i sensi. Si preferiscono però spesso contatori polifasi (a due o a tre equipaggi, per i sistemi trifasi); essi comprendono più gruppi di elettromagneti agenti su dischi calettati sullo stesso asse, con un unico numeratore.

I più importanti problemi che caratterizzano questi contatori sono rappresentati dalla necessità di realizzare una corretta ripartizione della coppia fra i sistemi motori, evitando interferenze. Solo così la misura dell'energia resta corretta per ogni possibile condizione di squilibrio del carico. Le interferenze possono sorgere per azioni fra le correnti indotte dagli elettromagneti di una fase con il flusso prodotto dagli elettromagneti di una fase adiacente; esse vengono evitate disponendo di un disco per ogni fase o, quanto meno, montando due gruppi di elettromagneti in posizioni diametralmente opposte di un disco. La maggior parte dei contatori prevede tuttavia un prefissato senso ciclico per i vari gruppi motori.

L'equilibrio fra i diversi sistemi si ottiene suddividendo correttamente fra essi le varie compensazioni. Il controllo si esegue con un carico squilibrato in modo semplice (ad esempio correnti uguali ed opposte nelle due amperometriche).

Nei sistemi trifasi simmetrici è possibile, come si è visto in 6-3,5, ricavare la potenza reattiva da misure wattmetriche; è quindi possibile, con opportune inserzioni di contatori monofasi, misurare anche l'energia reattiva. Vi sono, a questo fine, numerosi schemi, ma in ogni caso la misura è corretta solo se è rispettata la simmetria delle tensioni del sistema trifase e se l'inserzione è eseguita secondo il senso ciclico prefissato.

Fig. 6-52

Giova tuttavia ricordare che la misura dell'energia reattiva ha solo lo scopo di determinare il fattore di potenza medio di un carico, ai fini di una sua eventuale penalizzazione; la precisione della misura non è perciò essenziale.

Una semplice inserzione, largamente usata nella pratica, è quella Righi (fig. 6-52); per la [6-30], la coppia del terzo contatore, detto anche in inserzione C, è proporzionale a:

$$P_{2(31)} = P_{21} - P_{23} = P_{13} - P_{31}$$

e quindi si ha, per la [6-31]:

$$\sqrt{3}Q = P_{32} - P_{12} + 2P_{2(31)}.$$

In tal modo l'energia reattiva è data dalle letture A, B, C dei tre contatori, con la relazione:

$$W_r = \frac{A - B + 2C}{\sqrt{3}};$$

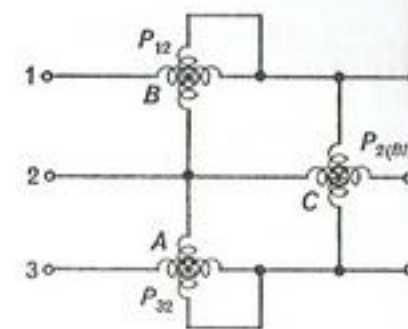
l'inserzione è particolarmente semplice e pratica perché i contatori A e B indicano, con la loro somma, l'energia attiva e il rapporto:

$$\beta = \frac{A - B}{C}$$

che vale uno nel caso di sistema equilibrato, fornisce un'ulteriore indicazione sulla natura del carico.

6-5,7. *Contatori speciali.*

I problemi di tariffazione dell'energia elettrica richiedono spesso l'impiego di contatori speciali; i più importanti sono:

- i contatori con indicatore di massima, che servono a determinare — e di conseguenza a fatturare — oltre all'energia consumata, la massima potenza richiesta dall'utente;

– i contatori differenziali, che consentono di determinare solo l'energia assorbita al di sopra di determinati livelli di potenza;

– i contatori a doppia tariffa, che consentono di separare i prelievi avvenuti in ore od in condizioni particolari.

Tutte queste caratteristiche si ottengono con l'aggiunta di particolari dispositivi elettrici o meccanici, che sono possibili grazie alle elevate coppie motrici ottenibili dai contatori ad induzione.

Per gli indicatori di massima si tratta, in realtà, di misurare non tanto la massima potenza istantanea, quanto la massima energia assorbita in intervalli di tempo prefissati (di solito 15'). Il contatore trascina perciò nel suo moto anche un indice che, dopo ogni intervallo di tempo, viene riportato a zero da un meccanismo ad orologeria. Un secondo indice folle o un apposito numeratore segna la massima posizione raggiunta.

Per le grosse utenze industriali, sono in uso da alcuni anni contatori trifasi di tipo statico, generalmente basati su un moltiplicatore a divisione di tempo (vedi 5-5,6), seguito da un integratore. Un comparatore provoca in uscita una serie d'impulsi il cui numero è proporzionale all'energia fluita (similmente a quanto descritto in 4-5,4). Questi impulsi, che vengono totalizzati da un numeratore, hanno, ai fini della taratura, la stessa funzione dei giri del disco nel contatore ad induzione.

I contatori statici consentono precisioni corrispondenti alle classi 0,2 e 0,5, in un ampio campo di tensioni e di correnti, con limitata influenza di eventuali armoniche; hanno inoltre la possibilità di misurare correttamente energia positiva e negativa e possono perciò essere impiegati nei nodi di scambio.

Con opportuni circuiti elettronici, o con l'impiego di un microprocessore, questi strumenti consentono l'applicazione di tariffe complesse, su base oraria, giornaliera e mensile. Anche la misura della massima energia assorbita in 15 minuti può avvenire in maniera scorrevole.

6-5,8. *Comportamento in transitorio.*

Le misure di energia che si effettuano presso utenze industriali hanno raramente un andamento uniforme nel tempo; a parte i transitori, vi sono carichi, anche elevati, che possono agire per tempi limitati, da frazioni di secondo a qualche secondo (esempio tipico le saldatrici). Interessa perciò esaminare più in dettaglio il comportamento di un contatore ad induzione nel caso in cui la corrente di carico assuma nel tempo l'andamento in fig. 6-53, caratterizzato da intervalli di tempo t_c a valore di potenza costante e intervalli a potenza nulla.

La caratteristica meccanica del contatore, come integratore, comporta, in linea di principio, una costante di tempo $T_0 = J/N$ (vedi 3-3,5); in tali condizioni l'integrazione avviene correttamente, sia pure con un ritardo T_0; il disco accelera durante il tempo t_c fino alla velocità corrispondente alla potenza di regime, velocità che può non essere raggiunta se t_c è comparabile con T_0; successivamente, anziché fermarsi, nel tempo di riposo il disco rallenta recuperando l'energia cinetica acquistata nel tempo t_c.

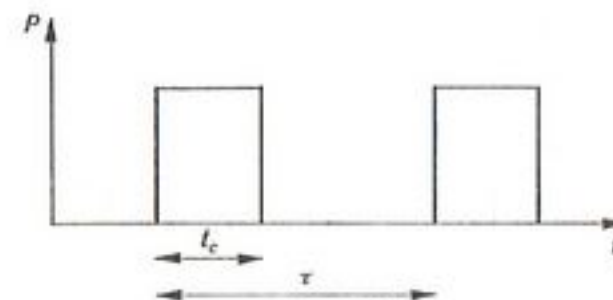



Fig. 6-53

In pratica, le condizioni che si verificano nel periodo di lavoro ed in quello di riposo non si equivalgono perché nel primo è presente, oltre alla coppia frenante dovuta al magnete permanente, quella dovuta all'elettromagnete amperometrico, mentre nel secondo agisce la coppia motrice di compensazione degli attriti che può essere diversa dalla reale coppia d'attrito. Ne risulta, in generale, un errore in più che cresce al diminuire del rapporto t_c/τ; queste considerazioni sono tuttavia corrette solo se il tempo t_c comprende un numero intero di periodi e il carico è tale da permettere al disco di fare almeno un giro completo, nel qual caso diviene trascurabile l'effetto della banderuola d'arresto.

CAPITOLO VII

METODI DI CONFRONTO

7-1. Metodi di zero.

7-1,1. *Principi generali.*

Per molte misure di laboratorio conviene ricorrere, anziché all'uso di strumenti indicatori, a *metodi di confronto* fra la grandezza incognita e una grandezza nota, omogenea alla precedente; il confronto fra queste due grandezze avviene paragonandone gli effetti, in modo da raggiungere una condizione (di equilibrio), che consente di stabilire una ben definita relazione fra esse. L'esempio più semplice di metodo di confronto è costituito dalla bilancia a piatti, in cui si paragonano le coppie prodotte dal peso incognito e da pesi noti, variabili, fino a che — raggiunto l'equilibrio — le due coppie risultano uguali.

Nei circuiti elettrici, il raggiungimento di un equilibrio è indicato, nella maggioranza dei casi, dall'annullarsi della corrente o della tensione in un ramo del sistema. Questi metodi sono perciò, nella maggior parte, dei *metodi di zero*; essi utilizzano degli strumenti solo per indicare il raggiungimento, o meno, di una condizione di equilibrio (rivelatori di zero) (vedi 3-5), e prescindono perciò dalla taratura di tali strumenti.

Per i metodi di confronto si richiedono, in generale:

a) una *grandezza di riferimento* (o campione) da confrontare con la grandezza incognita; è ovvio che la misura avrà una precisione minore, o, al limite, uguale a quella con cui è noto questo campione;

b) degli *organi di regolazione*, che consentano di raggiungere l'equilibrio, quando non sia variabile la stessa grandezza di riferimento; i loro

valori figurano nelle relazioni di equilibrio, per la maggior parte dei casi, sotto forma di un rapporto; questo può essere noto con precisione maggiore di quella con cui sono noti i singoli valori assoluti. Talvolta l'influenza delle grandezze di regolazione può essere ridotta con particolari artifici (metodi di sostituzione, autotaratura, ecc.);

c) un indicatore (*o rivelatore di zero*) capace di segnalare quando sia raggiunto l'equilibrio; ogni strumento richiede però un valore minimo di segnale (corrente o tensione) per dar luogo ad una indicazione percettibile; la condizione di equilibrio sarà quindi apparentemente soddisfatta per tutti quei valori delle grandezze in gioco, per i quali il segnale agente sul rivelatore risulti inferiore a tale soglia. Questa soglia (come valore di corrente, o tensione o potenza) si chiama sensibilità del rivelatore di zero; essa introduce nelle misure un errore fortuito.

7-1,2. *Sensibilità della misura.*

Per quanto detto precedentemente, in ogni metodo di zero interessa valutare entro quali limiti di incertezza può considerarsi realizzato l'equilibrio, ovverossia misurare o calcolare la *minima variazione relativa* della grandezza incognita che si è in grado di percepire intorno ad una (apparente) condizione di equilibrio. Questa grandezza, che indicheremo con σ, si chiama sensibilità della misura ed è funzione non solo delle caratteristiche del rivelatore di zero, ma anche di quelle del circuito che l'alimenta.

La *determinazione sperimentale* della sensibilità si può eseguire facilmente, dopo aver raggiunto l'equilibrio e ottenuto il valore x della grandezza incognita; dando allora un incremento noto Δx alla x (o a qualunque altra grandezza che intervenga allo stesso modo nelle condizioni di equilibrio) si nota una deviazione $\Delta\lambda$ sul rivelatore di zero. Detta quindi $d\lambda$ la minima deviazione percettibile di tale rivelatore, si può scrivere la relazione:

$$\sigma = \frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{\Delta\lambda}\,\frac{\Delta x}{x} \qquad [7\text{-}1]$$

che discende dalla proporzionalità, ammissibile per piccole deviazioni attorno allo zero, fra le deviazioni ($d\lambda$ e $\Delta\lambda$) e le variazioni relative della x (dx/x e rispettivamente $\Delta x/x$).

Per il *calcolo* della sensibilità conviene invece ridurre il circuito, che fa capo ai morsetti del rivelatore di zero, al suo circuito equivalente; la fig. 7-1

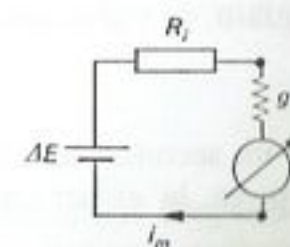



Fig. 7-1

ne dà un esempio in c.c., facilmente estensibile al caso di c.a. La f.e.m. ΔE di tale circuito è la differenza fra due f.e.m. che, in condizioni di equilibrio, si uguagliano: essa è quindi funzione dello scarto $\Delta x/x$ dal valore di equilibrio.

Il rivelatore di zero richiede, per produrre la minima elongazione percettibile $d\lambda$, una corrente $I_m = S_A \, d\lambda$, dove S_A è la sua sensibilità amperometrica (vedi 1-6,6); è quindi facile calcolare quale valore di ΔE (e quindi di $\Delta x/x$) sia necessario per produrre tale corrente:

$$(R_i + g)\, I_m = \Delta E = f\left(\frac{\Delta x}{x}\right). \qquad [7\text{-}2]$$

Per piccole variazioni intorno all'equilibrio, la funzione $f(\Delta x/x)$ si può ridurre ad una semplice relazione di proporzionalità, che deriva da uno sviluppo in serie.

7-1,3. *Metodi di sostituzione.*

In tutti i metodi di confronto, quando sia raggiunta la condizione di equilibrio, si ottiene una relazione fra la grandezza incognita x ed altre grandezze note $a, b, c, \ldots, n$:

$$x = f(a, b, c, \ldots, n).$$

Dopo aver ottenuto l'equilibrio, si sostituisca la grandezza x con un'altra y, ad essa omogenea, nota e variabile, lasciando immutate le $a, b, c, \ldots, n$; l'equilibrio si ottiene per quel valore y_0 di y per cui è:

$$y_0 = f(a, b, c, \ldots, n);$$

sarà perciò:

$$x = y_0$$

indipendentemente dai valori di $a, b, c, \ldots, n$ che intervengono solo ad assicurare l'identità delle due condizioni di equilibrio.

Questo metodo (di sostituzione) si presta anche al confronto indiretto fra due grandezze x ed y che siano di valore pressoché uguale; si abbia infatti, con un qualsiasi metodo di confronto, un primo equilibrio per cui sia:

$$y = f(a, b, c, \ldots, n)$$

e un secondo equilibrio, ottenuto variando *un solo parametro del sistema* (p. es. la c) per cui sia:

$$x = f(a, b, c + \Delta c, \ldots, n) \simeq f(a, b, c, \ldots, n) + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta c.$$

Si ha allora:

$$x = y + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta c \qquad \text{con} \qquad \frac{\partial f}{\partial c}\Delta c \ll y;$$

il rapporto x/y (per ipotesi assai prossimo all'unità) può quindi essere determinato con un errore relativo minore di quello con cui sono noti i valori dei parametri del sistema (1-2A1). In particolare, se esiste una relazione di proporzionalità diretta fra x e c, per cui sia:

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{f}{c}$$

si ha semplicemente:

$$x = y\left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right).$$

7-1,4. *Metodi in corrente continua e alternata.*

Nei paragrafi seguenti, i metodi di zero in corrente continua sono esaminati separatamente da quelli in corrente alternata, benché i primi possano essere considerati come casi particolari dei secondi. I metodi in c.a. presentano infatti, anche limitandosi al caso di correnti e tensioni sinusoidali, caratteristiche particolari che li rendono più complessi e meno precisi dei corrispondenti metodi in c.c.

In primo luogo, i metodi in c.a., non disponendo di campioni di f.e.m. consentono solo misure dei rapporti fra tensioni (o correnti), ma non dei loro valori assoluti.

In secondo luogo, nei metodi in c.a., a parte le diverse caratteristiche proprie dei rivelatori di zero, l'equilibrio risulta più laborioso, in quanto si devono soddisfare relazioni fra grandezze complesse, che richiedono la regolazione contemporanea di due parametri indipendenti (modulo e fase, componenti reali e immaginarie, ecc.).

Inoltre non solo è difficile disporre, in c.a., di elementi di circuito puri, ma fra i vari rami di un circuito possono esistere accoppiamenti induttivi e capacitivi che intervengono a modificare le condizioni di equilibrio, quando si sia in presenza di correnti e tensioni variabili nel tempo.

Questi problemi divengono tanto più importanti quanto più elevata è la frequenza alla quale si eseguono le misure.

7-1,5. *Rivelatori di zero per c.c.*

I più comuni rivelatori di zero per c.c. sono dei galvanometri magnetoelettrici; i tipi più robusti adottano sospensioni a perni e indice metallico: un comune strumento indicatore con portata 10 μA e scala di 100 mm,

rappresenta un rivelatore di zero con una sensibilità amperometrica di 10^{-7} A/div. I tipi di migliore sensibilità hanno invece sospensioni a filo e indice luminoso. Sono anche utilizzati rivelatori di zero elettronici.

Per la scelta di un galvanometro da utilizzare in un dato schema, si tenga presente che esso darà luogo ad una sensibilità della misura tanto migliore quanto più piccola è la sua sensibilità wattmetrica (3-5,2) e quanto maggiore è la potenza che gli può essere trasferita dal generatore equivalente a cui esso può immaginarsi connesso.

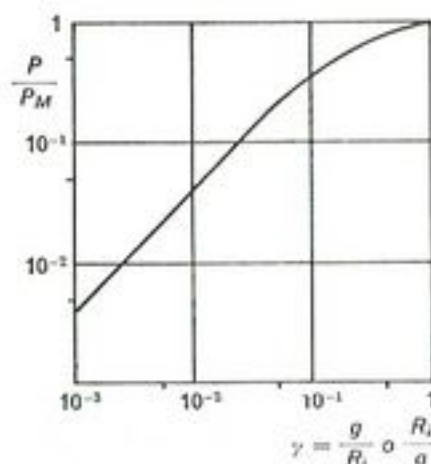



Fig. 7-2

Dato infatti il circuito equivalente di fig. 7-1, la potenza P assorbita dal rivelatore di zero è massima quando la sua resistenza g è uguale alla resistenza interna R_i del generatore equivalente (*adattamento*); per $g \neq R_i$ la potenza disponibile decresce come è illustrato in fig. 7-2. Si riscontra che, per un buon adattamento, è in genere sufficiente che g sia dello stesso ordine di grandezza di R_i.

In ogni caso, essendo S_w la potenza necessaria per muovere il rivelatore di zero di una divisione, ad essa corrisponde nella sorgente una f.e.m.:

$$\Delta E_1 = 2\sqrt{R_i S_w / f(\gamma)}$$

dove $f(\gamma)$ è il rapporto $P/P_M (= 4\gamma/(1+\gamma)^2)$, riportato in fig. 7-2, funzione del solo parametro $\gamma = g/R_i$ (o R_i/g con $\gamma < 1$).

Da questa relazione si deduce che, essendo R_i, S_w e $f(\gamma)$ sotto radice, occorre influire sul loro ordine di grandezza per poter avere variazioni significative di ΔE_1. Si noti anche che, a parità del resto, il circuito che fornisce la migliore sensibilità è quello che ha, nel suo generatore equivalente, la più bassa resistenza interna; conviene cioè rendere R_i piccolo, compatibilmente con le altre esigenze (p. es. dissipazioni termiche, o resistenze di contatto) del circuito di alimentazione.

Quando si usino rivelatori di zero di tipo elettronico, la resistenza d'ingresso è generalmente elevata e il circuito equivalente del generatore lavora praticamente a vuoto. L'ottenimento di una buona sensibilità è allora legato essenzialmente al livello dei disturbi e del rumore presenti.

7-1,6. *Equilibrio in c.c. Interpolazione.*

La ricerca delle condizioni di equilibrio si esegue agendo sugli organi di regolazione, fino ad annullare l'indicazione del rivelatore di zero. Questa

operazione deve essere eseguita con gradualità, restringendo progressivamente i limiti entro cui risulta realizzabile l'equilibrio cercato; questi limiti sono indicati da due posizioni degli organi di regolazione, in corrispondenza delle quali si inverte il segno dell'indicazione sul rivelatore di zero.

Infatti, la condizione di equilibrio si ottiene, nei metodi per c.c., bilanciando fra loro due grandezze che tenderebbero a produrre, se agenti separatamente, correnti di opposto segno sul rivelatore di zero; il valore della regolazione corrispondente all'equilibrio è quindi intermedio fra valori che provocano deviazioni di opposto segno. Per giungere rapidamente all'equilibrio è perciò necessario procedere ordinatamente, dalla regolazione più grossolana alla più fine, eventualmente aumentando gradatamente la sensibilità.

Può accadere che la regolazione, essendo discontinua, non consenta di arrivare allo zero; si ha cioè per un valore a_1 dell'elemento regolabile una deviazione λ_1, per il successivo valore a_2, una deviazione λ_2 di segno opposto. Quando le deviazioni sono piccole, è in generale lecita un'interpolazione lineare fra di esse; si assume allora che il valore corrispondente all'equilibrio sia:

Fig. 7-3

$$a = a_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}(a_2 - a_1) = a_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(a_1 - a_2)$$

le elongazioni λ_1 e λ_2 essendo prese in valore assoluto (fig. 7-3).

Date le ipotesi che stanno alla base dell'interpolazione, essa consente in genere di aggiungere solo un'ulteriore cifra significativa ai valori di a_1 e a_2.

7-1,7. *Variatori di sensibilità.*

Durante la ricerca delle condizioni di equilibrio, occorre evitare che correnti troppo elevate percorrano il rivelatore di zero, che potrebbe esserne danneggiato. A tale scopo si utilizzano dei variatori di sensibilità che, nei casi più semplici, sono costituiti da resistori in serie o in parallelo al rivelatore stesso.

Nei circuiti in cui il rivelatore sia collegato ad una sorgente (equivalente) a tensione costante V (cioè di resistenza interna piccola rispetto alla resistenza g dello strumento) il galvanometro può essere protetto da una resi-

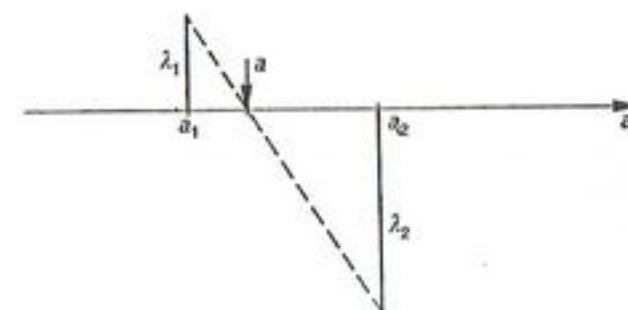
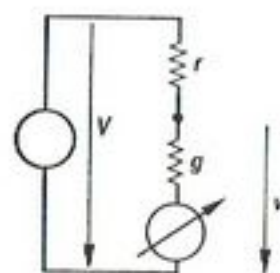



Fig. 7-4

stenza in serie (fig. 7-4) $r \gg g$, che riduce la tensione ai capi dello strumento dal valore V al valore:

$$v = V\frac{g}{r+g} \simeq V\frac{g}{r}.$$

Nei circuiti in cui il rivelatore di zero sia collegato ad una sorgente (equivalente) a corrente costante I (cioè con resistenza interna elevata rispetto alla resistenza dello strumento) il galvanometro può essere protetto da una resistenza in parallelo (fig. 7-5) $S \ll g$, che riduce la corrente che attraversa lo strumento dal valore I al valore:

$$i = I\frac{S}{S+g} \simeq \frac{S}{g}I.$$

Nel caso in cui la resistenza interna del generatore equivalente e quella dello strumento siano comparabili, conviene utilizzare uno shunt universale (fig. 7-6) che compie entrambe le funzioni; infatti una porzione S_i della resistenza è posta in parallelo e l'altra, S_v, in serie allo strumento; se è:

$$S = S_i + S_v,$$

risulta:

$$i = I\frac{S_i}{g+S}$$

$$v = V\frac{g}{g+S_v}.$$

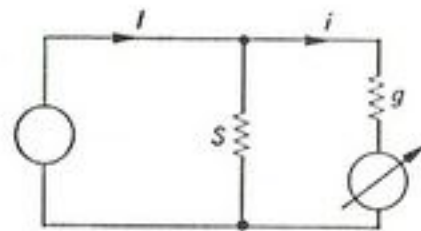



Fig. 7-5

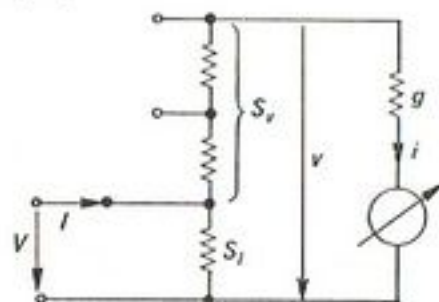



Fig. 7-6

Lo shunt universale presenta anche il vantaggio di chiudere il rivelatore di zero su un circuito di resistenza costante, utile ai fini di un efficace smorzamento.

Esistono anche altri tipi di variatori di sensibilità, che con l'aggiunta di resistenze in serie sul commutatore, diverse per ogni presa, mantengono costante anche la resistenza d'ingresso.

7-1,8. *Equilibrio in c.a.*

La condizione di equilibrio, per un sistema in corrente alternata sinusoidale, comporta in generale l'uguaglianza di due grandezze complesse:

$$\dot{A} = \dot{B}.$$

Questa condizione non può essere soddisfatta, se non sono contemporaneamente realizzate due condizioni di equilibrio, p. es. l'uguaglianza dei moduli A e B e degli argomenti α e β delle due grandezze:

$$A = B$$
$$\alpha = \beta$$

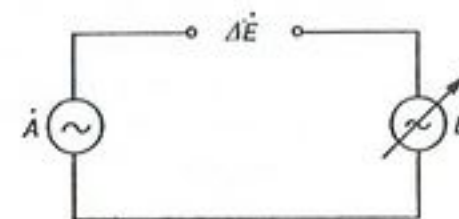
ovvero l'uguaglianza delle rispettive parti reali e immaginarie:

$$\mathrm{Re}(\dot{A}) = A\cos\alpha = \mathrm{Re}(\dot{B}) = B\cos\beta$$
$$\mathrm{Im}(\dot{A}) = A\,\mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{Im}(\dot{B}) = B\,\mathrm{sen}\,\beta.$$

Che la condizione di equilibrio debba essere cercata con successive approssimazioni per entrambe le componenti, si può facilmente vedere considerando lo schema equivalente di fig. 7-7 al quale può ricondursi qualsiasi metodo di confronto. Sia $\dot{A}$ una f.e.m. fissa, $\dot{B}$ una f.e.m. variabile; l'indicazione del rivelatore di zero è quindi funzione della distanza fra i vertici dei vettori che rappresentano le grandezze complesse $\dot{A}$ e $\dot{B}$.

Fig. 7-7

Si ammetta per esempio, di poter influire separatamente sulle componenti, secondo due assi ortogonali, di $\dot{B}$; l'estremo del vettore $\dot{B}$, regolando la componente secondo l'asse x, si muove lungo una retta r, parallela all'asse x (fig. 7-8); si trova perciò una zona di minima indicazione del rivelatore di zero, intorno al punto P. Tale minimo risulta poco accentuato, dimodoché la regolazione si arresta in un suo intorno, per esempio nel punto P'; occorre allora variare la componente di $\dot{B}$ secondo l'asse y, muovendosi sulla retta r', fino ad un nuovo punto di minimo, più pronunciato e più prossimo allo zero del precedente, nell'intorno del punto P''.

L'equilibrio si raggiunge perciò regolando *alternativamente* ciascuna delle due componenti, fino a raggiungere con essa un minimo relativo. Il campo di incertezza, per ciascuna componente, va restringendosi a mano a mano che ci si avvicini alla condizione di zero, ma, finché essa non è raggiunta,

le due componenti possono influenzarsi reciprocamente; la stessa indicazione del rivelatore di zero, nell'intorno dell'equilibrio, può infatti essere realizzata per infinite coppie di valori della parte reale ed immaginaria di $\dot{B}$.

Nella pratica, le variazioni della grandezza $\dot{B}$ possono avvenire lungo archi di cerchio; questi sono però sempre riducibili a segmenti rettilinei, in prima approssimazione, nella valutazione di piccole variazioni intorno all'equilibrio.

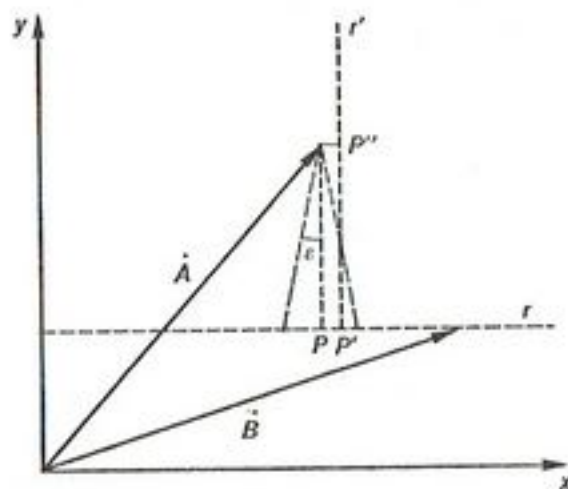



Fig. 7-8

Il grado di dipendenza fra le due regolazioni che portano all'equilibrio costituisce un indice della difficoltà di raggiungere rapidamente le condizioni di zero; si può dimostrare che questa difficoltà è tanto maggiore, quanto minore è l'angolo fra le due rette lungo cui si sposta il vertice di B, nelle due regolazioni, (è perciò minima nel caso di fig. 7-8 che dà variazioni su segmenti fra loro ortogonali) e quanto maggiore è l'angolo ε che esprime l'incertezza nella determinazione del minimo.

7-1,9. *Rivelatori di zero per c.a.*

Le caratteristiche che definiscono un rivelatore di zero per c.a. sono la *sensibilità* e la *selettività*; la prima è, come per i circuiti in c.c., la soglia di segnale necessaria per ottenere un'indicazione percettibile; la selettività è invece la capacità di discriminare i segnali, a seconda della loro frequenza e, in particolare, di eliminare l'effetto delle armoniche della grandezza di cui si cerca lo zero.

Infatti, le condizioni di equilibrio possono essere diverse, al variare della frequenza, sia perché variano le impedenze dei tratti di circuito interessati, sia perché possono variare anche i parametri (resistenze, induttanze, capacità) dei circuiti stessi, sia infine perché possono variare gli effetti degli

accoppiamenti mutui, induttivi e capacitivi, fra i vari elementi. La condizione di zero viene perciò ricercata per una sola frequenza, eliminando, mediante un indicatore di zero selettivo, l'effetto delle armoniche.

Conviene distinguere i rivelatori di zero in base al campo delle frequenze di impiego:

a) per le frequenze industriali (fino a 500 Hz) si utilizzano generalmente i galvanometri a vibrazione, strumenti magnetoelettrici (3-5,3) o ferromagnetici (3-5,5) poco smorzati, nei quali si ottengono alte selettività e sensibilità regolando la pulsazione caratteristica dell'equipaggio fino a farla coincidere con la pulsazione della corrente che li percorre;

b) per le frequenze acustiche (da 500 a 10.000 Hz) è particolarmente usata la cuffia telefonica (3-5,6); la selettività è in questo caso affidata alla capacità dell'orecchio umano di distinguere suoni di natura diversa;

c) per le frequenze superiori, è particolarmente usato un ricevitore eterodina, che trasforma il segnale in un altro di frequenza fissa, che viene amplificato e rivelato con vari metodi, per esempio con un indicatore per c.c., un oscillografo o un «occhio magico».

Per tutti i campi di frequenza risulta di grande utilità l'impiego di amplificatori elettronici, in cui possono essere incorporati adatti filtri, per migliorarne la selettività. Questi amplificatori devono avere, fra l'altro, bassi disturbi ed elevata capacità di sovraccarico: questa può essere realizzata mediante amplificatori a caratteristica logaritmica.

Fra i rivelatori di zero per c.a., ricordiamo anche gli elettrometri, un tempo usati anche per c.c., e i rivelatori sensibili alla fase: cioè gli elettrodinamometri con eccitazione indipendente o i galvanometri con raddrizzatore comandato ed altre apparecchiature con caratteristiche simili (vedi 5-4,4).

7-2. **Metodi di ponte in c.c.**

7-2,1. *Ponte di Wheatstone.*

Il ponte di Wheatstone (fig. 7-9) rappresenta uno dei metodi più antichi e più diffusi per la misura di una resistenza; l'incognita x viene confrontata con una resistenza nota c, mediante due resistori di regolazione a, b. Il ponte si dice in equilibrio quando è nulla la corrente I_g nel rivelatore di zero; fra i valori delle resistenze che formano i quattro lati sussiste allora la relazione:

$$x = \frac{a}{b} c . \qquad [7-3]$$

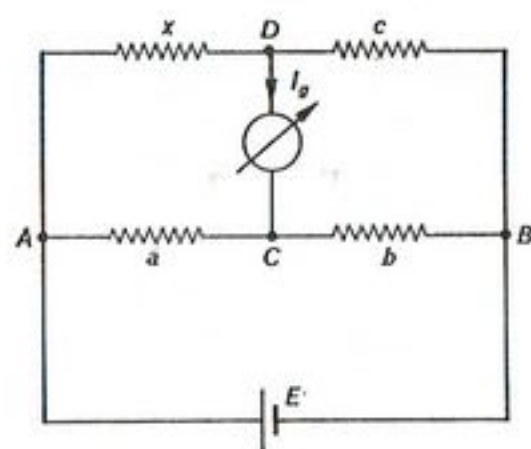



Fig. 7-9

Questa condizione di equilibrio è indipendente sia dal valore della tensione di alimentazione che da quelli delle resistenze presenti nelle diagonali AB e CD; essa resta inalterata se si scambiano fra loro due lati opposti (b e x, oppure c e a) o se si inverte la funzione delle diagonali, spostando l'alimentazione in CD e il rivelatore di zero in AB.

Il valore della resistenza misurata, fra i punti A e D, comprende sia le resistenze di contatto, in serie con l'incognita, sia le resistenze di dispersione, ad essa in parallelo; il ponte di Wheatstone risulta perciò adatto alla misura delle medie resistenze (da 10 a 10^5 ohm), che non risentono della presenza di questi elementi parassiti.

L'equilibrio si ottiene variando una delle tre resistenze note: a, b o c; si possono realizzare, in linea di principio, due tipi di ponte:

a) mantenendo costante il rapporto a/b, si varia la resistenza c; questa è costituita da un resistore a cassetta o a decadi e il ponte si dice allora a cassetta o a decadi;

b) mantenendo costante il valore della resistenza c, si varia il rapporto a/b mediante lo spostamento di un cursore su un filo calibrato (ponte a filo).

In pratica, le migliori condizioni di equilibrio si ottengono impostando opportunamente sia c che il rapporto a/b, nei limiti consentiti dagli elementi del ponte, e variando, per il raggiungimento dell'equilibrio, l'elemento che può essere regolato con miglior risoluzione, in modo da determinare il maggior numero di cifre significative, compatibili con la precisione raggiungibile.

7-2,2. *Precisione del metodo di ponte.*

L'errore relativo da cui risulta affetto il valore della resistenza x si ricava dalla [7-3] e vale:

$$e_x = e_a - e_b + e_c \pm \sigma \qquad [7\text{-}4]$$

I primi tre termini rappresentano gli errori propri delle resistenze che compongono il ponte; essi vanno presi con il loro segno, quando esso sia noto; in caso contrario, i limiti d'incertezza sono dati dalla somma dei loro valori assoluti. L'ultimo termine esprime l'incertezza con cui si è determinata la condizione di equilibrio ossia la sensibilità della misura.

Essa va determinata, sperimentalmente o analiticamente, di volta in volta [1].

Per il caso particolare in cui i lati siano costituiti da un unico filo calibrato di resistenza totale r, per cui è:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{r-a}$$

se si commette un errore da sull'apprezzamento della resistenza a, si commette l'errore $db = -da$ sulla misura della b; risulta:

$$e_a - e_b = da\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{r-a}\right) = \frac{r\,da}{a(r-a)}.$$

Questa espressione ha un minimo per:

$$a = b = \frac{r}{2};$$

il ponte a filo risulta perciò meglio utilizzato per il confronto di resistenze x e c dello stesso ordine di grandezza.

Dalla [7-4] si deduce, in ogni caso, che la misura della resistenza incognita sarà affetta da un'incertezza maggiore di quelle esistenti sulle singole resistenze note; esistono però alcuni casi particolari in cui è possibile limitare l'influenza degli errori propri di alcuni lati del ponte. Il metodo migliore, a tale scopo, è quello di sostituzione, che permette il confronto indiretto fra due resistenze x e y, prescindendo, in massima parte, dagli errori propri delle resistenze del ponte.

Si abbia infatti, per un equilibrio, quando sia inserita sul lato AD la resistenza y:

$$y = \frac{a}{b}c$$

con un secondo equilibrio, ottenuto sostituendo la x alla y sul lato dell'incognita, si ha:

$$x = \frac{a}{b}c\left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = y\left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right).$$

[1] Ai ponti commerciali viene attribuita una classe di precisione c in % (o in ppm) che corrisponde alla garanzia di un errore assoluto inferiore a:

$$\Delta R = c\left(R_x + \frac{R_N}{10}\right) \times 10^{-2} \qquad (\text{o } 10^{-6})$$

dove R_x è il valore letto sul ponte e R_N un valore di riferimento, generalmente la più elevata potenza di 10 compresa nel campo di misura. Questo limite di errore è generalmente valido in un ristretto campo di temperatura ambiente.

Come si è visto in 1-2A,1 l'errore sul rapporto x/y è molto minore dell'errore proprio della c, se è $\Delta c/c \ll 1$, cioè se x e y hanno pressoché lo stesso valore. A questo errore si deve però aggiungere due volte quello dovuto alla sensibilità, che influisce sui due equilibri.

L'errore sulla grandezza $z = x/y$, che ha valore prossimo all'unità, è espresso dalla relazione:

$$e_z = E_z = (\Delta c/c)(e_{\Delta c} + e_c)$$

dove $e_{\Delta c}$ ed e_c sono gli errori relativi con cui sono noti rispettivamente Δc e c. Si noti tuttavia che, perché sia valida la relazione precedente, è necessario che la resistenza c resti materialmente la stessa nei due equilibri; nel caso, più generale, in cui ciò sia vero solo per una sua parte c_0, ossia che si abbia:

$$y = (c_0 + c_y)a/b\,; \qquad x = (c_0 + c_x)a/b\,;$$

(con c_x e c_y molto minori di c_0), si ha:

$$z = x/y = (1 + c_x/c_0)/(1 + c_y/c_0) \simeq 1 + (c_x - c_y)/c_0$$

ma l'errore risulta:

$$e_z = e_\Delta(c_x + c_y)/c_0 + e_c(c_x - c_y)/c_0$$

avendo designato con e_Δ l'errore relativo con cui si determinano sia c_x che c_y. Gli errori propri delle resistenze c_x e c_y vengono quindi moltiplicati per un fattore che è, più in generale, il rapporto fra la somma delle resistenze che intervengono in uno solo dei due equilibri, rispetto al valore della resistenza che resta immutata in entrambi.

Un altro metodo, che però può essere utilizzato solo quando il rapporto a/b sia molto prossimo all'unità, consiste nell'eseguire due equilibri, scambiando fra loro i lati a e b (metodo della doppia pesata); si ottiene allora:

$$x = \frac{a}{b}c$$

$$x = \frac{b}{a}c' = \frac{b}{a}c\left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right)$$

e quindi, risultando $\Delta c/c$ molto piccolo rispetto all'unità:

$$x = \sqrt{c^2\left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right)} \simeq c\left(1 + \frac{\Delta c}{2c}\right) = \frac{c + c'}{2}\,.$$

In questo caso, l'errore di misura è dato praticamente da:

$$e_x \simeq e_c \pm \sigma$$

poiché l'errore sul termine correttivo risulta di secondo ordine.

7-2,3. *Calcolo della sensibilità della misura.*

Per ridurre il ponte di Wheatstone al suo circuito equivalente, visto dai morsetti *CD* del rivelatore di zero, conviene far riferimento alla fig. 7-9, che suppone il ponte alimentato da una sorgente di f.e.m. costante E, con resistenza interna nulla; ciò è ammissibile quando si utilizzano, per alimentare il ponte, batterie di accumulatori di potenza sufficiente.

In questo caso, la f.e.m. a vuoto fra C e D risulta:

$$E_0 = E\left[\frac{c}{c + x} - \frac{b}{a + b}\right];$$

se alla resistenza variabile si attribuisce una variazione Δc intorno al valore c che conduce all'equilibrio (per cui è $E_0 = 0$) si ha, nel circuito equivalente di fig. 7-1:

$$\Delta E = \frac{dE_0}{dc}\Delta c = E\frac{x}{(c + x)^2}\Delta c$$

e quindi:

$$\Delta E = \frac{\dfrac{x}{c}}{\left(1 + \dfrac{x}{c}\right)^2}E\frac{\Delta c}{c} = E\frac{\Delta c}{c}f(m) \qquad [7\text{-}5]$$

dove $f(m)$ è una funzione del solo rapporto $m = x/c = a/b$.

La resistenza interna del generatore equivalente risulta invece:

$$R_i = \frac{x \cdot c}{x + c} + \frac{a \cdot b}{a + b} = (x + a)\frac{1}{1 + m}\,. \qquad [7\text{-}6]$$

Questi elementi sono sufficienti per calcolare la variazione $\Delta c/c$ (ovvero $\Delta x/x$) necessaria a far circolare la minima corrente I_m che l'indicatore di zero, di resistenza interna g, è in grado di rivelare. Dalle [7-5] e [7-6] si possono anche ricavare, sotto determinate ipotesi, quali siano i valori dei rapporti x/c o x/a che danno luogo alla massima sensibilità; il risultato dipende dalle ipotesi che possono essere fatte.

Per esempio, la [7-5] ha un massimo per $m = 1$ (cioè per $x = c$, $a = b$), se supponiamo costante E; se i quattro lati sono formati da due resistenze di valore elevato e due di valore basso converrebbe perciò collegare le due resistenze più piccole fra di loro in serie rispetto all'alimentazione; il risultato opposto si ottiene se si impone un limite alla potenza dissipabile sui vari lati, e perciò al valore della tensione applicata.

Usando ponti di sensibilità elevata si possono avere, d'altra parte, influenze indesiderate di grandezze estranee alla misura.

7-2,4. *Applicazioni del ponte di Wheatstone.*

Il circuito a ponte può essere utilizzato in varie applicazioni, per la misura di grandezze che, mediante un opportuno trasduttore, possono essere trasformate in variazioni di resistenza (vedi 5-7,1).

La precisione conseguibile con tali metodi è legata ad una buona sensibilità delle misure, più che ad una buona precisione dei componenti del ponte. Sia ad esempio una misura di temperatura, eseguita con una sonda che, ad una temperatura t_1 nota, abbia resistenza:

$$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1)\,.$$

Misurando alla temperatura t_2 è:

$$R_2 = R_0(1 + \alpha t_2)$$

e perciò:

$$t_2 - t_1 = \left(\frac{1}{\alpha} + t_1\right)\frac{R_2 - R_1}{R_1}\,.$$

Il termine $(R_2 - R_1)/R_1$ è praticamente indipendente dalla precisione dei lati di rapporto che sono serviti ai due equilibri, mentre è affetto da un errore assoluto pari al doppio della sensibilità.

Si noti anche che, ponendo $(R_2 - R_1)/R_1 = \Delta x/x$, la formula precedente può anche essere usata per calcolare la stabilità della temperatura necessaria per garantire una misura entro determinati limiti di errore o di sensibilità.

In molti casi, la misura della temperatura può farsi per deviazione, dall'indicazione di uno strumento inserito sulla diagonale di rivelazione, che segna zero quando la resistenza sia alla temperatura t_1; la tensione indicata dallo strumento è proporzionale alla tensione di alimentazione del ponte e dipende dall'entità dello squilibrio (e quindi dalla temperatura) secondo una legge che può essere resa pressoché lineare (nell'ipotesi che lo strumento assorba una corrente trascurabile) scegliendo opportunamente grande il rapporto a/b rispetto allo squilibrio massimo $\Delta R/R$, a spese quindi della sensibilità dello strumento.

7-2,5. *Ponti di Wheatstone per resistenze elevate.*

Nella misura di resistenze di valore elevato ($> 10^7$) può divenire sensibile l'influenza delle resistenze di dispersione e d'isolamento, in parallelo alla resistenza da misurare o tra parti di essa e punti a potenziale di massa. In questo caso è necessario ricorrere ad opportune schermature, basate sui principi già illustrati in 2-3,3 e che saranno più ampiamente discussi al paragrafo 7-4.

È anche difficile disporre di un buon numero di resistori campioni, stabili e sicuri, di valore elevato: essi hanno spesso coefficiente di tensione non trascurabile e devono essere perciò usati in un limitato intorno di tensioni.

Schemi più moderni utilizzano amplificatori operazionali [4-1,9], secondo il principio illustrato in fig. 7-10; supposto infinito il guadagno dell'amplificatore, e perciò nulla la tensione V_B, si ha la relazione:

$$-\frac{E}{x} = \frac{V}{R}\,.$$

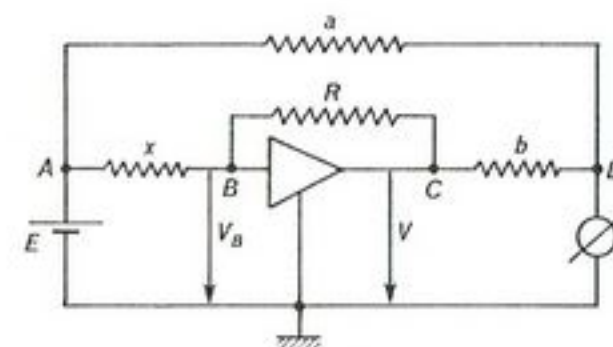



Fig. 7-10

D'altra parte, l'annullarsi della corrente nel rivelatore di zero comporta che siano di ugual valore e opposto segno le due correnti che confluiscono nel nodo D, ossia:

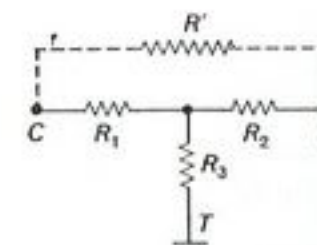
$$-\frac{E}{a} = \frac{V}{b}\,,$$

il che conduce ad una relazione di equilibrio simile alla [7-3], ma con maggior libertà di scelta per i valori delle resistenze a, b, R.

Le resistenze di dispersione fra i morsetti A, B, C e la terra non influenzano l'equilibrio essendo il punto B posto praticamente al potenziale di terra e gli altri alimentati direttamente da sorgenti di f.e.m.

Fig. 7-11

Da ciò si può trarre vantaggio per realizzare una resistenza campione R di valore elevato, disponendo fra i punti B, C e T una stella di resistenze opportune, di valore più piccolo (fig. 7-11); con la trasformazione da stella a triangolo, si ha fra B e C una resistenza equivalente:

$$R' = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}\,.$$

7-2,6. *Doppio ponte.*

Per eliminare nelle misure delle piccole resistenze l'effetto dei contatti, si fa ricorso al doppio ponte (o ponte di Thomson) (fig. 7-12). Lo schema di questo ponte si riconduce facilmente a quello di un ponte di Wheatstone, mediante una trasformazione triangolo-stella fra i punti MNP (fig. 7-13);

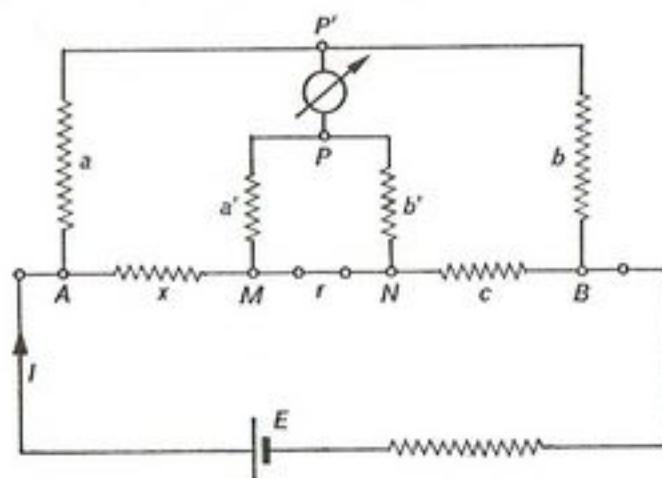



Fig. 7-12

la condizione di equilibrio è dunque:

$$x + \frac{ra'}{a'+b'+r} = \frac{a}{b}\left[c + \frac{rb'}{a'+b'+r}\right]$$

ossia:

$$x = \frac{a}{b}c + \frac{ra'}{a'+b'+r}\left[\frac{ab'}{ba'} - 1\right]. \qquad [7\text{-}7]$$

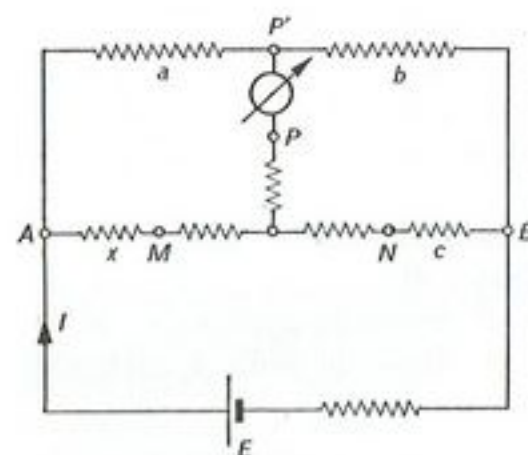



Fig. 7-13

Quando il ponte è costruito in modo che sia:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \qquad [7\text{-}8]$$

la condizione di equilibrio [7-7] si semplifica nella:

$$x = \frac{a}{b}c$$

identica a quella del ponte di Wheatstone.

Gli effetti delle resistenze di contatto tra la x ed il circuito di alimentazione sono eliminati, se le connessioni alle resistenze a, a' sono effettuate internamente a tali contatti, con la solita disposizione dei quattro morsetti; una parte infatti di queste resistenze di contatto è esterna al circuito di misura, un'altra viene a far parte del valore di r, che non interviene nelle condizioni di equilibrio; le resistenze di contatto verso a e a' risultano in serie con resistenze di valore medio (decine o centinaia di ohm) per cui hanno in genere effetto trascurabile. Analoghe condizioni sussistono per le resistenze di contatto sulla c. L'equilibrio è indipendente dal valore della corrente che circola nella resistenza x, che è tuttavia uguale a quello della corrente nel campione c.

Come per il ponte semplice, anche per il ponte doppio si hanno due tipi fondamentali:

a) quello in cui l'equilibrio è ottenuto variando le resistenze a e a' con due resistori a decadi vincolati meccanicamente fra loro nel movimento, in modo da mantenerne, p. es., uguali i valori (ponte a cassette);

b) quello in cui l'equilibrio si ottiene variando la resistenza campione c, che è allora costituita da un filo calibrato (ponte a filo); il rapporto $a/b = a'/b'$ può essere commutabile per potenze di 10 (p. es. fra 10^{-3} e 10^{3}), consentendo un ampio campo di misura.

7-2,7. *Sensibilità e precisione del doppio ponte.*

Per la determinazione della sensibilità, intorno alle condizioni di equilibrio e per il calcolo della precisione globale della misura possono essere utilizzate le stesse considerazioni già fatte per il ponte semplice, a cui ci si può sempre ricondurre.

Per il calcolo della sensibilità, dati i parametri del doppio ponte, può essere comoda qualche semplificazione, che consiste nel trascurare i valori di x, c e r rispetto a quelli di a, b, a' e b' e soprattutto nel considerare imposto il valore della corrente I che attraversa le resistenze x e c, come è in realtà nella maggior parte dei casi, in considerazione del loro riscaldamento.

In queste ipotesi il ponte, intorno all'equilibrio, può essere rappresentato con lo schema di fig. 7-14 dove, per il principio di compensazione, è:

$$\Delta E_0 = \Delta x I \,; \text{ (}^1\text{)}$$

(1) Il valore della corrente nella resistenza x può essere assunto praticamente uguale a quello della corrente I che alimenta il ponte. Si noti anche che le stesse relazioni si possono ottenere, applicando le [7-5] e [7-6], relative al ponte semplice, ponendo $E = (x + c)I$; $r = 0$; $x \ll a$.

il generatore equivalente ai morsetti PP' del rivelatore di zero assume la forma di fig. 7-1 con:

$$\Delta E = \Delta x I \frac{b}{a+b}; \qquad R_i = \frac{ab}{a+b} + \frac{a'b'}{a'+b'} = (a+a')\frac{b}{a+b}.$$

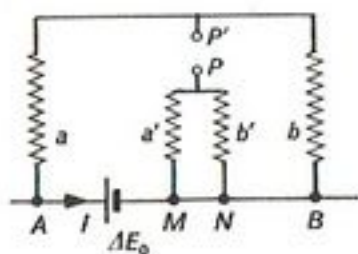



Fig. 7-14

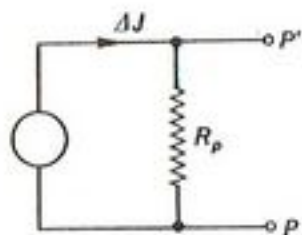



Fig. 7-15

Nel caso, assai comune, in cui sia: $a = a'$ (e quindi $b = b'$), il generatore equivalente è più semplicemente rappresentato da un generatore di corrente (fig. 7-15):

$$\Delta J = \frac{\Delta x}{2a} I$$

con in parallelo la resistenza $R_p = 2ab/(a+b)$.

Queste relazioni mostrano come, in generale, la sensibilità peggiori al crescere del valore delle resistenze a, b.

Per la precisione, si consideri la relazione [7-7] scritta nella forma:

$$x = y + z(v-1) \qquad \text{con} \left| \begin{array}{l} y = \dfrac{a}{b}c \\ z = \dfrac{ra'}{a'+b'+r} < r\dfrac{a'}{a'+b'} = r\dfrac{x}{x+c} \\ v = \dfrac{a}{b}\dfrac{b'}{a'} \end{array} \right.$$

da cui, nel punto $v = 1$, dove è: $x = y$, si ha:

$$e_x \simeq e_y + \frac{z}{x}\mathrm{d}v \pm \sigma < e_y + \frac{r}{c+x}\mathrm{d}v \pm \sigma$$

il primo termine è analogo a quello di un ponte semplice; il secondo è l'errore che si introduce quando non sia realizzata la [7-8]; esso è tanto più piccolo quanto minore è la resistenza r, rispetto alle resistenze x e c, tanto da essere usualmente trascurabile.

7-2,8. *Controllo del doppio ponte.*

In alcuni casi particolari le resistenze di contatto r_a, r'_a, r_b, r'_b, di fig. 7-16 possono portare qualche inconveniente (misure di elevata precisione, o con resistenze a, a', b e b' di piccolo valore). In tal caso è possibile procedere ad un controllo della condizione:

$$\frac{a+r_a}{b+r_b} = \frac{a'+r'_a}{b'+r'_b}; \tag{7-9}$$

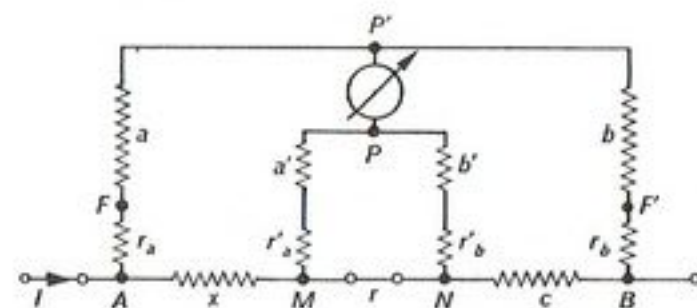



Fig. 7-16

aprendo infatti il circuito fra i punti M e N ($r = \infty$) l'equilibrio del ponte resta inalterato solo se è soddisfatta la condizione [7-9], che è analoga alla [7-8] tenuto conto delle resistenze di contatto. Se ciò non è verificato, si varia la a' (o la b') fino a che l'equilibrio risulta indipendente dal valore di r.

Si può inoltre controllare la condizione:

$$\frac{a+r_a}{b+r_b} = \frac{a}{b}$$

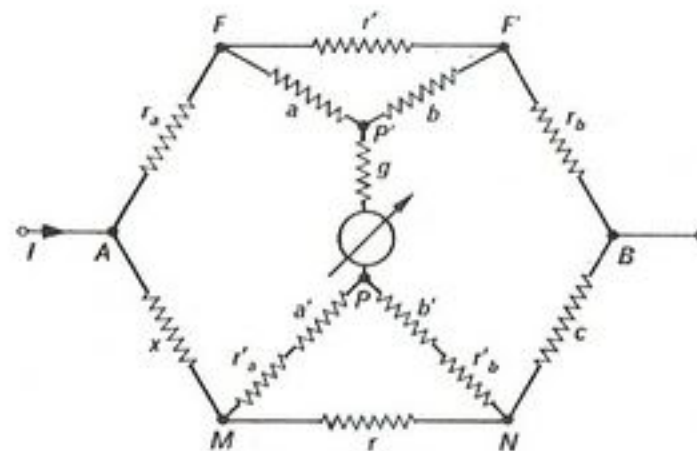



Fig. 7-17

e quindi:

$$\frac{r_a}{r_b} = \frac{a}{b}$$

mediante l'inserzione di fig. 7-17, ottenuta cortocircuitando i punti FF' con un conduttore di resistenza r'; l'equilibrio si ottiene variando r_a o r_b; solo quando tutti e tre gli equilibri sono contemporaneamente verificati è possibile scrivere la relazione:

$$x = \frac{a}{b} c .$$

In questi diversi schemi, circolano nei lati del ponte correnti molto diverse: la sensibilità dovrà essere elevata per l'equilibrio principale e potrà essere ridotta per gli equilibri secondari.

La validità delle diverse condizioni di equilibrio e l'influenza delle resistenze di contatto possono facilmente desumersi dallo schema di fig. 7-18; in essa si è supposto di scambiare fra loro il rivelatore di zero e la sorgente di f.e.m., il che non altera, come è noto, le condizioni di equilibrio.

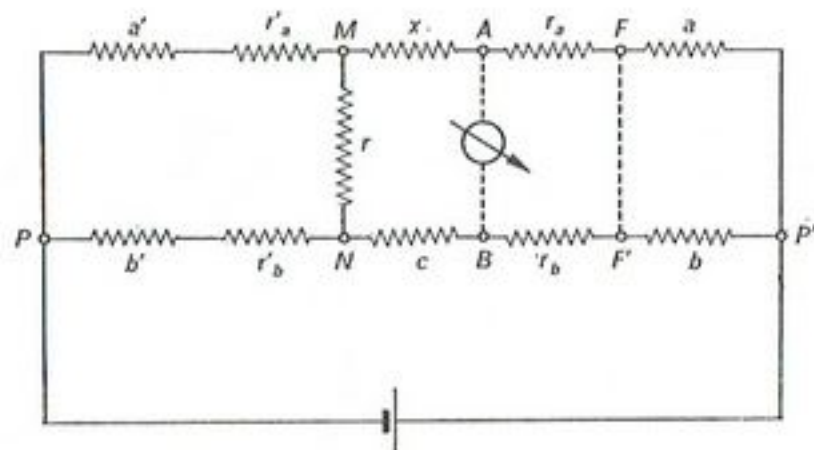



Fig. 7-18

7-3. Metodi di ponte in c.a.

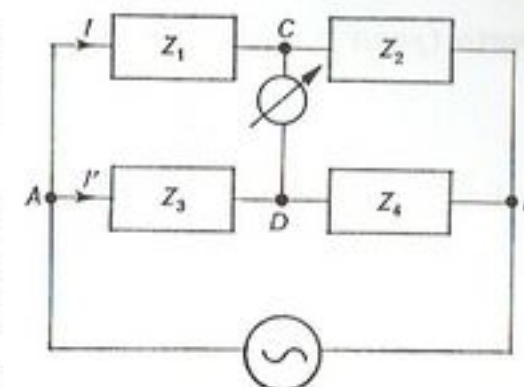
7-3,1. *Condizioni di equilibrio. Ponti a 4 lati.*

Si consideri un circuito a ponte (fig. 7-19) alimentato da una tensione sinusoidale, di pulsazione ω; nelle condizioni di equilibrio, quando cioè risulta nulla la corrente nel rivelatore di zero, fra le quattro impedenze del ponte sussiste la relazione:

$$\dot{Z}_1 \dot{Z}_4 = \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 . \qquad [7\text{-}10]$$

Fig. 7-19

A questo circuito si possono estendere le stesse considerazioni, sull'intercambiabilità dei lati e delle diagonali, già fatte per i ponti in c.c.

La [7-10] consente di determinare il valore di un'impedenza incognita, in funzione dei valori noti delle altre tre; in particolare, se nelle due relazioni che si ottengono, separando la [7-10] nelle sue parti, reale ed immaginaria, non compare esplicitamente la pulsazione ω, l'equilibrio si dice *indipendente dalla frequenza.* In questo caso i valori dei parametri (L, R, C) dell'impedenza incognita possono essere dedotti dai valori dei parametri presenti negli altri tre lati. Occorre però notare che tali parametri possono a loro volta essere funzioni della frequenza di alimentazione (caso tipico la resistenza equivalente alle perdite in un condensatore od in un induttore), ragione per cui il ponte non ha in generale le stesse condizioni di equilibrio, per valori diversi dalla frequenza.

Il raggiungimento dell'equilibrio avviene variando due elementi del ponte, sulla base dei criteri enunciati in 7-1; la scelta degli elementi di regolazione dipende dal tipo di ponte (vedi 7-3,2) dalla disponibilità di campioni variabili, dalle esigenze di sensibilità e convergenza dell'equilibrio (vedi 7-4,8).

7-3,2. *Classificazione dei ponti in c.a.*

È evidente che esistono numerose combinazioni di tre impedenze generiche $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$, $\dot{Z}_4$ che, per una data incognita $\dot{Z}_3$, consentono di soddisfare la relazione di equilibrio:

$$\dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} \cdot \dot{Z}_4 ;$$

i ponti più semplici e praticamente più importanti sono quelli in cui due dei lati sono costituiti da *elementi puri* ossia da impedenze con sola parte reale o sola parte immaginaria. In pratica, questi lati saranno formati o da resistori o da condensatori, avendo gli induttori le note limitazioni a questo riguardo. Si possono perciò classificare gli schemi più comuni di ponte a seconda che gli elementi puri siano nei due lati fra loro adiacenti (Z_1 e Z_2) o in due lati opposti (Z_1 e Z_4).

Nel primo caso, compare nell'equazione di equilibrio solo il loro rap-

porto (*ponti a rapporto*):

$$\dot{Z}_3 = \left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}\right)\dot{Z}_4 \qquad \text{ovvero} \qquad \dot{Y}_3 = \left(\frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1}\right)\dot{Y}_4 \qquad [7\text{-}11]$$

nel secondo, (*ponti a prodotto*), solo il loro prodotto:

$$\dot{Z}_3 = (\dot{Z}_1\dot{Z}_4)\dot{Y}_2 \qquad \text{ovvero} \qquad \dot{Y}_3 = \frac{\dot{Z}_2}{(\dot{Z}_1\dot{Z}_4)}; \qquad [7\text{-}12]$$

le espressioni fra parentesi nelle [7-11] e [7-12] risultano numeri reali o numeri immaginari puri, positivi o negativi.

Si ammetta inoltre che l'impedenza incognita $\dot{Z}_3$ (ovvero l'ammettenza $\dot{Y}_3$) sia esprimibile nella forma:

$$\dot{Z}_3 = R_3 + jX_3 \qquad (\text{ovvero } \dot{Y}_3 = G_3 + jB_3)$$

in cui la parte reale (R_3 o G_3) sia sempre positiva ed indipendente dalla frequenza, la parte immaginaria X_3 (o B_3) sia funzione crescente della pulsazione ω (del tipo: ωL o $-1/\omega C$ o, rispettivamente, ωC e $-1/\omega L$).

Si ha allora la condizione generale di equilibrio, che riassume le [7-11] e [7-12]:

$$R_3 + jX_3 = k(M + jN) \qquad (\text{o analogamente per } Y_3) \qquad [7\text{-}13]$$

dove k è un numero reale che dipende solo dal rapporto (o dal prodotto) dei due elementi puri, presenti nel ponte; M e N sono invece le componenti dell'impedenza (o dell'ammettenza) del lato che contiene più elementi.

Si noti che il fattore k interviene nello stesso modo nelle due relazioni di equilibrio in cui può essere scissa la [7-13], rispettivamente per la parte reale e quella immaginaria di $\dot{Z}_3$; per raggiungere più rapidamente l'equilibrio conviene perciò rendere variabili le componenti del lato con elementi complessi (impedenza adiacente l'incognita nei ponti a rapporto o ammettenza del lato opposto nei ponti a prodotto).

Avendo due lati formati da impedenze pure fisse e uno da elementi variabili, i ponti che ricaviamo da questa classificazione sono quindi i più semplici da realizzare e quelli che, a parità di altre condizioni, consentono le migliori precisioni.

Si osservi anche che, detto ϕ_3 l'argomento dell'impedenza incognita e posto tang $\phi_c = N/M$, la [7-13] comporta l'uguaglianza:

$$\phi_3 = \phi_c .$$

7-3,3. *Ponti a rapporto.*

Se le impedenze $\dot{Z}_1$ e $\dot{Z}_2$ sono costituite da elementi puri dello stesso tipo (due resistori o due condensatori, fig. 7-20) il loro rapporto è un

numero reale (ponte a rapporto reale):

$$\left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}\right) = k$$

dove k vale:

$$k = \frac{R_1}{R_2} \qquad (\text{figura 7-20 } a)$$

ovvero:

$$k = \frac{C_2}{C_1} \qquad (\text{figura 7-20 } b) .$$

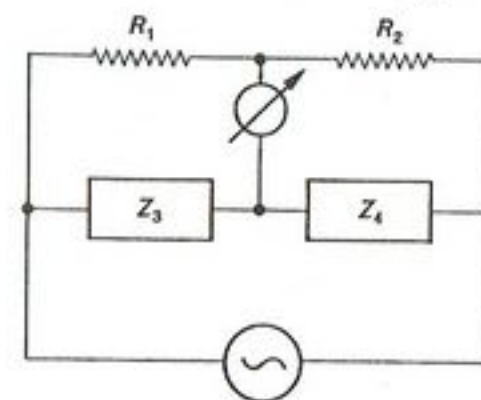
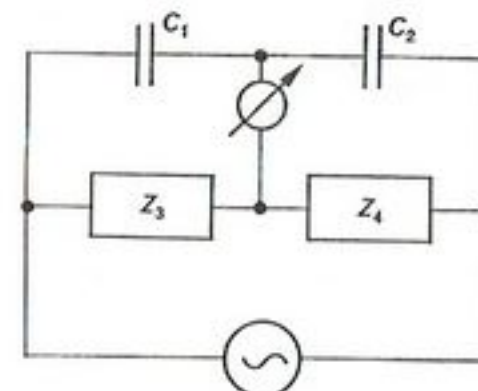



Fig. 7-20 *a* Fig. 7-20 *b*

L'equazione di equilibrio diviene:

$$R_3 + jX_3 = k(R_4 + jX_4)$$

che si può scindere nelle:

$$R_3 = kR_4$$
$$X_3 = kX_4 .$$

Le parti immaginarie delle impedenze $\dot{Z}_3$ e $\dot{Z}_4$, per soddisfare alle condizioni di equilibrio, devono avere lo stesso segno; dovendo inoltre avere

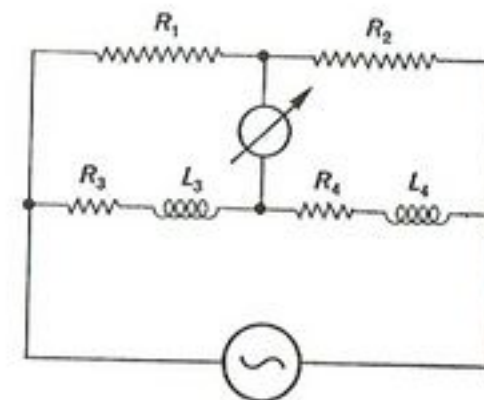
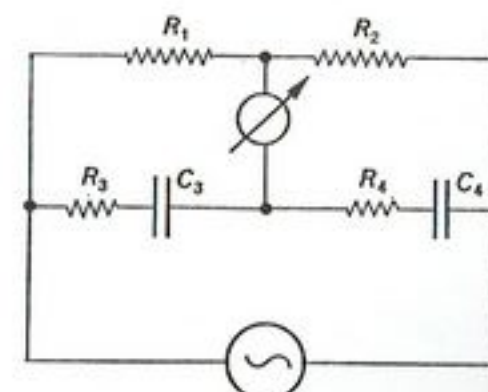



Fig. 7-21 Fig. 7-22

uguali argomenti, le impedenze $\dot{Z}_3$ e $\dot{Z}_4$ devono risultare simili; l'equilibrio risulta pertanto indipendente dalla frequenza.

Gli schemi più impiegati sono quelli di fig. 7-21 (ponte di Wien) per la misure delle induttanze, per confronto con un'induttanza campione; quello di fig. 7-22 (ponte di Gott) per la misura di capacità, per confronto con capacità campione. Analoghi ragionamenti si possono fare per lo schema di fig. 7-23.

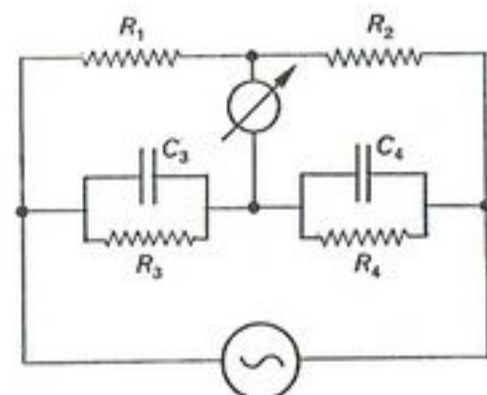



Fig. 7-23

Se le impedenze $\dot{Z}_1$ e $\dot{Z}_2$ sono costituite da due elementi diversi (un resistore e un condensatore) il loro rapporto è immaginario puro (ponte a rapporto immaginario), ossia è:

$$\left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}\right) = jk$$

ove k è un numero reale che vale:

$k = R_1 \omega C_2$ nel caso di fig. 7-24 *a*

$k = -1/\omega C_1 R_2$ nel caso di fig. 7-24 *b*.

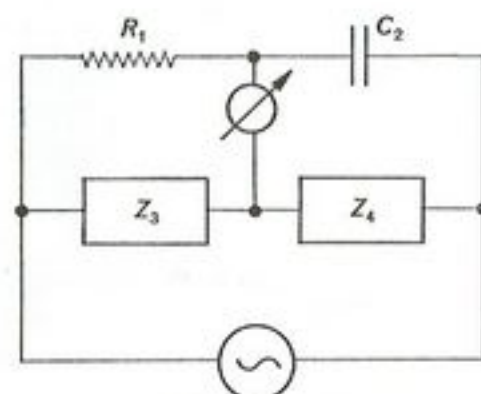



Fig. 7-24 *a*

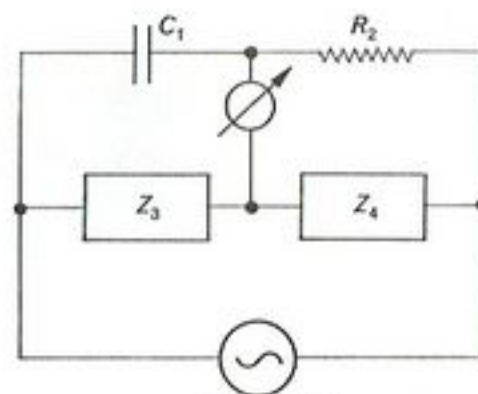



Fig. 7-25

Fig. 7-24 *b*

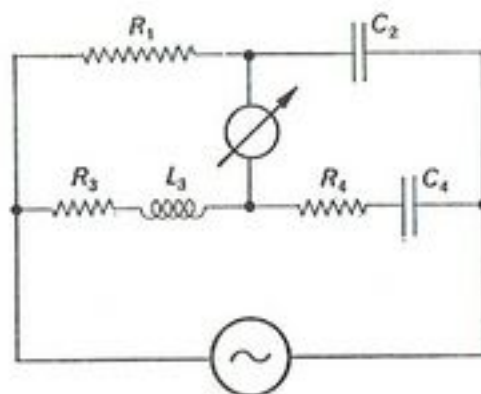
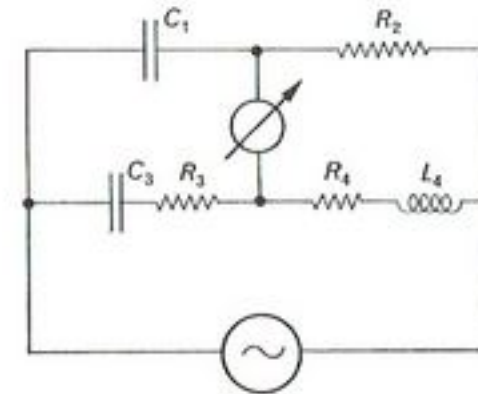



Fig. 7-26

In tal caso le equazioni di equilibrio divengono:

$$R_3 = -kX_4$$
$$X_3 = kR_4;$$

essendo positive R_3 e R_4, X_3 e X_4 devono essere di segno diverso; si hanno perciò i due ponti di fig. 7-25 (ponte di Owen) e quello, meno usato, di fig. 7-26 dove sono scambiate le funzioni dei lati 3 e 4.

Riportiamo anche lo schema di fig. 7-27, che è talvolta utile per la misura della resistenza (equivalente) parallelo di una bobina con nucleo magnetico, per meglio rappresentare le perdite del nucleo stesso.

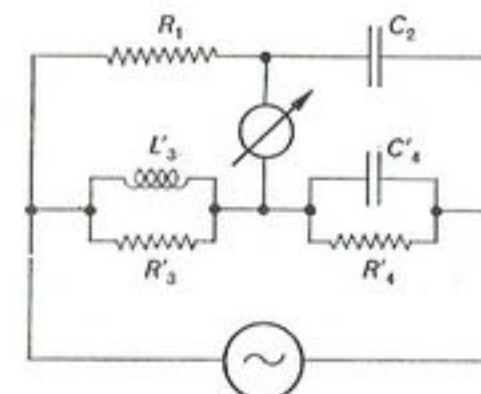



Fig. 7-27

Le relazioni di equilibrio sono raccolte nella Tabella 7-1. Esse vengono anche impiegate, nella fase di impostazione del ponte, per la scelta del valore più opportuno da assegnare al fattore k, in base ai valori stimati dei parametri dell'impedenza incognita ed

Tabella 7-1

		Ponti a rapporto (Z_1/Z_2)			*Ponti a prodotto* (Z_1Z_4)	
		reale	immaginario		reale	immaginario
	Z_3	$k = \frac{R_1}{R_2}$ o $\frac{C_2}{C_1}$	$k = R_1C_2$	$k = \frac{1}{C_1R_2}$	$k = R_1R_4$	$k = \frac{R_1}{C_4}$
serie	R_3, L_3	$R_3 = kR_4$ $L_3 = kL_4$	$R_3 = k/C_4$ $L_3 = kR_4$	—	$R_3 = k/R'_2$ $L_3 = kC'_2$	—
serie	R_3; C_3	$R_3 = kR_4$ $C_3 = C_4/k$	—	$R_3 = kL_4$ $C_3 = 1/R_4k$	—	$R_3 = kC'_2$ $C_3 = R'_2/k$
parallelo	R'_3, L'_3	—	$R'_3 = k/C'_4$ $L'_3 = kR'_4$	—	$R'_3 = k/R'_2$ $L'_3 = C_2k$	—
parallelo	R'_3; C'_3	$R'_3 = kR'_4$ $C'_3 = C'_4/k$	—	—	$R'_3 = k/R_2$ $C'_3 = L_2/k$	$R'_3 = kC_2$ $C'_3 = R_2/k$

alla disponibilità di campioni variabili con sufficiente numero di cifre significative.

7-3,4. *Ponti a prodotto.*

Se le impedenze $\dot{Z}_1$ e $\dot{Z}_4$ sono costituite da due elementi puri dello stesso tipo (due resistori o due condensatori) il loro prodotto è un numero reale (ponti a prodotto reale):

$$(\dot{Z}_1\dot{Z}_4) = k$$

ove k vale:

$$k = R_1 R_4$$

ovvero:

$$k = -\frac{1}{\omega^2 C_1 C_4}.$$

La condizione di equilibrio [7-12] si scinde allora nelle due:

$$\left.\begin{aligned} R_3 &= kG_2 \\ X_3 &= kB_2\,; \end{aligned}\right\} \qquad [7\text{-}14]$$

si riconosce che la prima delle [7-14] non può essere realizzata che per k positivo e quindi per X_3 e B_2 dello stesso segno. Il più importante tipo di ponte a cui questa categoria dà luogo è quello di fig. 7-28 (ponte di Maxwell) largamente usato per il confronto di induttanze con capacità.

Fig. 7-28

Se le impedenze $\dot{Z}_1$ e $\dot{Z}_4$ sono costituite da elementi di tipo diverso, il loro prodotto è un numero immaginario (ponti a prodotto immaginario):

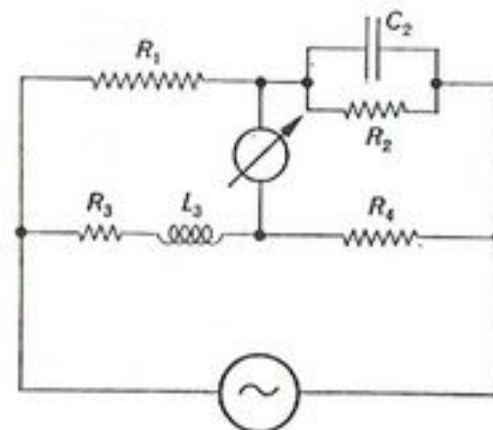
$$(\dot{Z}_1\dot{Z}_4) = jk$$

con:

$$k = -\frac{R_1}{\omega C_4}.$$

Le equazioni di equilibrio diventano:

$$\left.\begin{aligned} R_3 &= -kB_2 \\ X_3 &= kG_2\,; \end{aligned}\right\} \qquad [7\text{-}15]$$

deve perciò risultare B_2 positiva (capacitiva) e X_3 negativa (cioè pure capacitiva); si ha così il ponte di fig. 7-29 (ponte di Schering) di largo impiego per la misura oltre che delle capacità, degli angoli di perdita dei materiali isolanti.

Notiamo che dalla [7-15] si ha:

$$\left.\begin{aligned} R_3 &= \frac{R_1 C_2}{C_4} \\ C_3 &= \frac{R_2 C_4}{R_1} \end{aligned}\right\} \qquad [7\text{-}16]$$

Fig. 7-29

e perciò:

$$\tang\delta_3 = \omega R_3 C_3 = \omega R_2 C_2\,;$$

per la misura dell'angolo di perdita è quindi necessario conoscere la frequenza di alimentazione, ma non i valori di R_1 e C_4, purché essi siano elementi puri.

Le diverse relazioni possibili all'equilibrio sono raccolte nella Tabella 7-1; in essa gli apici indicano elementi fra loro in parallelo, e il coefficiente k è sempre reale e positivo.

Poiché le equazioni di equilibrio sono indipendenti dalla frequenza, esse possono ricercarsi supponendo, al limite, la frequenza tanto bassa da poter trascurare le resistenze in serie a capacità, le induttanze in serie a resistenze, le capacità in parallelo a resistenze e, rispettivamente, a frequenza tanto elevata da poter considerare le semplificazioni opposte. Per esempio, il ponte di Schering di fig. 7-29 può, a bassa frequenza, trasformarsi in quello di fig. 7-30 *a* e, ad alta frequenza, in quello di fig. 7-30 *b* da cui discendono immediatamente le [7-16].

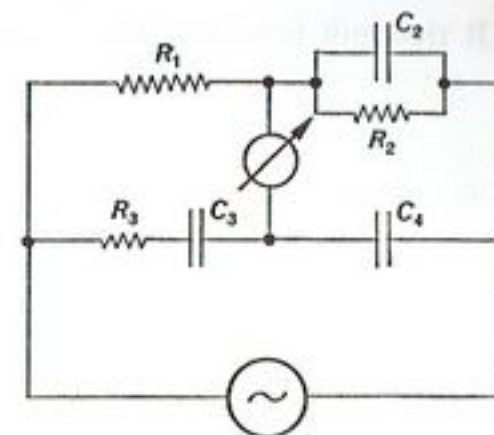
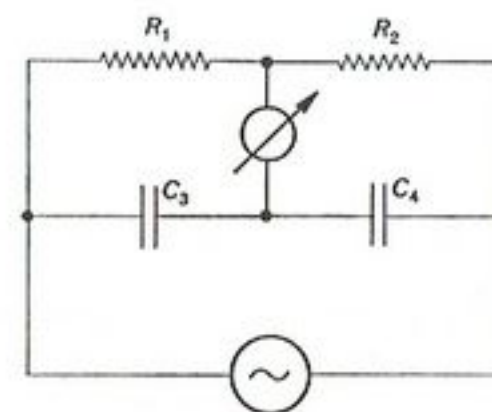
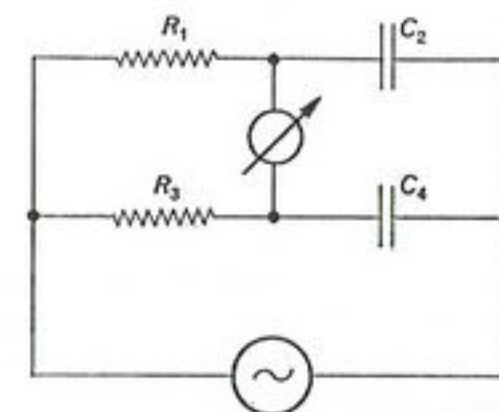



Fig. 7-30 *a* Fig. 7-30 *b*

7-3,5. *Ponti speciali.*

Esistono diversi altri schemi a ponte, che non rientrano nella classificazione precedente; fra questi i ponti con equilibrio dipendente dalla frequenza, usati per la misura della frequenza della sorgente di alimentazione.

Il tipo più semplice è illustrato in fig. 7-31; quando sia:

$$\omega^2 = \frac{1}{L_4 C_4}$$

il lato 4 si riduce ad una resistenza e il ponte può essere azzerato per:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 .$$

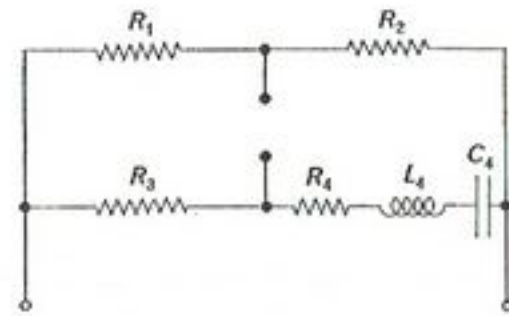



Fig. 7-31

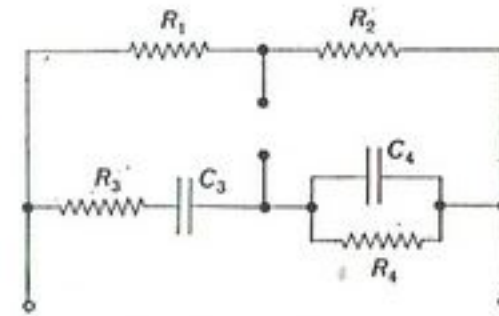



Fig. 7-32

Un altro schema, molto diffuso, è riportato in fig. 7-32; le condizioni di equilibrio si hanno per:

$$\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_3}{R_4} = \frac{C_4}{C_3}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C_3 C_4} ;$$

queste relazioni si semplificano ponendo:

$$R_1 = 2R_2 ; \qquad C_3 = C_4 = C ; \qquad R_3 = R_4 = R$$

in modo che sia:

$$\omega = \frac{1}{RC} .$$

I condensatori C_3 e C_4 (o le resistenze R_3 e R_4) vengono fatti variare in modo simultaneo, per raggiungere l'equilibrio.

Altri tipi di ponte, che non rientrano nella precedente classificazione, sono quelli a più di quattro lati; lo schema più usato è quello di fig. 7-33 (ponte di Anderson-Fleming); trasformando le tre resistenze R_1, R_2, R_5 a stella, in quelle del triangolo equivalente, si ottiene lo schema di fig. 7-34 che è quello di un ponte di Maxwell (vedi fig. 7-28); è quindi:

$$L_3 = CR_1' R_4 = CR_4 \left[R_1 + R_5 + \frac{R_1 R_5}{R_2} \right]$$

$$R_3 = \frac{R_1'}{R_2'} R_4 = \frac{R_1}{R_2} R_4 .$$

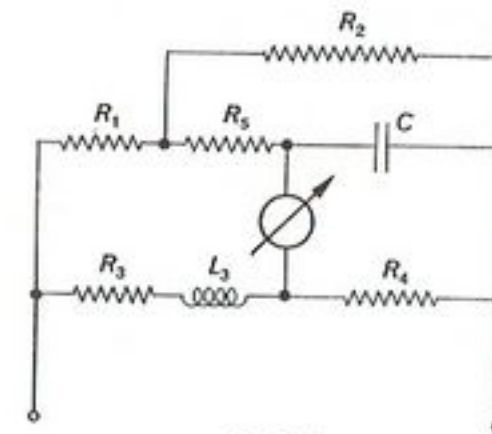



Fig. 7-33

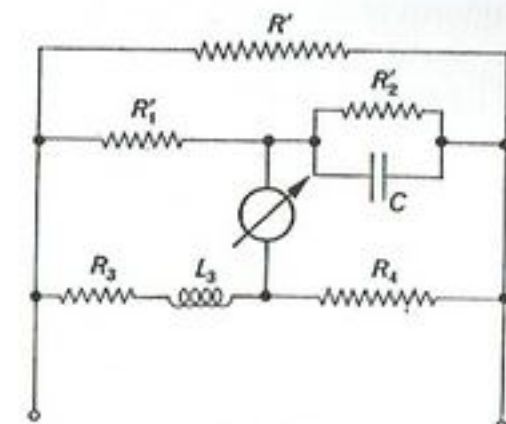



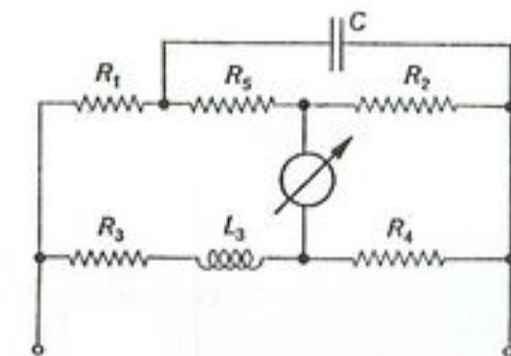
Fig. 7-34

Questa disposizione si presta meglio del semplice ponte di Maxwell per confrontare, con lo stesso campione di capacità, induttanze di diversi ordini di grandezza. Essa consente inoltre di mantenere C fisso, poiché si raggiunge l'equilibrio in modo semplice, variando R_5 e R_2.

Un altro schema a più di quattro lati è quello di fig. 7-35 (ponte di Iliovici) per il quale, eseguendo una trasformazione stella triangolo, analogamente al caso precedente, si ricava:

Fig. 7-35

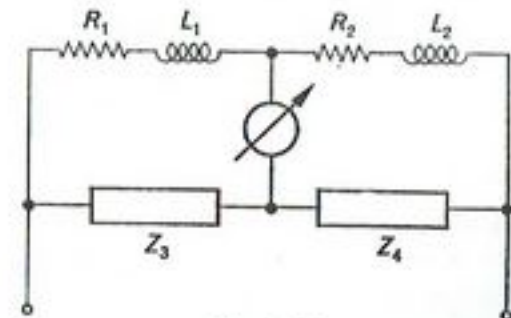
$$R_3 = \frac{R_4}{R_2}(R_1 + R_5)$$

$$L_3 = CR_4 R_1 \left(1 + \frac{R_5}{R_2}\right) ;$$

quest'ultima relazione è conveniente per confrontare fra loro campioni fissi di induttanza e capacità; si ottiene l'equilibrio variando R_5 e R_2, pur tenendo sempre $R_5 \ll R_2$, in modo che il confronto avvenga, praticamente, attraverso campioni di resistenza fissa (R_1 e R_4).

Se nei lati di un ponte che abbiamo contrassegnati con 1 e 2 disponiamo due induttori (fig. 7-36) che abbiano:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2} = k \qquad [7\text{-}17]$$

Fig. 7-36

possiamo ugualmente ottenere un ponte

a rapporto reale; esso è stato tuttavia escluso dalla classificazione, e viene poco usato nella pratica, perché richiede la condizione supplementare [7-17] per l'equilibrio.

7-3,6. *Ponti per mutue induttanze.*

Il valore della mutua induttanza M fra due avvolgimenti, con coefficienti di autoinduzione rispettivamente L_1 e L_2, può essere ricavato da due misure di induttanza, eseguite con gli avvolgimenti una volta in serie e una volta in opposizione. Si ha infatti:

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$
$$L' = L_1 + L_2 - 2M$$

da cui:

$$\frac{L - L'}{4} = M .$$

Questo metodo può portare a notevoli errori se M è piccola rispetto a L e L' o se una delle due induttanze (L o L') è molto piccola e difficilmente misurabile con il ponte.

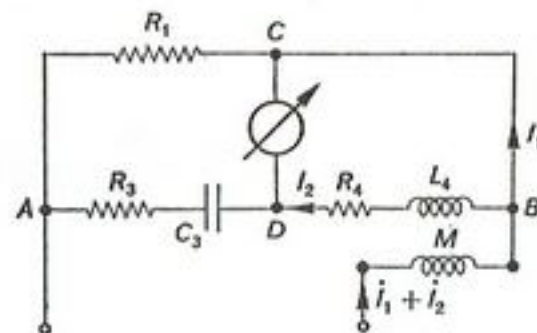



Fig. 7-37

Esistono diversi schemi che permettono la misura diretta del coefficiente di mutua induttanza M: il più noto è quello di fig. 7-37 (ponte di Carey-Foster) in cui è $Z_2 = 0$.

Le equazioni per le maglie $BDCB$ e $CDAC$ sono rispettivamente:

$$(R_4 + j\omega L_4)\dot{I}_2 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = 0$$
$$\left(R_3 - \frac{j}{\omega C_3}\right)\dot{I}_2 - R_1\dot{I}_1 = 0$$

da cui si ricava:

$$\left.\begin{aligned} M &= -\,C_3R_1R_4 \\ L_4 &= C_3R_4(R_1 + R_3)\,; \end{aligned}\right\} \qquad [7\text{-}18]$$

è ovvio che per soddisfare la prima delle [7-18] la mutua, vista con riferimento ai morsetti d'ingresso disegnati in figura, deve essere negativa; se non si raggiunge perciò l'equilibrio con una data disposizione, si deve cambiare l'ordine di una coppia di morsetti. Deve anche essere:

$$|M| < L_4$$

il che è sempre possibile ottenere, scambiando eventualmente fra loro i due avvolgimenti della mutua.

La mutua induttanza viene confrontata con campioni di capacità e resistenza e quindi con una precisione pari a quella con cui si può misurare un'autoinduttanza al ponte di Maxwell.

Lo schema precedente è talvolta usato per la misura delle capacità, partendo da mutue campioni variabili.

7-4. **Proprietà dei ponti in c.a.**

7-4,1. *Sensibilità nei ponti in c.a.*

Analogamente a quanto mostrato per i pointi in c.c., è possibile determinare, per ogni schema di ponte in c.a., il generatore equivalente ai morsetti del rivelatore di zero. Se indichiamo con $\dot{m}$ il rapporto complesso $\dot{Z}_1/\dot{Z}_2$, questo generatore ha una f.e.m.:

$$\Delta\dot{E}_0 = \frac{\dot{m}}{(1 + \dot{m})^2}\frac{\Delta\dot{Z}_3}{\dot{Z}_3}\dot{V} \qquad [7\text{-}19]$$

e un'impedenza interna:

$$\dot{Z}_i = (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3)/(1 + \dot{m}) .$$

La f.e.m. ΔE_0, di cui, in generale, interessa solo il modulo, si compone di tre fattori: uno è, come è ovvio, la tensione V di alimentazione del ponte, che non sempre può però essere assimilata alla f.e.m. della sorgente di alimentazione, se questa sorgente non ha impedenza interna sufficientemente bassa; il termine $\dot{m}/(1 + \dot{m})^2$ ha un massimo per $\dot{m} = 1$ (impedenze adiacenti uguali, o almeno dello stesso ordine di grandezza); nel caso $\dot{m}$ sia immaginario (ponti a rapporto immaginario) questo termine è circa doppio rispetto al caso di rapporto reale.

Il termine $\Delta\dot{Z}_3/\dot{Z}_3$ mostra come si possa avere lo stesso ΔE_0, ossia lo stesso scostamento dalle condizioni di equilibrio per uguali valori dello scarto assoluto ΔZ_3, indipendentemente dalla sua fase. Ciò significa che l'equilibrio si considera realizzato quando si è in una zona circolare intorno al vertice del vettore $\dot{A}$ di fig. 7-8. Perciò, se l'impedenza incognita ha componenti di valore molto diverso ($X \ll R$ o viceversa) occorre una

elevata sensibilità, esuberante rispetto alla precisione conseguibile sulla componente maggiore, per ottenere con precisione sufficiente la componente minore.

Per quanto riguarda l'impedenza interna, si tenga presente la possibilità di modificarne il modulo, attraverso l'uso di un trasformatore di rapporto opportuno, inserito sulla diagonale del rivelatore di zero. È però in genere difficile raggiungere le condizioni ideali di adattamento (che, per un rivelatore di zero di impedenza $R_g + jX_g$ richiederebbero $R_i = R_g$; $X_i = -X_g$).

7-4,2. *Elementi parassiti.*

Le condizioni di equilibrio ricavate nei paragrafi precedenti sono subordinate all'ipotesi di poter definire le impedenze dei singoli lati del ponte che, in parte, consistono di elementi puri. Quando questa ipotesi non sia verificata, si possono commettere notevoli errori sistematici nella misura dell'impedenza incognita e, in qualche caso, risulta impossibile raggiungere una condizione di zero. Ciò è dovuto agli elementi parassiti presenti nel ponte sotto diversa forma: resistenze e induttanze dei collegamenti, mutua induttanza fra i vari lati, capacità e conduttanze di dispersione verso gli oggetti circostanti, oltre naturalmente agli elementi parassiti propri dei singoli campioni e degli organi di regolazione utilizzati nel ponte.

È difficile poter tener conto, in modo completo, di tutti questi effetti; considereremo perciò, separatamente, due tipi di elementi parassiti:

a) i parametri interni ai diversi lati (residui);

b) le ammettenze fra i nodi del ponte.

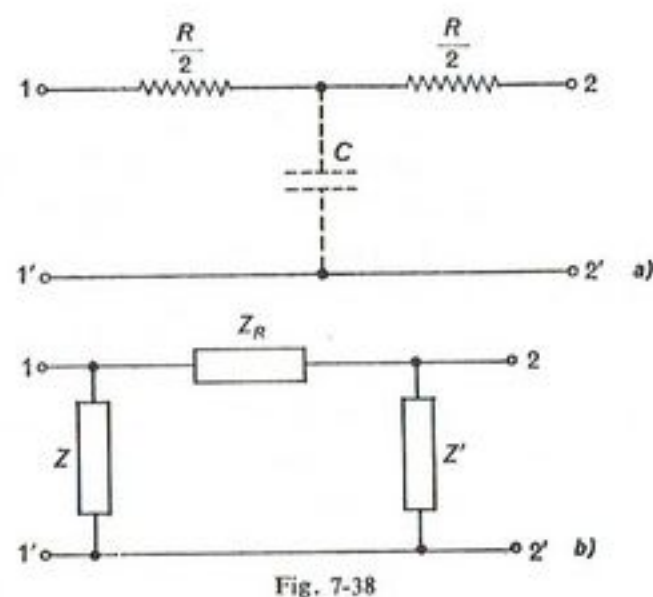



Fig. 7-38

In generale, questa scomposizione può avvenire riducendo l'intera impedenza Z fra due morsetti del ponte ad un opportuno schema equivalente. Ad esempio, il resistore di fig. 7-38 *a* (semplificazione di un elemento schermato) può essere ricondotto ad uno schema equivalente a triangolo del tipo di fig. 7-38 *b*, dove l'impedenza serie Z_R sarà:

$$\dot{Z}_R = R\left(1 + j\frac{\omega RC}{4}\right)$$

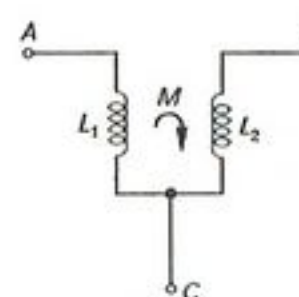
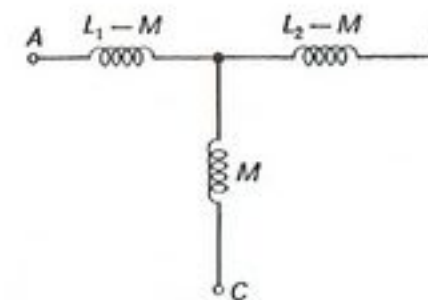



Fig. 7-39 *a* Fig. 7-39 *b*

comprendendo una parte reattiva, piccola rispetto alla R, che costituisce il residuo. Fra i nodi 11′ e 22′ sussistono due impedenze parassite Z e Z'.

Analogamente, se fra due lati contigui esiste un mutuo accoppiamento (fig. 7-39 *a*), esso può essere ricondotto allo schema equivalente di fig. 7-39 *b*.

Si noti che, collegando fra loro nello stesso lato due elementi puri (p. es. un condensatore e un resistore) il circuito equivalente che ne risulta è influenzato dall'ammettenza presente nel punto di collegamento (fig. 7-40), che non può essere considerata come l'ammettenza in un nodo. Ciò non avviene per elementi fra loro in parallelo.

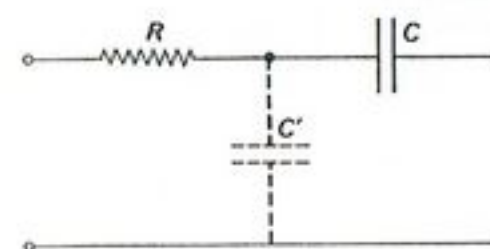



Fig. 7-40

7-4,3. *Residui.*

Si consideri un ponte, di cui due lati siano costituiti, anziché da pure resistenze o capacità, da impedenze del tipo:

$$\dot{Z}_R = R(1 + j\delta_R)$$

ovvero:

$$\dot{Z}_c = -jX_c(1 + j\delta_c)\,.$$

Come è noto, (2-6,1) $\delta_R = \omega T_0$ può essere positivo o negativo, essendo T_0 la costante di tempo del resistore; δ_c è l'angolo di perdita del condensatore. Ambedue queste grandezze sono funzioni della frequenza e supposte piccole rispetto all'unità.

L'espressione generale dell'equazione di equilibrio [7-13]:

$$R_3 + jX_3 = k(M + jN)$$

diviene di conseguenza:

$$R_3 + jX_3 = k(1 + j\Delta)(M + jN) \qquad [7\text{-}20]$$

dove è:

$\Delta \simeq \delta_1 - \delta_2$ per i ponti a rapporto

$\Delta \simeq \delta_1 + \delta_4$ per i ponti a prodotto.

Si verifica facilmente, dalla [7-20], che la considerazione del fattore $(1 + j\Delta)$, di modulo praticamente unitario, non altera il modulo dell'impedenza $\dot{Z}_3$, ma aggiunge, al suo argomento, un angolo praticamente pari a Δ.

Oltre a questo, si deve tener conto anche dei residui propri anche dell'altra impedenza nota del ponte (Z_4 nei ponti a rapporto, Y_2 nei ponti a prodotto). Essi corrispondono a degli errori sulla valutazione delle componenti, reale e immaginaria, che compaiono nell'equilibrio.

Spesso è possibile eliminare l'effetto dei residui con metodi di sostituzione o con permutazioni dei vari lati; talvolta si possono apportare delle correzioni, determinando il loro valore per via di calcolo o con misure supplementari (p. es. con il lato dell'incognita in cortocircuito).

In ogni caso, i residui sono meno sensibili sugli elementi fissi anziché su quelli variabili; come già si è osservato, per i resistori hanno valori minimi per resistenze fra i 10 e i 1000 ohm.

7-4,4. *Ammettenze fra i nodi. Schermatura.*

Se si considera uno schema di ponte con le possibili ammettenze fra i vari nodi (fig. 7-41), si riconosce facilmente che gli elementi che possono influenzare l'equilibrio sono solo quelli che dai vertici AB del ponte fanno capo ai nodi CD del rivelatore di zero. Infatti, l'impedenza fra A e B è in parallelo alla sorgente di alimentazione e quella fra C e D non è, all'equilibrio, percorsa da corrente ed influisce, tutt'al più, solo sulla sensibilità dell'equilibrio stesso.

Lo stesso risultato si ottiene considerando le ammettenze verso massa, sia nel caso che sia a massa un nodo, sia nel caso in cui nessun punto del circuito sia direttamente collegato a massa.

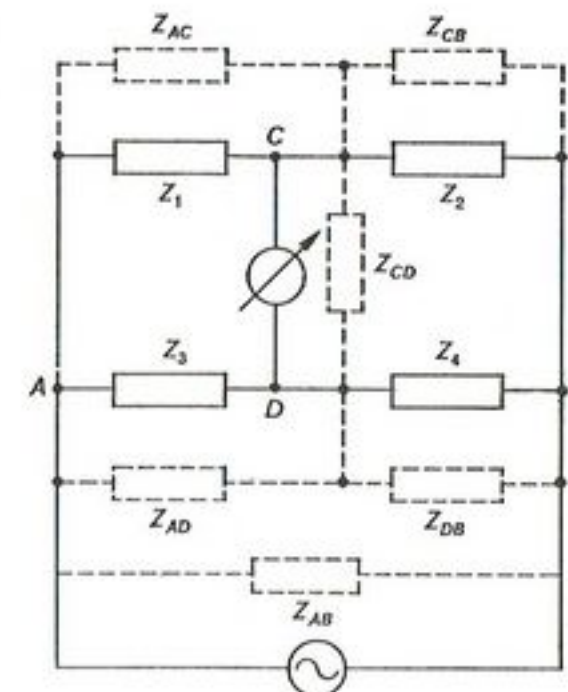



Fig. 7-41

Si tratta, in ogni caso, di ammettenze che adducono ai nodi C e D delle correnti che non sono prese in considerazione nell'equazione [7-10] di equilibrio del ponte, equazione che si basa sull'ipotesi che i due lati che concorrono nel nodo C (o in D) siano percorsi dalla stessa corrente.

Il problema si riduce quindi a proteggere i nodi C e D per evitare che ad essi confluiscano correnti che non siano quelle dovute alle impedenze dei lati del ponte. Ciò si può ottenere ricoprendo il lato CD con un'opportuna *schermatura* (fig. 7-42), alimentata da una sorgente esterna di f.e.m., che la porta allo stesso potenziale del lato stesso, in modo che non circolino correnti fra lo schermo e i nodi C, D fra cui pure esiste un'ammettenza non trascurabile. La sorgente di f.e.m., isofrequenziale con l'alimentazione

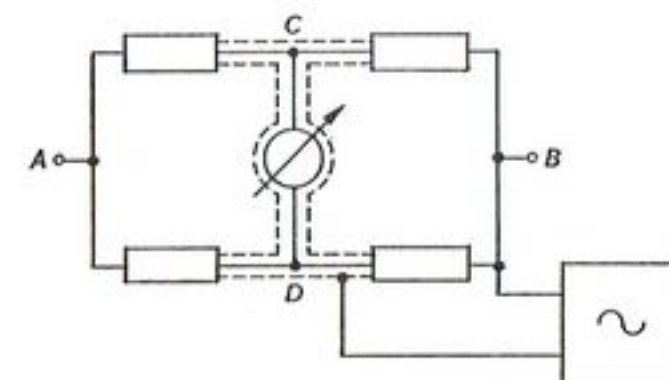



Fig. 7-42

del ponte, deve perciò essere regolabile in ampiezza e fase. Il raggiungimento dell'equipotenzialità si controlla mediante l'azzeramento dello stesso rivelatore di zero, connesso fra un nodo e lo schermo; la sensibilità di questo equilibrio può essere ridotta, rispetto a quella dell'equilibrio principale, ma le due regolazioni (ciascuna su due grandezze) devono essere eseguite progressivamente e alternativamente fino al raggiungimento di entrambi gli equilibri.

Non mancano esempi in cui la regolazione dello schermo avviene mediante un dispositivo automatico, che porta ad annullare la tensione fra rivelatore e schermo.

Si noti che l'effetto delle ammettenze parassite in parallelo sui lati del ponte risulta nullo se esse stanno fra loro nello stesso rapporto delle ammettenze dei rispettivi lati. Quanto più ci si allontana da tale condizione, tanto maggiore è l'errore che esse introducono, in assenza di schermatura, e tanto maggiore è la corrente che deve erogare la sorgente ausiliaria per rendere efficace la schermatura.

7-4,5. *Terra di Wagner.*

La schermatura di cui al precedente paragrafo può essere anche costituita da un elettrodo al potenziale di massa; a ciò si ricorre specie quando si desidera che la diagonale di rivelazione CD lavori, in equilibrio, al potenziale di terra.

Il potenziale della terra rispetto ai nodi A, B del ponte viene regolato disponendo due impedenze (fig. 7-43) ausiliarie Z_A e Z_B, regolabili in ampiezza e fase in modo da azzerare la tensione fra D e T. Le modalità di questi azzeramenti sono analoghe a quelle descritte nel precedente paragrafo.

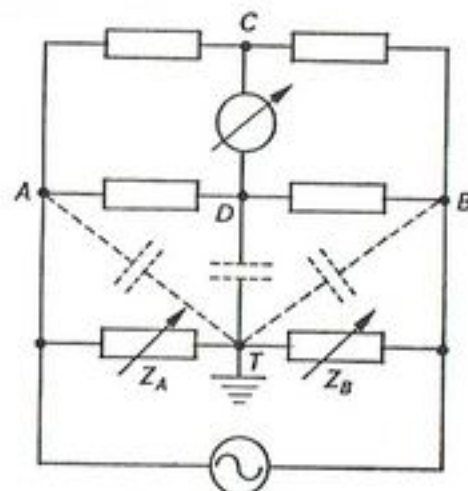



Fig. 7-43

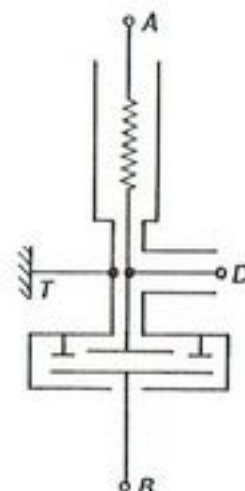



Fig. 7-44

Si noti che la condizione di equipotenzialità fra D e T non è equivalente ad una loro connessione diretta, in quanto essa consentirebbe una circolazione in D di correnti estranee all'equilibrio del ponte. La presenza di un'ammettenza finita assicura invece che, con d.d.p. nulla, non vi sia circolazione di corrente.

Lo schema sopra indicato va sotto il nome di terra di Wagner e risulta molto utile quando i singoli elementi del ponte sono già, per loro natura, provvisti di schermi che vengono così direttamente collegati al potenziale di terra (fig. 7-44).

7-4,6. *Esecuzione delle schermature.*

Oltre alle ammettenze parassite dovute ai componenti principali del ponte, occorre spesso tener conto anche di quelle delle connessioni e del lato relativo al rivelatore di zero. Per ridurne l'influenza e per compensarne gli effetti, è in primo luogo necessario che esse siano rese le più piccole possibili, ma soprattutto ben definite e costanti. Queste ammettenze dipendono dalla forma, dimensione e posizione dei vari elettrodi, fra i quali devono esser tenuti in conto gli oggetti al potenziale di massa ed in particolare l'operatore stesso. Per le connessioni, la schermatura più semplice ed efficace si realizza utilizzando cavi coassiali, o cavi bipolari schermati.

Spesso l'alimentazione e il rivelatore di zero, se di tipo elettronico, funzionano con un collegamento a massa ed è necessario pertanto prevedere dei trasformatori, sia per l'alimentazione che per la rivelazione. Questi trasformatori hanno gli avvolgimenti separati da schermi metallici, non formanti spire chiuse, che hanno anche funzione di ridurre gli effetti dei campi elettromagnetici esterni. La schermatura deve essere particolarmente curata nel caso del secondario che va al rivelatore di zero, nel quale non deve essere indotta alcuna f.e.m. che non sia legata ad un'analoga f.e.m. esistente nel primario. Ciò si ottiene aggiungendo uno o più schermi magnetici in materiale ad alta permeabilità, avvolti attorno all'intero trasformatore.

7-4,7. *Alcuni casi particolari.*

Come si è già osservato, non tutti gli effetti delle capacità parassite verso terra possono essere eliminati mediante la schermatura. Questo è, ad esempio, il caso delle misure su oggetti di rilevanti dimensioni fisiche, in cui le ammettenze parassite Y devono essere considerate distribuite, in prima approssimazione in modo uniforme, lungo l'intera altezza. Adottando i metodi di calcolo propri delle linee a costanti uniformemente distribuite, si ricava che fra la tensione applicata ad un estremo e la cor-

rente all'estremo opposto esiste la relazione (vedi 2-3,6):

$$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \dot{Z}_{eq} = \dot{Z}\frac{\operatorname{senh} \dot{a}l}{\dot{a}l} \qquad [7\text{-}21]$$

con:

$$\dot{a}l = \sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}\,.$$

In prima approssimazione, si può assumere che, nella [7-21], $\dot{Z}$ rappresenti l'impedenza che si misurerebbe in assenza delle ammettenze parassite. Se il termine al è piccolo, si può scrivere:

$$\dot{Z}_{eq} \simeq \dot{Z}\left[1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{6}\right]$$

che corrisponde ad uno sviluppo in serie della [7-21] arrestato al secondo termine.

I dispositivi di schermatura sono invece molto utili per misure di capacità parziali; infatti, per la definizione stessa di capacità parziale, occorre misurare la capacità fra due elettrodi 1 e 2 quando tutti gli altri sono allo stesso potenziale dell'elettrodo 2. A ciò provvedono appunto i circuiti di guardia.

7-4,8. *Scelta del tipo di ponte.*

La grande varietà di schemi, con cui può essere effettuata la misura di una stessa impedenza, non deve far ritenere che essi siano tutti equivalenti, specie quando si vogliano effettuare misure molto accurate. La scelta dell'uno o dell'altro metodo può dipendere da vari fattori, legati alla natura della grandezza da misurare (suo valore e angolo di fase) alla disponibilità di campioni fissi e variabili (sia come precisione che come valori adatti all'equilibrio) alla frequenza a cui eseguire le misure, ecc.

I diversi tipi di ponte possono differire fra loro per la maggiore o minore sensibilità e rapidità di convergenza verso l'equilibrio, per la maggiore o minore indipendenza delle due regolazioni che conducono all'equilibrio, per la più o meno marcata influenza dei residui. Al fine, ad esempio, di limitare l'effetto dei residui, è opportuno che i resistori campioni utilizzabili siano di valore non inferiore ai 10 o superiore ai 1000 Ω; l'importanza dei residui cresce al crescere della frequenza di lavoro.

Altre limitazioni per la scelta dei vari metodi di ponte possono essere date dal tipo di alimentazione disponibile (potenza massima, contenuto di armoniche, ecc.) o del tipo di rivelatore di zero (sensibilità, impedenza interna, selettività).

L'adattamento dell'impedenza del rivelatore a quella del ponte, ovvero dell'impedenza del ponte a quella interna del generatore, possono facilmente effettuarsi attraverso trasformatori di accoppiamento con opportuno rapporto, accuratamente schermati sia agli effetti delle capacità parassite, sia agli effetti dei campi elettromagnetici esterni.

7-5. **Metodi potenziometrici.**

7-5,1. *Principio del potenziometro.*

Si consideri la resistenza R di figura 7-45, a cui è applicata la d.d.p. continua V; fra il punto A e il cursore mobile C si preleva, a vuoto, una f.e.m.:

$$E_0 = V\frac{r}{R}$$

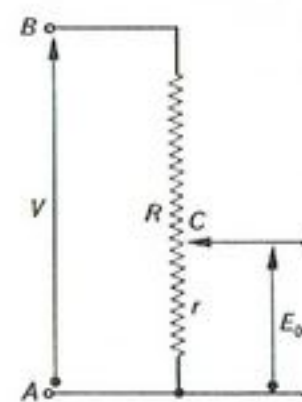
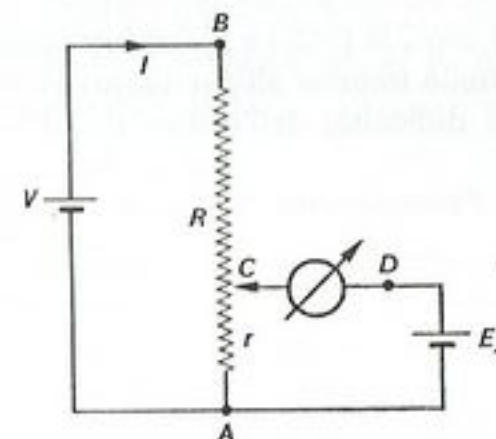



Fig. 7-45 Fig. 7-46

dove r è il valore della resistenza compresa fra i punti A e C. Questo circuito si presta alla misura di una f.e.m. continua E_x, inserita in opposizione alla E_0 sui morsetti AC (fig. 7-46), per confronto con la d.d.p. V; in condizioni di equilibrio è infatti:

$$E_x = E_0 = V\frac{r}{R}\,.$$

Occorre notare che, mentre la sorgente che fornisce la tensione V eroga la corrente $I = V/R$, in condizioni di equilibrio la f.e.m. E_x non eroga corrente. Il potenziometro permette perciò di misurare f.e.m., senza assorbirne corrente.

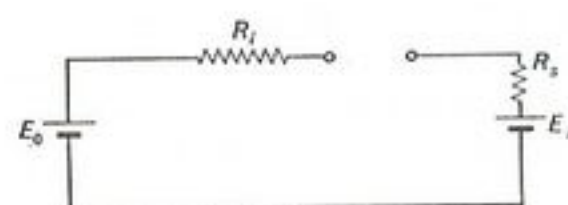



Fig. 7-47

Lo schema equivalente ai morsetti del rivelatore di zero (fig. 7-47) consta di una f.e.m. del valore E_0 con resistenza interna di valore:

$$R_i = \frac{r(R-r)}{R},$$

contrapposta alla f.e.m. E_x con resistenza interna R_s; la f.e.m. risultante è:

$$\Delta E = E_0 - E_x = \Delta r I = \frac{\Delta r}{r} E_x \qquad [7\text{-}22]$$

proporzionale allo scostamento Δr del cursore dalla posizione d'equilibrio.

Per far circolare la corrente I_m nel rivelatore di zero, di resistenza g deve essere:

$$\Delta E = (R_i + R_s + g) I_m . \qquad [7\text{-}23]$$

Ponendo per I_m la minima corrente che può essere percepita sul rivelatore di zero, le [7-22] e [7-23] forniscono il valore della minima variazione percettibile intorno all'equilibrio. Si vede che essa può essere, senza particolari difficoltà, dell'ordine di $10^{-6} \div 10^{-7}$ volt.

7-5,2. *Potenziometro in c.c. (a corrente costante).*

Nelle misure in c.c., il potenziometro viene usato quasi esclusivamente per metodi di sostituzione, in modo da ottenere dei risultati il più possibile indipendenti dai valori e dalla precisione delle resistenze impiegate. Poiché è possibile raggiungere sensibilità molto elevate, il potenziometro si presta così, ad esempio, per il confronto di f.e.m. e cadute di tensione con le pile campioni, di pile campioni fra di loro ed, in generale, per le tarature fondamentali in c.c. (vedi 8-1).

Date due f.e.m. E_1 e E_2, con due equilibri successivi si ottiene:

$$E_1 = V\frac{r_1}{R}; \qquad E_2 = V\frac{r_2}{R}$$

e quindi:

$$E_2 = E_1 \frac{r_2}{r_1}.$$

Per facilitare i calcoli, nel primo equilibrio relativo alla f.e.m. nota E_1, si imposta un valore di r_1 tale che E_1/r_1 sia un numero intero semplice e si raggiunge l'equilibrio variando R; per l'equilibrio su E_2 si varia invece soltanto r; si possono anche graduare in modo arbitrario le indicazioni dell'apparecchio, purché le letture siano proporzionali ai rispettivi valori di r.

Condizione necessaria per poter confrontare i due equilibri è che resti costante la corrente $I = V/R$ che percorre il potenziometro, al variare della posizione del cursore C (potenziometro a corrente costante). Tale costanza si può verificare, controllando il permanere del primo equilibrio, dopo aver eseguito il secondo. Per l'alimentazione del potenziometro è conveniente l'impiego di accumulatori che diano f.e.m. costante, ossia funzionanti nel periodo intermedio del loro ciclo di scarica.

Quando si vogliano raggiungere le sensibilità elevate (dell'ordine di 10^{-7}) che sono possibili con questo metodo, occorre anche evitare le f.e.m. parassite, in particolare quelle di origine termoelettrica; si possono tuttavia compensarne gli effetti, con due equilibri ottenuti invertendo le polarità delle sorgenti di f.e.m. presenti. Occorre inoltre avere resistenze stabili, a regime termico e senza incertezze sui contatti; si deve curare l'isolamento o la schermatura del circuito, per limitare l'effetto di eventuali correnti di dispersione.

Come in tutti i metodi di sostituzione, la precisione può essere tanto più elevata quanto più vicini sono fra loro i valori di E_1 e E_2. Se infatti il valore di r_2 si ottiene aggiungendo materialmente ad r_1 la quantità $\Delta r (\ll r_1)$, l'errore sul rapporto $z = E_2/E_1$ vale [1-11]:

$$e_z = (e_{\Delta r} + e_{r1})\, \Delta r / r_1 + 2\sigma ;$$

l'errore relativo sulla f.e.m. E_2 vale pertanto:

$$e_2 = e_1 + e_z .$$

Col potenziometro si misurano soprattutto f.e.m. dell'ordine di quella della pila campione, cioè dell'ordine del volt. Per proteggere sia il rivelatore di zero che le f.e.m. dal passaggio di correnti eccessive, durante le operazioni necessarie a raggiungere l'equilibrio, il variatore di sensibilità consiste spesso in un resistore serie, di valore elevato ($10^4 \div 10^6\ \Omega$).

7-5,3. *Tipi di potenziometri a corrente costante.*

Il tipo più semplice di circuito potenziometrico a corrente costante è quello di fig. 7-48, derivato direttamente dallo schema di fig. 7-45; qui i cursori sono due, uno su una serie (da 10 a 20) di n resistenze di ugual valore r_0, l'altro su un filo calibrato la cui resistenza totale vale pure r_0 (tenendo conto di una eventuale resistenza in parallelo sugli estremi del filo). In tal modo la d.d.p. che si può prelevare è variabile a gradini (in generale corrispondenti ai decimi di volt) col primo cursore e in modo continuo sul secondo; per rendere disponibile un maggior numero di cifre significative, il filo calibrato può essere molto lungo e, per comodità, avvolto

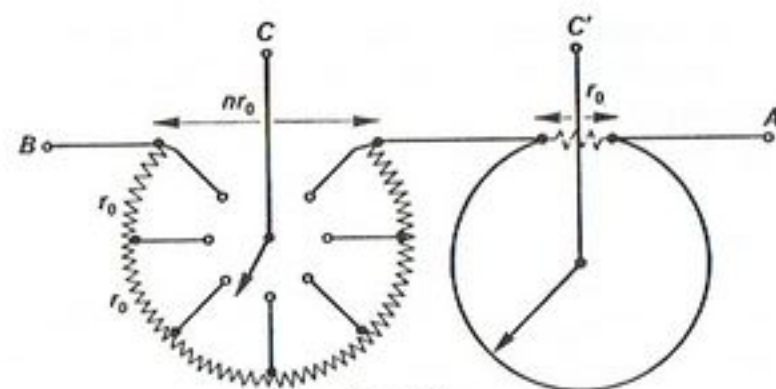



Fig. 7-48

a elica su un tamburo graduato (p. es. 10 giri di un metro ciascuno, in modo che uno spostamento di un millimetro corrisponda a 10^{-5} volt).

Un altro schema è rappresentato in fig. 7-49; esso si compone di due decadi (AA' e BB') del tipo illustrato in 5-2,4, completate da una resistenza di valore $100R$, che può essere commutata all'interno o all'esterno del tratto AB.

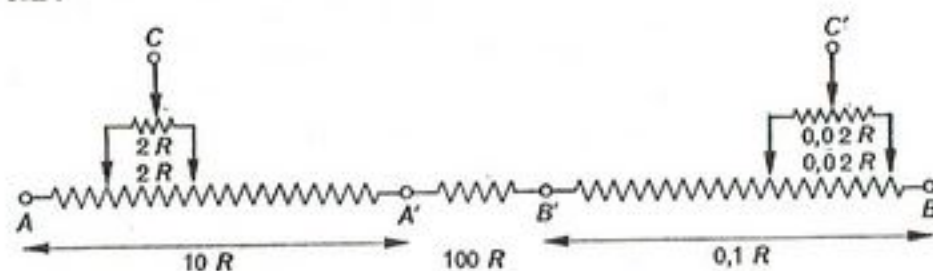



Fig. 7-49

Un sistema più semplice, ma in cui la costanza della corrente è affidata esclusivamente alla precisione delle varie resistenze, è rappresentato dalle decadi complementari (fig. 7-50); ad ogni elemento disinserito dal tratto $B'B''$ corrisponde l'inserzione di un elemento diverso, ma di ugual valore, sul tratto AA', in modo che sia costante la resistenza del tratto AB. Per limitare gli errori, dovuti alle differenze fra resistenze, le uscite C e C' sono poste sulle decadi a valore più elevato.

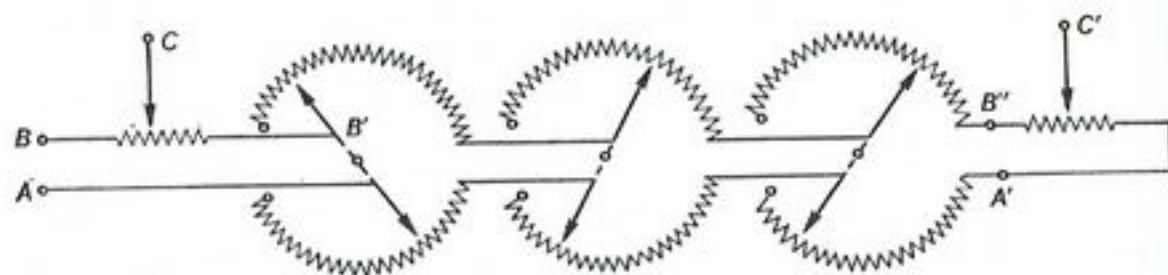



Fig. 7-50

I potenziometri di tipo commerciale possono essere caratterizzati da una classe di precisione c in % (o in ppm); in tal caso essi garantiscono errori inferiori a:

$$\Delta E = c\left(E_x + \frac{U}{10}\right) \times 10^{-2} \qquad (\text{o } 10^{-6})$$

dove E_x è la tensione misurata e U una tensione di riferimento specificata, usualmente corrispondente alla lettura di fondo scala.

7-5,4. *Potenziometri per piccole f.e.m.*

Il potenziometro può essere particolarmente utile per misure di piccole f.e.m. (dell'ordine dei millivolt o dei microvolt), nel campo p. es. delle f.e.m. termoelettriche o elettrochimiche. Si vuole in questi casi utilizzare il potenziometro sia senza perdere i vantaggi di un confronto con la f.e.m. campione, sia senza ridurre il numero di cifre significative nella lettura.

Un semplice schema che realizza questo scopo è quello di fig. 7-51; in esso la d.d.p. V risulta sempre chiusa sulla stessa resistenza totale, indipendentemente dalla connessione del commutatore, su B o su B'. La d.d.p. disponibile sulla resistenza potenziometrica AB, nei due casi, varia però nel rapporto da 100 a 1; l'equilibrio con la f.e.m. campione viene eseguito con il commutatore su B, in modo che la resistenza AB abbia cadute dell'ordine del volt; l'equilibrio sull'incognita viene eseguito con il commutatore su B', in modo da poter misurare d.d.p. cento volte minori. Il sistema può essere esteso a più rapporti: occorre però notare che la sua precisione è legata alla precisione dei rapporti fra le varie resistenze, precisione che di solito non supera i 10^{-4}.

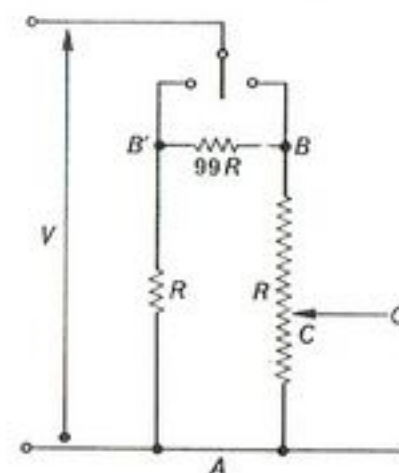



Fig. 7-51

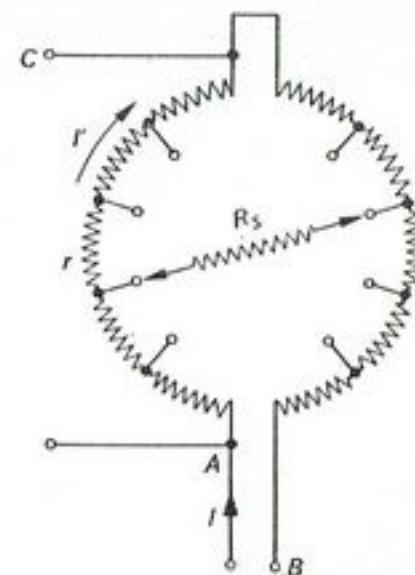



Fig. 7-52

In questi potenziometri è necessario ricorrere a diversi accorgimenti per eliminare i contatti mobili in serie sulla f.e.m. da misurare e per ridurre gli effetti delle f.e.m. termoelettriche interne. Per ovviare al primo inconveniente, si adottano dei partitori di corrente del tipo di fig. 7-52, dove le resistenze di contatto sono in serie sulla resistenza R_s; essa, muovendosi sulle decadi complementari, mantiene costante la resistenza totale fra A e B ma varia la porzione di r che è percorsa dalla corrente I rispetto a quella che è percorsa dalla sua frazione I'. Un altro esempio è dato in fig. 7-53.

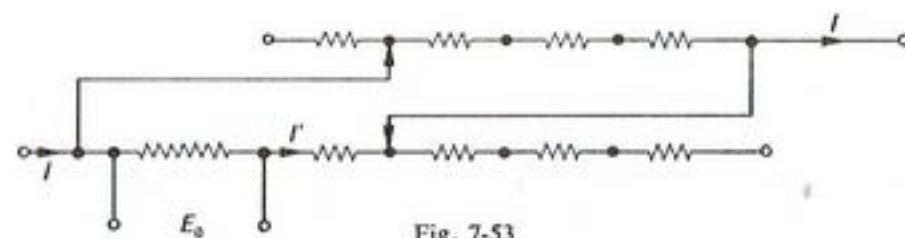



Fig. 7-53

Per limitare le f.e.m. termoelettriche occorre assicurare l'uniformità di temperatura a tutte le giunzioni fra metalli diversi, racchiudendole eventualmente in «schermi termici» costituiti da blocchi di rame.

7-5,5. *Potenziometri per c.a. a confronto diretto.*

In corrente alternata sinusoidale, il circuito potenziometrico di fig. 7-45 può essere modificato come mostra fig. 7-54. Nell'ipotesi di avere:

$$\omega C R_2 \ll 1 \qquad [7\text{-}24]$$

le tensioni $\dot V_1$ e $\dot V_2$ sono rispettivamente:

$$\dot V_1 = \dot V \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left[1 + j\omega C R_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right] = \dot V \frac{R_1}{R_1 + R_2}[1 + j\delta]$$

$$\dot V_2 = \dot V \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left[1 - j\omega C R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right] = \dot V \frac{R_2}{R_1 + R_2}[1 - j\delta'] .$$

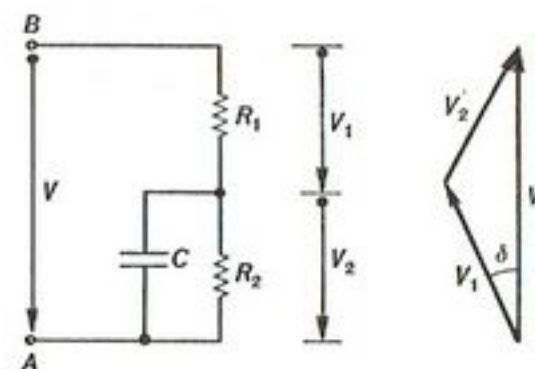



Fig. 7-54

È così possibile prelevare, sulla resistenza R_1 una tensione $\dot V_1$ in anticipo rispetto a $\dot V$ e sulla R_2 una tensione in ritardo; lo sfasamento δ fra queste tensioni è proporzionale al valore della capacità C e della frequenza.

In pratica, una parte del resistore è composta da decadi complementari o altri dispositivi, simili a quelli visti per i potenziometri a c.c.; il condensatore può essere collegato in parallelo alla metà inferiore o a quella superiore del resistore, per cambiare di segno l'angolo della tensione prelevata al cursore.

Per non superare i limiti posti dalla [7-24], questo potenziometro può servire solo nel caso, peraltro molto frequente, di piccoli sfasamenti fra $\dot V$ ed $\dot E_x$ (δ, δ' dell'ordine del centiradiante); esso è usato per impieghi a frequenza industriale.

Un altro schema è quello di fig. 7-55, che utilizza una mutua induttanza variabile M; in equilibrio deve essere:

$$\dot E_x = (r + j\omega M)\dot I ; \qquad [7\text{-}25]$$

le componenti della $\dot E_x$, in fase e in quadratura con la $\dot I$, sono date separatamente dai valori della resistenza r del tratto BC e della mutua induttanza; anche in questo caso, come nel precedente, la componente in quadratura è espressa in funzione della frequenza, che deve perciò essere nota.

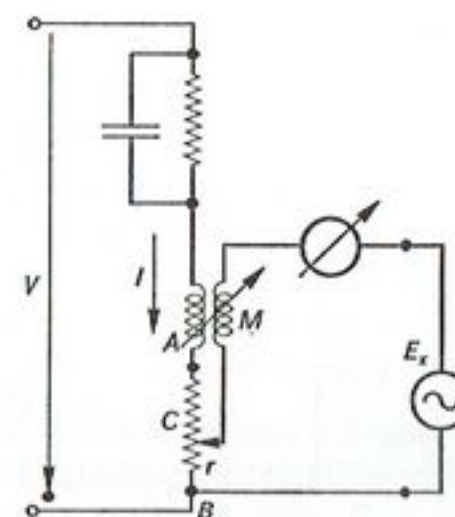



Fig. 7-55

Mediante la [7-25] si confronta la tensione $\dot E_x$ con la corrente $\dot I$; si possono però disporre le cose in modo che la corrente $\dot I$ risulti, a sua volta, in fase ed in rapporto noto con la tensione $\dot V$, in modo che il confronto avvenga fra $\dot E_x$ e $\dot V$.

7-5,6. *Potenziometri a c.a., per metodi di sostituzione.*

Nello schema di fig. 7-56, quando sia:

$$R_c C = \frac{L}{R_L},$$

le correnti $\dot I_1$ e $\dot I_2$ sono fra loro in quadratura. Quando i cursori sono sulle mezzerie A e B delle rispettive resistenze, essi risultano equipotenziali (fig. 7-57); spostandoli lungo le resistenze, si presenta ai mor setti CC' una f.e.m. somma di due termini fra loro in quadratura e proporzionali alle frazioni di resistenza comprese fra i cursori e le rispettive

mezzerie. Poiché i valori di $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ variano con la frequenza, si fa in modo che sia:

$$\omega R_c C = 1 = \omega \frac{L}{R_L}$$

alla frequenza di misura, in modo da avere uguali cadute nei due resistori.

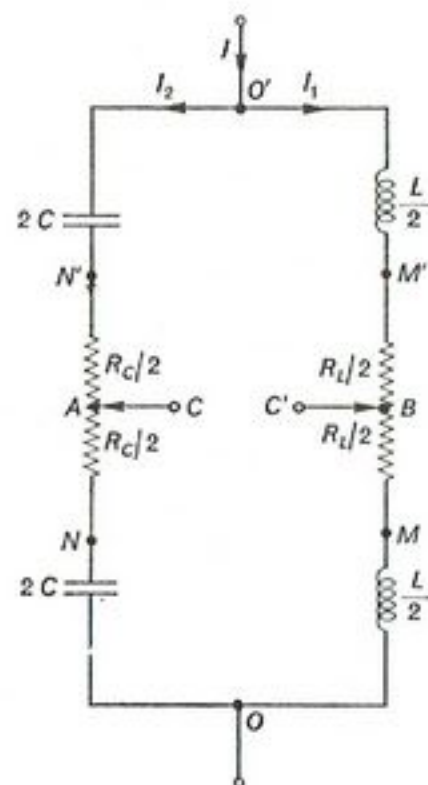



Fig. 7-56

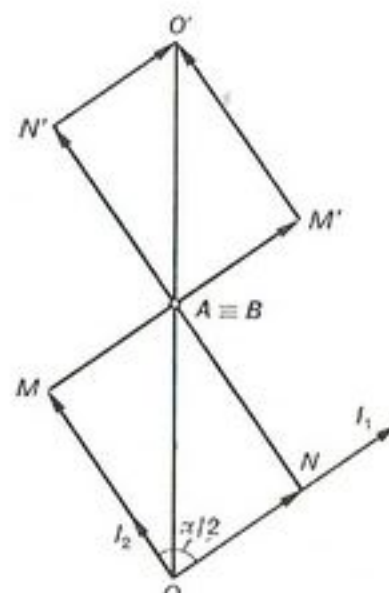



Fig. 7-57

Il circuito è adatto per metodi di sostituzione, fino alle frequenze acustiche.

Un altro schema di potenziometro, più adatto a misure per sostituzione che a confronti diretti, è quello di fig. 7-58, detto anche a coordinate polari, per differenziarlo dai precedenti che danno le componenti della $\dot{E}_x$ secondo due assi ortogonali. L'equilibrio si ottiene sul modulo della $\dot{E}_x$ variando la posizione dei cursori C, C' sulla resistenza R; sulla fase ruotando lo sfasatore S; questo deve essere tale da non influire sull'ampiezza della V, pur variandone la fase con continuità.

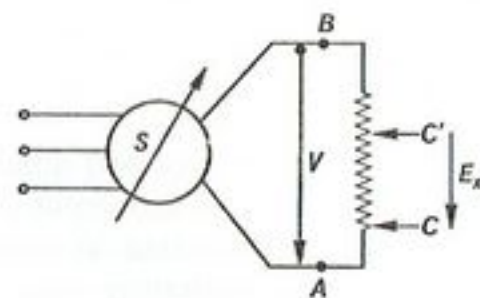



Fig. 7-58

In generale, questo metodo presenta una discreta precisione solo se l'angolo fra le f.e.m. confrontate è abbastanza grande da rendere trascurabile l'errore proprio dello sfasatore.

Gli sfasatori, costituiti da motori asincroni con rotore bloccato, non danno in genere affidamento di precisione e introducono armoniche dovute alla dentatura e all'avvolgimento non uniformemente distribuito.

Altri variatori di fase possono essere realizzati mediante un amplificatore operazionale (4-1,9) che introduce una funzione di trasferimento di modulo costante e sfasamento regolabile o, per frequenze elevate, con linee di ritardo a parametri distribuiti.

7-6. **Altri metodi di confronto.**

7-6,1. *Principio di opposizione delle correnti.*

Nel circuito di fig. 7-59, si ha, in condizioni di equilibrio:

$$-\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad [7\text{-}26]$$

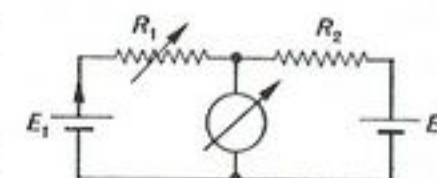



Fig. 7-59

relazione che permette il confronto fra le sorgenti di tensioni continue E_1, E_2 o — se queste sono note o è noto il loro rapporto — fra le resistenze R_1 e R_2. Entrambe le sorgenti erogano corrente, e perciò le loro resistenze interne fanno parte delle R_1 e R_2.

Questo metodo presenta qualche interesse di principio se considerato come duale del potenziometro per c.c., ossia come mezzo di confronto, per opposizione, fra due generatori di corrente, uno dei quali lavora in condizioni ideali di cortocircuito, e l'altro è chiuso sulle conduttanze G e g, fra loro in parallelo.

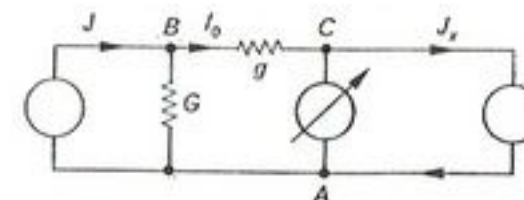



Fig. 7-60

Lo schema si riporta infatti facilmente a quello di fig. 7-60: la sorgente J provoca, nel ramo AC, una corrente nulla, quando la sua frazione I_0 è uguale alla corrente J_x prodotta dal generatore di corrente incognita.

Essendo, in equilibrio:

$$I_0 = J \frac{g}{G+g}$$

la condizione d'equilibrio risulta:

$$J_x = I_0 = J \frac{g}{G+g}\,.$$

Per questo schema, al pari di quello potenziometrico, è particolarmente semplice il calcolo della sensibilità; infatti se I_m è, come al solito, la minima corrente percettibile nel rivelatore di zero, la sensibilità risulta:

$$\sigma = \frac{I_m}{J_x}\,.$$

Il circuito è poco usato in questa forma ma trova applicazioni in altri schemi.

7-6,2. *Ponti a trasformatore.*

Lo schema sopraindicato presenta applicazioni pratiche nel caso di correnti alternate, quando, a mezzo di opportuni trasformatori, si possono mettere in opposizione fra loro correnti dovute alla stessa sorgente, che attraversino impedenze diverse, ovvero le correnti dovute a due sorgenti di tensione, che stiano fra loro in rapporto noto.

Gli schemi fondamentali possono essere classificati secondo i tipi seguenti, validi nel caso di trasformatori ideali:

Fig. 7-61

a) ponte con trasformatore di alimentazione (fig. 7-61) che imponga la relazione:

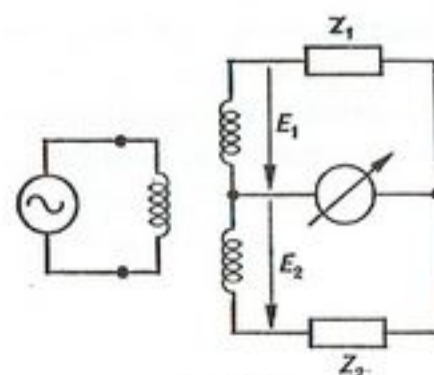
$$\dot{E}_2 = \alpha \dot{E}_1$$

con α legato a rapporti di numeri di spire nel trasformatore; si ha di conseguenza, in condizioni di equilibrio:

$$\alpha \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 \qquad \text{ovvero} \qquad \dot{Y}_1 = \alpha \dot{Y}_2\,.$$

Questo tipo di ponte, una volta usato solo con il rapporto $\alpha = 1$, che permetteva il controllo della precisione, scambiando il ruolo delle Z_1 e Z_2, si è oggi diffuso grazie ai più versatili e precisi trasformatori a decadi;

b) ponte con i bracci di rapporto accoppiati (fig. 7-62): il rivelatore di zero segna il verificarsi della condizione:

$$N_1 \dot{I}_1 - N_2 \dot{I}_2 = 0$$

e quindi della:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{N_1}{N_2}\,;$$

c) lo schema può comprendere un trasformatore sia nell'alimentazione che nel braccio di rapporto, come in fig. 7-63.

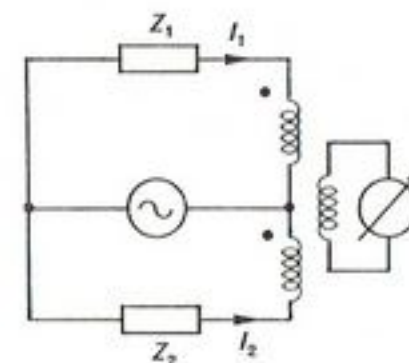
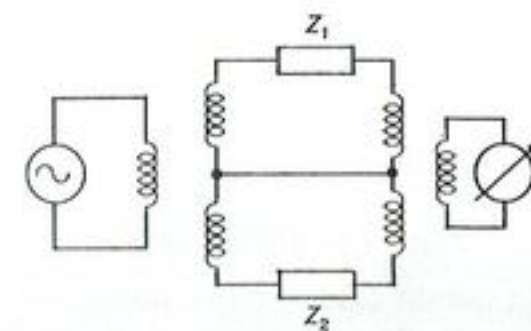



Fig. 7-62 Fig. 7-63

Quando i trasformatori non possono essere assimilati a circuiti ideali, i ponti sopraindicati sono spesso usati con metodi di sostituzione.

7-6,3. *Ponti con trasformatore a decadi.*

Le possibilità offerte dai divisori induttivi a decadi (5-2,5) hanno largamente esteso l'impiego di ponte con alimentazione a trasformatori; essi infatti consentono di regolare il valore del rapporto α con grande finezza e precisione.

Essendo il rapporto α un numero puro reale, possono essere confrontate fra loro impedenze simili. Tuttavia adottando la disposizione di fig. 7-64 si ottiene:

$$\dot{Y}_1 = \alpha \dot{Y}_2 + \alpha' \dot{Y}_2' + \ldots\,.$$

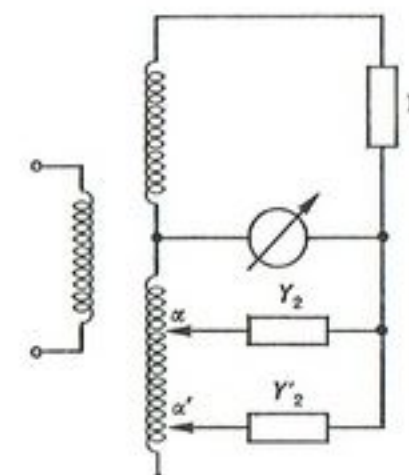
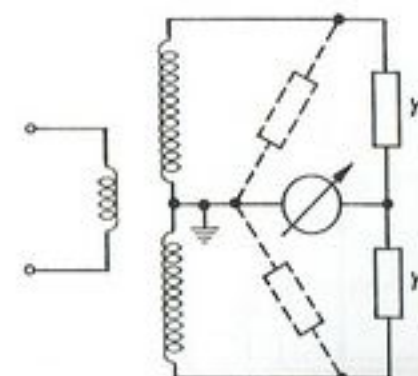



Fig. 7-64 Fig. 7-65

Generalmente si misurano conduttanze e suscettanze, per confronto con uno o più campioni fissi sia di capacità che di resistenza, che vengono spostati sulle prese del divisore. Poiché il rapporto α può essere regolato con gradini dell'ordine di 10^{-6} e garantito entro tale limite, la precisione che si raggiunge è molto elevata.

Si vede anche facilmente dalla fig. 7-65 che le ammettenze parassite verso massa non influenzano la misura, essendo derivate in parallelo all'alimentazione; ciò è vero almeno fino a quando risulti trascurabile l'impedenza interna dell'alimentazione, che nelle buone costruzioni è dell'ordine di frazioni di ohm, rispetto alle impedenze che costituiscono il carico del trasformatore stesso.

7-6,4. *Ponti con lati accoppiati.*

In questo caso si può considerare sia lo schema di fig. 7-62, sia quello, praticamente equivalente, di fig. 7-66.

Sia N il rapporto fra il numero di spire dell'avvolgimento 1 e quello dell'avvolgimento 2; siano X_1 e X_2 le reattanze totali dei due avvolgimenti, σ_1 e σ_2 i relativi coefficienti di dispersione. Il circuito equivalente ai lati CB e DB può essere posto nella forma illustrata in fig. 7-67; quando sia:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{I}_2}{N}$$

non si ha caduta fra i punti B e F ed è perciò:

$$\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{(R_1 + j\sigma_1 X_1)}{(R_2 + j\sigma_2 X_2)} \frac{1}{N}.$$

Se i circuiti del trasformatore avessero resistenze e reattanze di dispersione nulle, risulterebbero nulle sia $\dot{V}_1$ che $\dot{V}_2$; la misura non sarebbe quindi influenzata da eventuali ammettenze tra i punti C, B e D. Il rivelatore

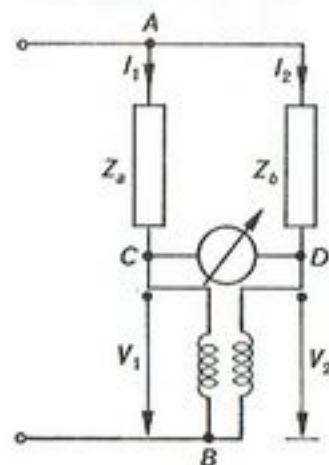
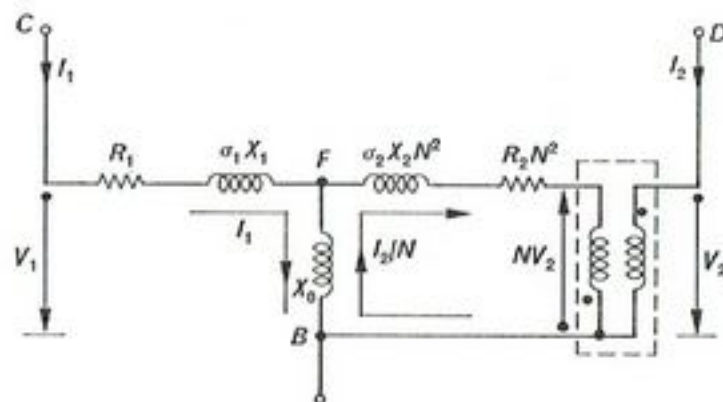



Fig. 7-66 Fig. 7-67

di zero indicherebbe il verificarsi della condizione:

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{Z}_a}{\dot{Z}_b} = N.$$

Questa relazione è ancora valida quando sia:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_1 X_1}{\sigma_2 X_2} = N \qquad [7\text{-}27]$$

ed è in ogni caso sufficientemente approssimata se $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$ sono piccole rispetto alla tensione di alimentazione; fuori della condizione di equilibrio le cadute di tensione sui lati CB e DB tengono conto della presenza della reattanza $X_0 = (1 - \sigma_1)X_1$ che può essere molto elevata; le tensioni $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$ sono perciò molto grandi e diverse fra loro. Si ottiene così un ponte con sufficiente sensibilità e buona precisione, anche se non è perfettamente rispettata la [7-27]. Lo schema di fig. 7-62 è analogo, ma rivela l'annullarsi della tensione sulla X_0, cioè l'annullarsi del flusso comune ai due avvolgimenti; ciò può realizzarsi connettendo il rivelatore ad un terzo avvolgimento, interno agli altri due, e perciò isolato dal resto del ponte.

Il trasformatore di fig. 7-62 può essere sostituito da un comparatore di corrente alternata (vedi 5-5,3); in tal caso si determina il rapporto (complesso) fra le correnti e quindi fra le impedenze, cosicché il campione può essere rappresentato da un elemento puro.

7-6,5. *Ponti a T.*

Nelle misure ad alta frequenza, è spesso necessario mantenere, sul generatore, sul rivelatore ed anche sull'impedenza incognita, un punto al potenziale di terra. Ciò si può realizzare con gli schemi a T shuntato (fig. 7-68)

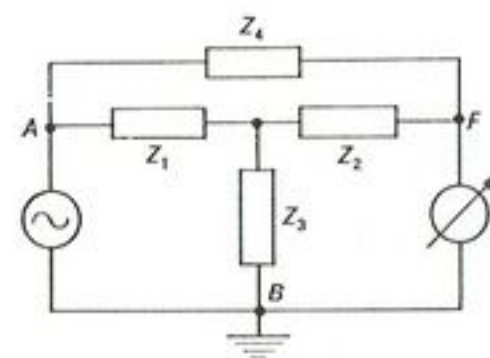



Fig. 7-68

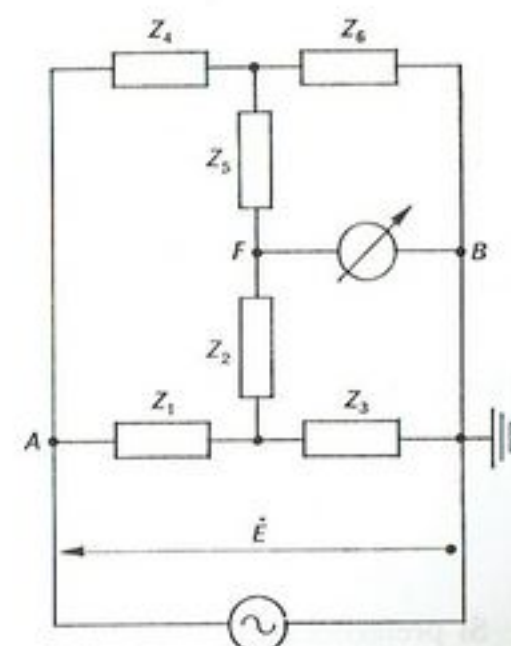



Fig. 7-69

o a doppio T (fig. 7-69); essi possono facilmente ricondursi allo schema equivalente di fig. 7-70, dove è:

$$\dot{E}_a = \dot{E}\frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_3}; \qquad \dot{Z}_a = \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_3};$$

$$\dot{E}_b = \dot{E}\frac{\dot{Z}_6}{\dot{Z}_4+\dot{Z}_6}; \qquad \dot{Z}_b = \dot{Z}_5 + \frac{\dot{Z}_4\dot{Z}_6}{\dot{Z}_4+\dot{Z}_6}$$

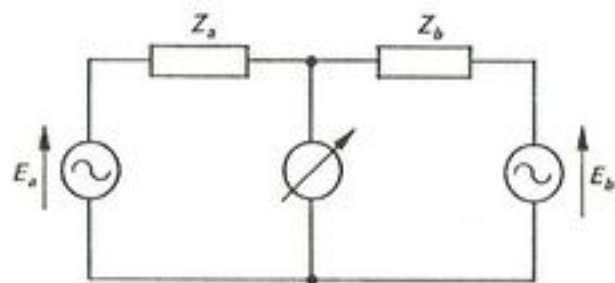



Fig. 7-70

La derivazione di tali grandezze è immediata per lo schema a doppio T (generatori equivalenti visti dai morsetti *FB*); lo schema a T shuntato si ottiene dal precedente, quando sia $Z_5 = 0$ e $Z_6 = \infty$.

Per il circuito di fig. 7-70 si ha la condizione di equilibrio:

$$\frac{\dot{E}_a}{\dot{E}_b} = -\frac{\dot{Z}_a}{\dot{Z}_b}$$

ossia:

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_3} = -\left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \frac{\dot{Z}_4\dot{Z}_5}{\dot{Z}_6}\right);$$

questa relazione richiede che vi siano, nel circuito, reattanze di segno opposto, il che si può ottenere solamente in c.a.; l'equilibrio è quindi funzione della frequenza. Per esempio, nello schema di fig. 7-71 per l'ammettenza:

$$Y_3 = G_3 + jB_3$$

risulta, in equilibrio:

$$\left.\begin{aligned} G_3 &= \omega^2 C_1 C_2 R\left[1 + \frac{C_6}{C_4}\right] \\ B_3 &= -\omega\left[C_1 + C_2 + \frac{C_1 C_2}{C_4}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad [7\text{-}28]$$

Si preferisce però in generale usare il metodo di sostituzione: l'azzeramento si ottiene, prima senza l'incognita e poi con l'incognita Y_x in parallelo a Y_3, regolando due elementi della Y_3 (fig. 7-72); si ha quindi:

$$G_x = \Delta G_3$$
$$B_x = \omega\,\Delta C_3;$$

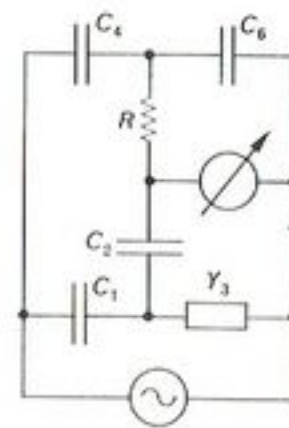



Fig. 7-71

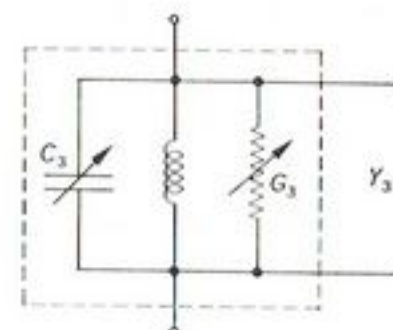



Fig. 7-72

questo procedimento non richiede la conoscenza dei valori degli elementi che formano il ponte e quindi prescinde da tutti gli effetti di capacità parassite. Talvolta, per maggior comodità, anziché variare la G_3, si rende variabile la C_6 e si utilizza la [7-28] per ricavare G_x.

7-6,6. *Ponti con amplificatori operazionali.*

L'opposizione di fase fra due correnti può ottenersi anche mediante l'impiego di amplificatori operazionali; nello schema di fig. 7-73 si ha infatti:

$$\frac{\dot{E}}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{E}'}{\dot{Z}_2} = 0\,.$$

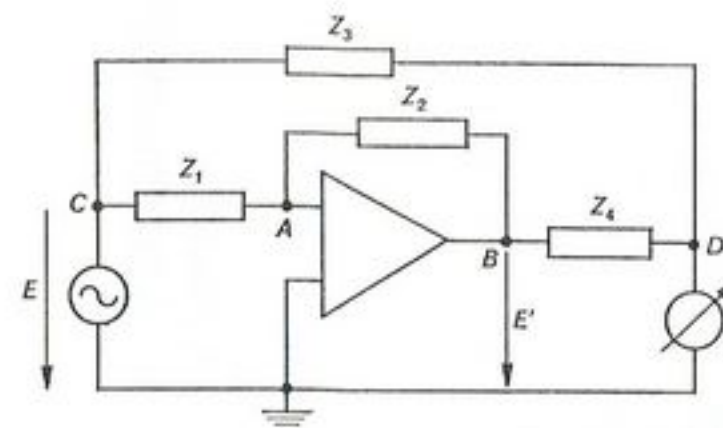



Fig. 7-73

Quando il rivelatore segna l'equilibrio, è anche:

$$\frac{\dot{E}}{\dot{Z}_3}+\frac{\dot{E}'}{\dot{Z}_4}=0$$

ossia:

$$-\frac{\dot{E}}{\dot{E}'}=\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}=\frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_4}$$

come in un ponte normale.

Il circuito ha il pregio di mantenere al potenziale di terra un estremo sia del generatore che del rivelatore di zero; al potenziale di terra si trova anche il punto A. Se l'amplificatore ha un'impedenza d'uscita sufficientemente piccola, il suo funzionamento non è influenzato dalle ammettenze fra il nodo B e terra. Anche le altre ammettenze verso terra (dai nodi C e D) non intervengono nell'equilibrio.

7-6,7. *Ponti con trasformatori di misura.*

Nel campo delle frequenze industriali, si possono inserire, nei ponti, dei trasformatori di misura, al fine di utilizzare elementi campioni con tensioni o correnti molto minori di quelle che sollecitano l'elemento in prova. Naturalmente, di questi trasformatori, occorre conoscere l'effettivo rapporto $\dot{k}$ fra le grandezze primarie e secondarie e cioè, oltre al rapporto nominale (k_v o k_a), gli errori di rapporto η e di angolo ε, nelle condizioni di lavoro, errori che devono essere anche sufficientemente piccoli, per non uscire dal limite delle ipotesi fatte su di essi.

Nel caso di un trasformatore di tensione che alimenti due lati, fra loro in serie, di un ponte come quello di fig. 7-74, si ha:

$$(\dot{Z}_3+\dot{Z}_4)/\dot{Z}_4=\dot{k}(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)/\dot{Z}_2\,.$$

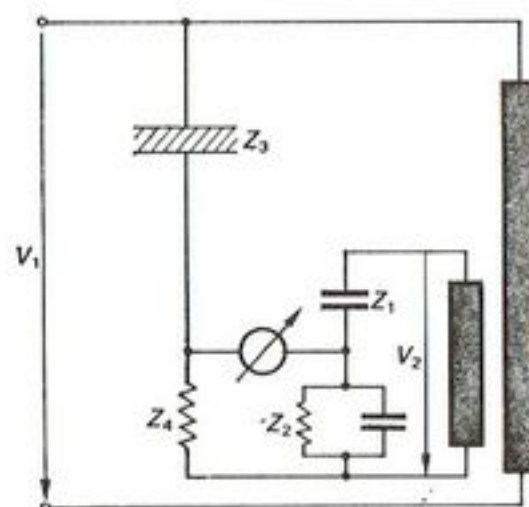



Fig. 7-74

Nel caso di un trasformatore di corrente che alimenti solo un lato del ponte, come in fig. 7-75 si ha invece:

$$\dot{Z}_3/\dot{Z}_4=(\dot{Z}_1+\dot{Z}_3)/\dot{k}(\dot{Z}_2+\dot{Z}_4)\,.$$

Si noti che le relazioni precedenti possono anche consentire la determinazione degli errori propri di un trasformatore, una volta che siano noti tutti i parametri degli elementi che compongono il ponte.

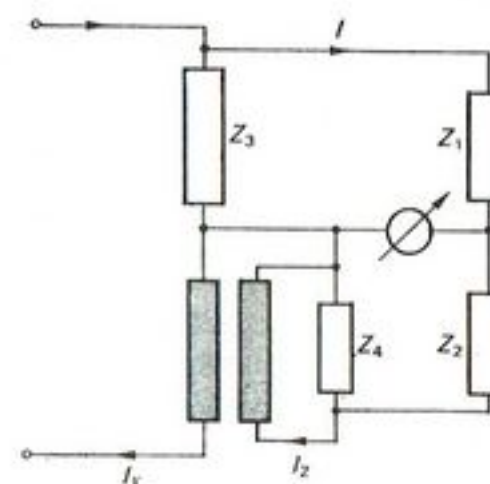



Fig. 7-75

7-6,8. *Metodo di proiezione.*

Si abbiano due sorgenti di f.e.m. sinusoidali, $\dot{V}_0$ e $\dot{V}_x$, fra loro sfasate dell'angolo γ (fig. 7-76); fra esse sia interposto un rivelatore di zero sensibile alla fase (fig. 7-77), tale cioè da annullare la sua indicazione quando è nullo il prodotto $V_1V_2\cos\beta$ fra la tensione $\dot{V}_1$ di riferimento e quella $\dot{V}_2$ applicata allo strumento.

Questo strumento può essere rappresentato da un elettrodinamometro (3-5,4), da un galvanometro alimentato attraverso un raddrizzatore meccanico (5-4,4) o da opportuna apparecchiatura elettronica.

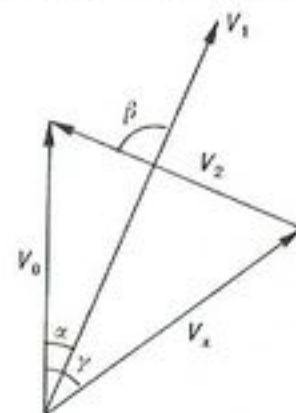
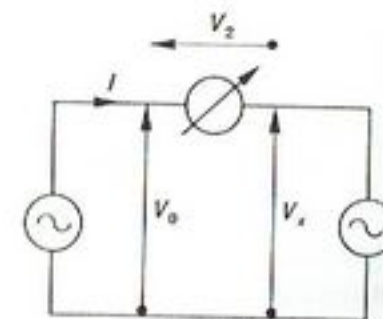



Fig. 7-76 Fig. 7-77

L'azzerarsi di $\cos\beta$ indica la uguaglianza delle proiezioni di $\dot{V}_0$ e $\dot{V}_x$ sulla direzione di $\dot{V}_1$; si ha cioè la relazione:

$$V_0 \cos\alpha = V_x \cos(\gamma - \alpha)$$

essendo α l'angolo di cui $\dot{V}_1$ è sfasata rispetto a $\dot{V}_0$.

Per raggiungere l'equilibrio, la f.e.m. V_0 è ricavata in genere da un circuito potenziometrico, del tipo di fig. 7-78; occorre però osservare che, poiché anche in condizioni di equilibrio il circuito di fig. 7-77 è percorso dalla corrente I, la f.e.m. disponibile vale $V(r/R)$ solo quando la caduta di tensione:

$$\Delta\dot{V} = R_i \dot{I} = \frac{r(R-r)}{R} \dot{I}$$

sia trascurabile rispetto a $\dot{V}_0$.

Fig. 7-78

La tensione di riferimento $\dot{V}_1$ può essere regolabile in fase mediante uno sfasatore; nei casi più semplici, si può fare in modo che essa coincida con la tensione $\dot{V}$; si ha allora in equilibrio, con le ipotesi precedenti:

$$V_0 = V\frac{r}{R} = V_x \cos\gamma$$

come è illustrato nel diagramma di fig. 7-79.

Il metodo è utilizzato per il confronto di tensioni, sfasate di angoli noti (misura del rapporto su trasformatori) o, con più equilibri, per determinarne valore e fase rispetto a un riferimento. Un esempio è dato in fig. 7-80; all'azzerarsi dell'elettrodinamometro è:

$$SI\cos\varphi = V\frac{r}{R}$$

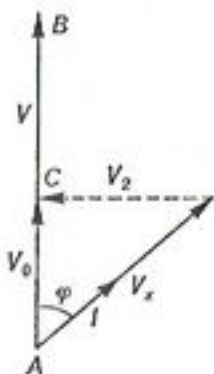



Fig. 7-79

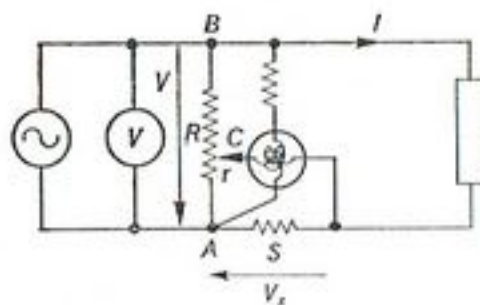



Fig. 7-80

e pertanto la potenza P assorbita dal carico può leggersi dalle indicazioni del voltmetro. Il metodo si presta alla misura di piccole potenze, dove il valore della tensione (o della corrente) renda impossibile l'uso di wattmetri.

In generale, due tensioni sinusoidali $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$, della stessa frequenza, possono essere confrontate fra loro, proiettandole su due assi x e y, fra loro sfasati di 90°. Siano infatti a, b le proiezioni di $\dot{V}_1$ e c, d quelle di $\dot{V}_2$ (fig. 7-81); si ha:

$$\dot{V}_2/\dot{V}_1 = (ac + bd + j(ad - bc))/(a^2 + b^2);$$

il rapporto fra i moduli è:

$$V_2/V_1 = (c^2 + d^2)/(a^2 + b^2)$$

mentre il relativo argomento si ottiene calcolando l'arctang $((ad - bc)/(ac + bd))$. Questi calcoli, laboriosi ma non difficili, possono essere fatti speditamente con un opportuno sistema di elaborazione.

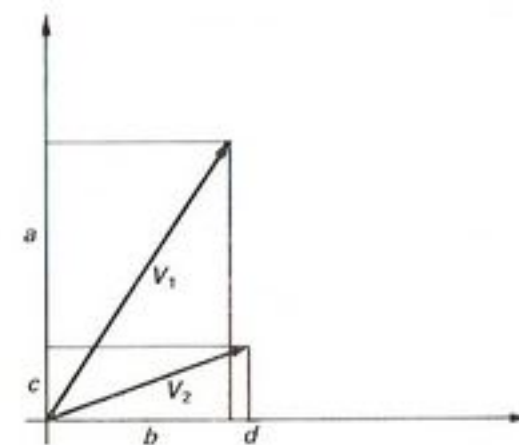



Fig. 7-81

Le due proiezioni possono essere fatte mediante rettificatori sincroni, comandati da segnali isofrequenziali con V_1 e V_2, (vedi 5-4,4), fra loro in quadratura, ma con fase arbitraria rispetto alle tensioni da confrontare. La quadratura fra i due assi di riferimento si può ottenere in modo preciso se si genera, per moltiplicazione di frequenza, un'onda quadra a frequenza doppia di quella di misura, e si selezionano alternativamente le semionde di comando. Si sono realizzati, su questo principio, misuratori di impedenze, in un ampio campo di frequenze.

7-6,9. *Metodo di risonanza. Q-metro.*

Quando, nel circuito di fig. 7-82, alimentato da una f.e.m. E, sinusoidale di pulsazione ω_0, è realizzata la condizione:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad [7\text{-}29]$$

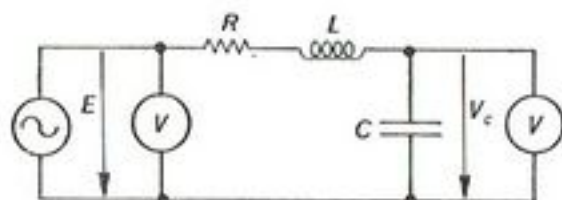



Fig. 7-82

la d.d.p. ai capi del condensatore risulta pari a:

$$V_C = Q_0 E \qquad [7\text{-}30]$$

dove il fattore di merito Q_0 vale, come è noto:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Per trovare le condizioni di risonanza basta verificare che, a parità di E, sia massimo V_C; questo massimo si verifica, in teoria, per una pulsazione:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}}$$

ma, per Q_0 abbastanza elevato (p. es. > 10), essa coincide praticamente con ω_0.

La misura del fattore di merito si può anche eseguire variando la capacità C intorno alla regione per cui si raggiunge il valore massimo V_C; se per portarsi al valore V_C' è necessaria una variazione ΔC di capacità, risulta:

$$Q_0 = \frac{C}{\Delta C}\sqrt{\left(\frac{V_C}{V_C'}\right)^2 - 1}\,;$$

in particolare, per $V_C' = 0{,}707 V_C$, si ha $Q_0 = C/\Delta C$.

In pratica, questo apparecchio viene utilizzato per la misura di capacità e induttanze con metodo di sostituzione; per i fattori di merito si procede invece alla lettura diretta del rapporto delle tensioni V_C ed E. Si tratta ancora di un metodo di confronto, ma il raggiungimento della condizione

[7-29] è affidato alla ricerca di un massimo e non di uno zero; si ha una sensibilità tanto maggiore quanto più elevato è il fattore di merito dell'intero circuito.

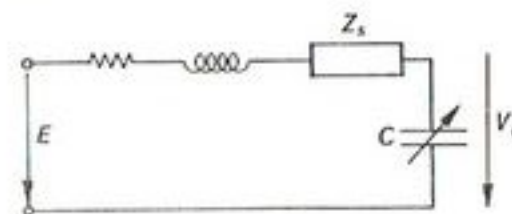
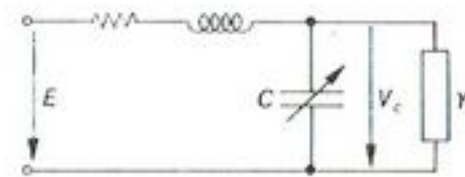



Fig. 7-83 *a* Fig. 7-83 *b*

Se si ricercano, a parità di alimentazione, le condizioni di massimo, senza e con l'impedenza Z_S in serie (fig. 7-83 *a*), ottenendo rispettivamente i valori C_1, Q_1 e C_2, Q_2, si ha:

$$X_S = \frac{C_1 - C_2}{\omega_0 C_1 C_2}$$

$$R_S = \frac{1}{\omega_0 C_2 Q_2} - \frac{1}{\omega_0 C_1 Q_1}.$$

Per un'ammettenza Y_p, in parallelo su C, si ha invece (fig. 7-83 *b*):

$$B_p = \omega_0(C_1 - C_2)$$

$$G_p = \frac{\omega_0 C_1 (Q_1 - Q_2)}{Q_1 Q_2}.$$

Tutte le misure sono fatte per differenza; le letture migliori sulla capacità C si hanno quando questa dimezza il suo valore, passando dall'una all'altra delle due misure; per la miglior misura del fattore di merito occorrerebbe che si dimezzasse la lettura del voltmetro indicante la V_c.

Queste condizioni possono essere contradditorie; un tale strumento (Q-metro) fornisce tuttavia preziosi risultati, soprattutto nel campo delle radiofrequenze, specie se usato con componenti a fattore di merito elevato. La ricerca della frequenza per cui è $C_1 = C_2$ fornisce, ad esempio, la misura della frequenza di risonanza della Z_s (o di antirisonanza della Y_p).

La misura delle tensioni E e V_C viene fatta attraverso strumenti elettronici, a consumo praticamente nullo. Misure più accurate del loro rapporto possono essere eseguite attraverso una loro conversione in tensioni continue, che vengono poi confrontate con un metodo di zero (potenziometro).

Per raggiungere precisioni dell'ordine di almeno l'1%, si deve in generale tener conto degli elementi parassiti (capacità parallelo di L, induttanze dei collegamenti ecc.).

Un altro metodo per la misura del fattore di merito di un circuito consiste nel provocarvi, con un impulso, una serie di oscillazioni, alla frequenza propria; lo smorzamento di queste oscillazioni è funzione di Q_0. In particolare, si dimostra che quando le ampiezze di due massimi stanno fra loro nel rapporto ε^{π}, il numero delle oscillazioni che intercorre fra essi è uguale a Q_0. Ciò consente metodi numerici, che eseguono il conteggio delle oscillazioni, con istanti di inizio e fine disposti da opportuni comparatori.

CAPITOLO VIII

APPLICAZIONI

8-1. Tarature fondamentali (in c.c.).

8-1,1. *Confronto di pile campioni.*

Il confronto fra pile campioni si esegue mediante potenziometro, con il metodo della sostituzione diretta (fig. 8-1); si ricorre anche talvolta alla misura delle differenze della pila incognita e di quella campione rispetto ad una stessa pila, di valore leggermente minore (fig. 8-2). In questi schemi, i punti A e B rappresentano i terminali che vengono portati al potenziometro.

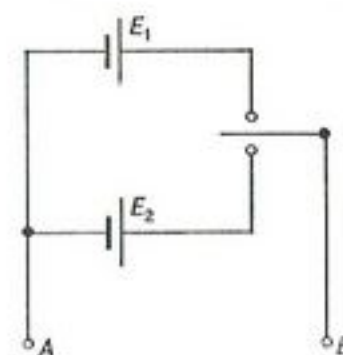



Fig. 8-1

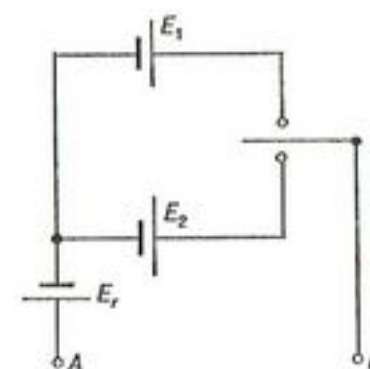



Fig. 8-2

Poiché, con opportuna scelta del rivelatore di zero, il confronto può essere eseguito con sensibilità dell'ordine di 10^{-7}, è necessario assicurare la massima stabilità del circuito dal punto di vista termico (vedi 7-5,2); la regolazione finale dello zero viene talvolta eseguita iniettando nel circuito una caduta di tensione, prodotta da una corrente I, regolabile in

modo continuo, su una resistenza nota (fig. 8-3); il valore della corrente può essere letto su un comune strumento indicatore (in pratica, un microamperometro) poiché l'errore dello strumento corrisponde ad un errore relativo molto minore sulla f.e.m. totale misurata dal potenziometro.

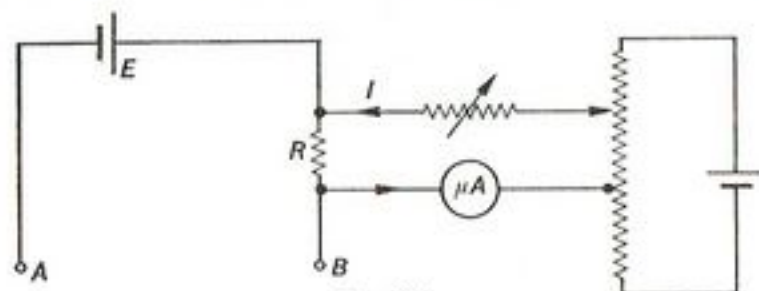



Fig. 8-3

Per avere una buona precisione nel confronto di due pile campioni, queste devono essere in condizioni di riposo, di equilibrio termico e di assenza di fenomeni depolarizzanti (vedi 2-4,1).

Per evitare erogazione di correnti, nocive alla loro conservazione, durante le manovre preliminari, le pile vengono protette con un'elevata resistenza in serie ($10^5 \div 10^6\ \Omega$). Questa resistenza riduce la sensibilità della misura e viene cortocircuitata quando si sia sufficientemente vicini all'equilibrio.

8-1,2. *Confronto di resistori.*

Il confronto fra due resistori di ugual valore (nominale) si esegue con il potenziometro (fig. 8-4) o, più raramente, con il doppio ponte; il potenziometro ha il pregio di misurare la resistenza senza assorbire corrente

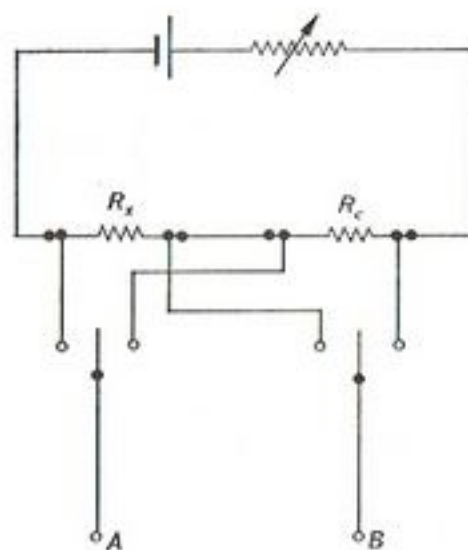



Fig. 8-4

dai morsetti voltmetrici, mentre il doppio ponte, per la sua maggior semplicità, si presta meglio per misure con correnti elevate.

I resistori campioni sono in genere di valore fisso, tranne casi speciali (vedi 2-4,5); piccole variazioni, come quelle che intervengono, per esempio, in funzione della temperatura, si determinano con lo schema di fig. 8-5 aggiungendo in parallelo alla R_c la resistenza variabile $R_1 (\gg R_c)$; è infatti:

$$R'_c = \frac{R_1 R_c}{R_c + R_1} \cong R_c \left(1 - \frac{R_c}{R_1}\right)$$

e di conseguenza:

$$\frac{\Delta R_c}{R_c} \cong -\frac{R_c}{R_1}.$$

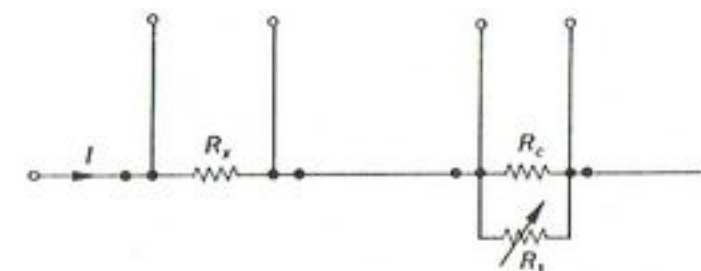



Fig. 8-5

Mediante il potenziometro può essere eseguito con elevata precisione il confronto fra due resistenze di valori pressoché uguali; montando più resistenze uguali (p. es. 10) confrontate ognuna con il campione primario da 1 Ω (fig. 8-6) possiamo ottenere un campione (secondario) da 10 Ω e così procedere per multipli e sottomultipli. In analogo modo si possono costruire dei divisori di tensione, di rapporto noto.

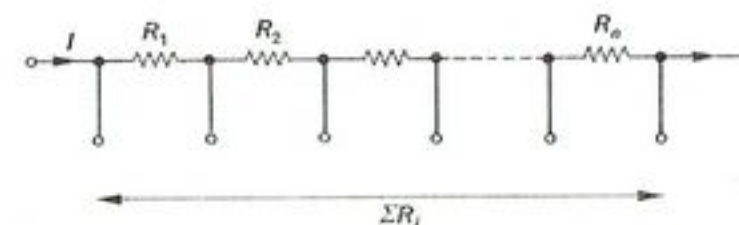



Fig. 8-6

Per una maggior flessibilità d'impiego si adottano particolari resistori (detti di trasferimento) che consentono confronti multipli.

Si considerino, ad esempio, 10 resistori, i cui valori R_i poco differiscano dal valore nominale R; si abbia quindi (con $\delta \ll 1$):

$$R_i = R(1 + \delta_i) ;$$

quando i 10 resistori sono fra loro collegati in serie, essi forniscono una resistenza pari a:

$$R_s = \sum R_i = 10R(1+\delta_m) \qquad [8\text{-}1]$$

dove:

$$\delta_m = \frac{1}{10}\sum \delta_i$$

è la media degli scarti dei singoli resistori dal loro valore nominale.

Se i dieci resistori sono collegati tutti in parallelo, risulta:

$$R_p = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}} \simeq \frac{1}{\sum \frac{1}{R}(1-\delta_i)} \simeq \frac{R}{10}(1+\delta_m)\,. \qquad [8\text{-}2]$$

Se nove delle resistenze sono connesse a tre a tre in serie parallelo risulta una resistenza:

$$R_{sp} = R\left[1+\delta_m+\frac{1}{10}\delta'\right]; \qquad [8\text{-}3]$$

δ' è lo scarto della resistenza R_{sp} rispetto a quella del resistore R_{10}, non compreso nel circuito:

$$R_{sp} = R_{10}(1+\delta')\,; \qquad [8\text{-}4]$$

e può essere ricavato dal loro confronto.

Le relazioni precedenti mostrano quindi come un resistore siffatto possa essere confrontato, sostanzialmente con la stessa precisione:

a) con un resistore di valore $10R$, mediante la [8-1];

b) con un resistore di valore $0{,}1R$, mediante la [8-2];

c) con un resistore di valore R, mediante le [8-3] e [8-4].

Si dimostra inoltre che le relazioni [8-2] e [8-3] sono affette da un errore che è inferiore a $(1/10)\Sigma\delta_i^2$.

Le considerazioni precedenti richiedono però che siano nulle le resistenze di contatto; ciò si può fare abbastanza facilmente per le connessioni serie, definendo ogni singola resistenza con riferimento ad una coppia di morsetti voltmetrici; è invece molto più complesso per le connessioni in parallelo. Il metodo usato è illustrato schematicamente in fig. 8-7; i morsetti A, B e A', B' possono essere connessi fra loro quando, a vuoto, non vi sia fra essi d.d.p.: ciò accade quando le resistenze di contatto stanno fra loro come le rispettive resistenze principali R_A e R_B. Per ottenere tale condizione si inserisce fra A e B (con $A'B'$ cortocircuitati) e viceversa, un rivelatore di zero, e si regolano le resistenze di contatto; per evitare cadute di tensione dovute alle eventuali correnti residue di circolazione nelle connessioni voltmetriche, queste si fanno di resistenza più bassa possibile.

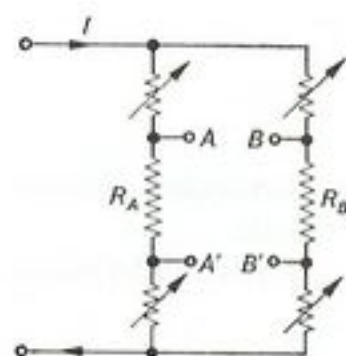



Fig. 8-7

Il sistema è molto laborioso, specie quando deve essere ripetuto più volte (fig. 8-8).

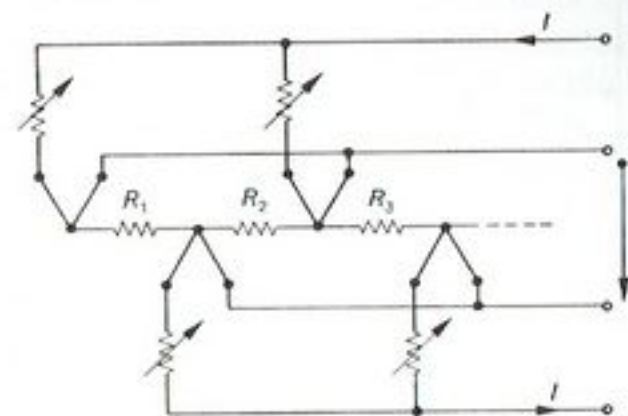



Fig. 8-8

Lo stesso principio trova anche pratica utilità nella determinazione della resistenza, solitamente molto elevata, dei resistori in serie per la misura di alte tensioni continue (vedi 5-2,2) quando questi siano costituiti da un notevole numero N di elementi con eguale resistenza nominale. La misura può allora essere eseguita collegando gli N resistori fra loro in parallelo (con il vantaggio di poterli anche sollecitare alla loro tensione di lavoro) e moltiplicando poi per N^2 il valore ottenuto dalla misura.

Un altro metodo per ottenere resistori autotarati nel rapporto 100:1 è quello di disporre di resistenze disposte secondo lo schema di fig. 8-9, dove ogni resistore può essere confrontato con uno o con la serie di più resistori adiacenti, avente lo stesso valore nominale. Si possono così determinare, con elevata sensibilità, gli scarti dai valori nominali ed ottenere, in definitiva, un resistore con i valori 1, 10, 100 volte il resistore scelto come base.

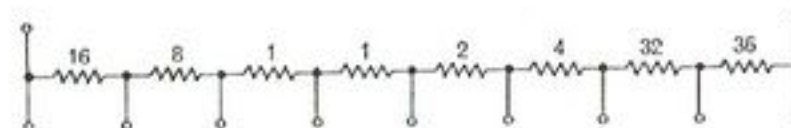



Fig. 8-9

8-1,3. *Misura di tensioni. Taratura dei voltmetri.*

La misura più precisa di una tensione continua, dell'ordine di circa 1 V, si esegue col potenziometro, per confronto diretto con una pila campione. Per tensioni di valore più elevato si ricorre ad un divisore di tensione per l'ingresso al potenziometro; questo è anche il metodo utilizzato per la taratura dei voltmetri di classe 0,2 o migliori (fig. 8-10).

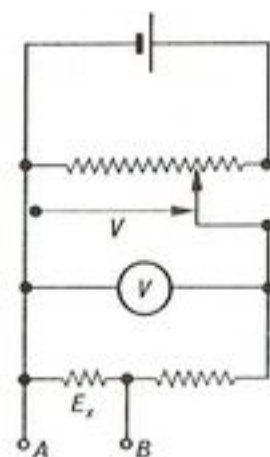



Fig. 8-10

Una sorgente di tensione continua regolabile fornisce la tensione al voltmetro da tarare e all'ingresso del divisore di tensione, di rapporto k; questo rapporto è scelto in modo che la tensione E_x applicata al potenziometro risulti dell'ordine di 1 volt. Misurata la E_x, il valore della tensione applicata al voltmetro risulta:

$$V = kE_x ;$$

se V_l è il valore letto nello strumento, l'errore percentuale, riferito al valore V_M di fondo scala, risulta:

$$e = \frac{V_l - V}{V_M} 100 = \frac{V_l - kE_x}{V_M} 100 .$$

Esso può essere riportato in funzione del valore letto, su un diagramma: ne risulta in generale una spezzata (fig. 8-11) che deve essere compresa fra i limiti imposti dalla classe.

Per la misura di tensioni più piccole del volt (taratura dei millivoltmetri o misure su termocoppie) si utilizzano i potenziometri per piccole f.e.m. (7-5,4). Il potenziometro a regolazione manuale può in molti casi essere

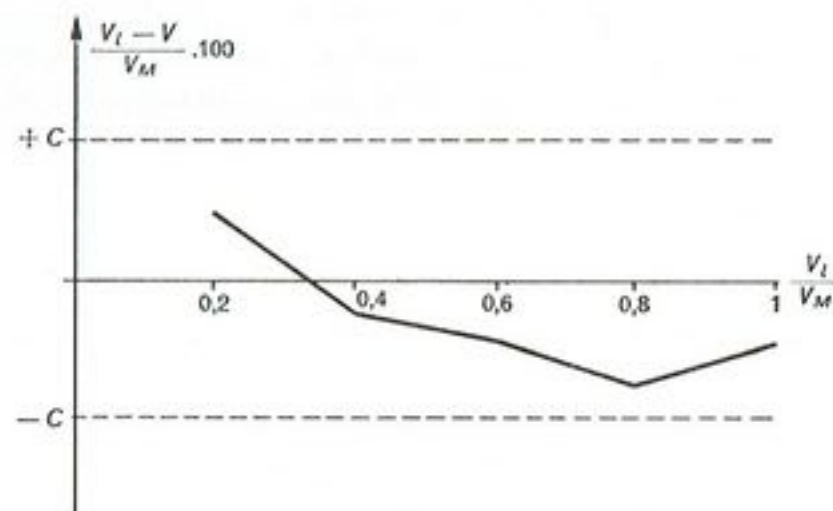



Fig. 8-11

sostituito da apparecchi automatizzati o da appositi strumenti, dotati di sorgenti di calibrazione e di divisori di precisione (voltmetri differenziali) che si possono usare come potenziometri in un campo esteso di valori (p. es. da 1 mV a 1 kV).

Il metodo potenziometrico può avere, come si è visto, precisione largamente sufficiente per la taratura dei migliori strumenti indicatori (classe 0,05 e 0,1); la precisione trova un limite nelle incertezze della lettura dello strumento stesso, che possono essere ridotte ripetendo più volte le letture, eventualmente con l'aiuto di una lente d'ingrandimento e facendo sì che la taratura avvenga in punti ben definiti della scala, in modo da evitare interpolazioni.

Gli strumenti di classe 0,05 (o 0,1), servono poi per tarare i voltmetri di minor precisione (¹). Si usano per questo scopo anche generatori a predisposizione numerica, sufficientemente precisi per svolgere, con notevole rapidità, tarature d'officina.

Per definire la classe di uno strumento non è sufficiente determinare il suo errore in una ben definita condizione d'impiego; occorre infatti che esso soddisfi ad una serie di prescrizioni, date dalle norme, sulla influenza dei fattori esterni (temperature, campi magnetici, ecc.) ed interni (tempo di riscaldamento, stabilità dello zero, ecc.). La corrispondenza a tali prescrizioni, se verificate su un prototipo, può essere attestato dal marchio dell'Ente di normalizzazione.

8-1,4. *Misure di correnti. Taratura degli amperometri.*

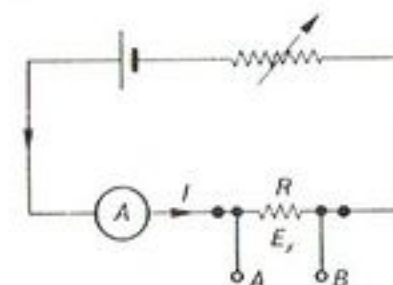
La misura più precisa di una corrente continua si esegue confrontando al potenziometro la caduta di tensione, che essa provoca in una resistenza campione, rispetto alla f.e.m. di una pila campione. Questo metodo è utilizzato per la taratura degli amperometri di classe 0,1 e 0,2 (fig. 8-12).

Fig. 8-12

Una sorgente fornisce la corrente continua, regolabile, all'amperometro da tarare e al resistore campione di valore R, fra loro in serie; il valore di R è scelto in modo che la tensione applicata al potenziometro risulti dell'ordine di 1 volt, il che richiede, per le correnti più elevate, una notevole dissipazione di potenza. Misurata la tensione E_x col potenziometro, il valore I della corrente si ricava da:

$$I = \frac{E_x}{R} ;$$

il calcolo dell'errore percentuale, riferito al fondo scala, si esegue nel modo descritto al paragrafo precedente.

(¹) È buona regola che per la taratura di uno strumento di classe c sia impiegato un metodo che dia luogo per suo conto ad un'incertezza non superiore a $(0,1 \div 0,25)c$.

8-1,5. *Taratura dei wattmetri.*

Dalla combinazione degli schemi per la taratura dei voltmetri e degli amperometri, è facile risalire a quello per la taratura in c.c. di un wattmetro (fig. 8-13); i circuiti di tensione e corrente sono separati, cosicché la potenza segnata dal wattmetro è puramente fittizia e non crea problemi di dissipazione termica o di correzioni per i consumi.

Si ha, dalle misure di E_{1x} e E_{2x}:

$$P = VI = \frac{k}{R} E_{1x} E_{2x} .$$

L'amperometro e il voltmetro hanno, in questo caso, il solo scopo di permettere la regolazione della corrente e della tensione ai valori prescritti per la taratura.

In modo analogo, ove fosse necessario, si può procedere alla taratura di un contatore; occorre in tal caso aggiungere alle misure di tensione e di corrente una misura di tempo; per la modalità di esecuzione si veda la taratura dei contatori in c.a. (8-2,3).

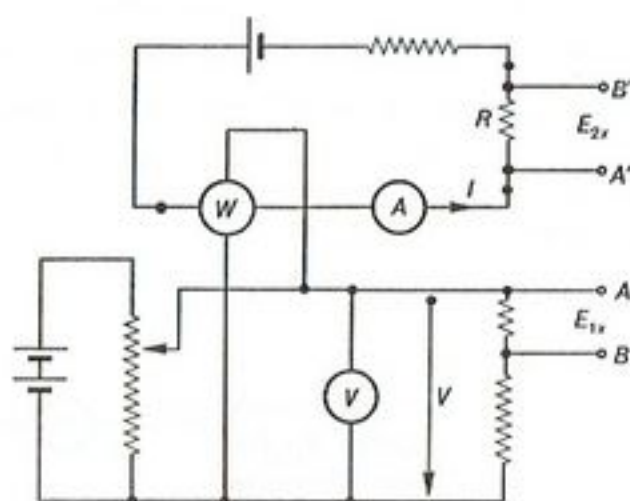



Fig. 8-13

8-2. **Tarature in c.a.**

8-2,1. *Misure di tensione e di corrente.*

Con le disposizioni potenziometriche illustrate nel capitolo precedente, si ha la possibilità di eseguire misure di tensioni e di correnti continue con errori relativi dell'ordine di 10^{-5}, per confronto con i campioni primari.

Come si è già in precedenza osservato, non esistono campioni di tensioni o correnti variabili nel tempo; per misure di precisione in tal campo

occorre perciò far ricorso ad apparecchiature o *strumenti di trasferimento*, il cui comportamento in corrente alternata, ed in particolare con corrente sinusoidale di una data frequenza, sia noto, nei limiti della precisione richiesta, in relazione a quello in corrente continua.

È importante però osservare che l'errore di un simile dispositivo non può essere misurato direttamente, mancando i campioni a cui riferirlo; esso è generalmente dedotto per via teorica e controllato per confronto con altri apparecchi basati su principi fisici completamente diversi.

Nel campo delle frequenze industriali e per la taratura di amperometri e voltmetri a valor efficace, fino a precisioni corrispondenti alla classe 0,2, i più semplici strumenti di trasferimento sono, come già si è visto, gli strumenti elettrodinamici. Essi vanno costruiti ed usati con particolari precauzioni per quanto riguarda le resistenze e le induttanze dei vari circuiti, gli effetti delle correnti parassite nei materiali conduttori circostanti, dei campi magnetici di origine esterna, ecc.

Si è fatto in passato ricorso a voltmetri elettrostatici, per i quali, usando sospensioni a filo e scale ad indice luminoso della lunghezza di oltre tre metri, si sono ottenute misure con incertezze stimate dell'ordine di 10^{-4}, fino a 150 kHz. Oggi si usano invece prevalentemente voltmetri, amperometri e wattmetri elettronici di precisione, del tipo illustrato in 4-2,7 che possono arrivare ad incertezze inferiori ad alcuni ppm.

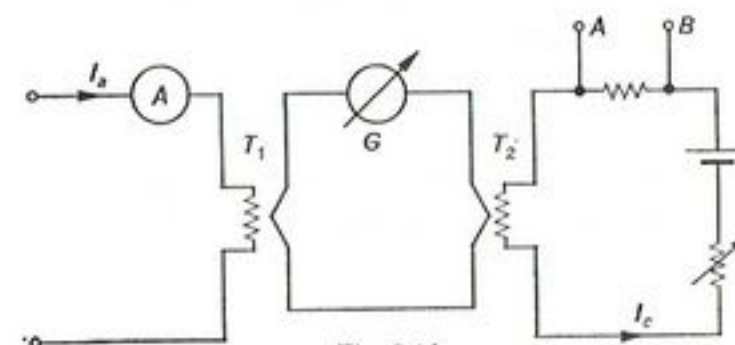



Fig. 8-14

Altri sistemi, basati sull'impiego di termocoppie (vedi 5-4,5), consentono errori dello stesso ordine di grandezza fino a qualche decina di kHz. Il loro principio di funzionamento è illustrato dalla fig. 8-14: la corrente continua regolabile I_c e quella alternata da misurare I_a agiscono su due termocoppie uguali T_1 e T_2; quando il galvanometro G è azzerato, il valore efficace della corrente I_a è uguale a quello della corrente continua, che può essere misurato (ai morsetti AB di una resistenza campione) mediante potenziometro. L'uguaglianza delle termocoppie è controllata facendo percorrere i due circuiti dalla stessa corrente.

Per poter usufruire di una sola termocoppia e per rendere le misure (p. es. di tensione) indipendenti dalla resistenza R_c del riscaldatore, si può ricorrere al circuito di fig. 8-15. La f.e.m. della termocoppia, misurata con

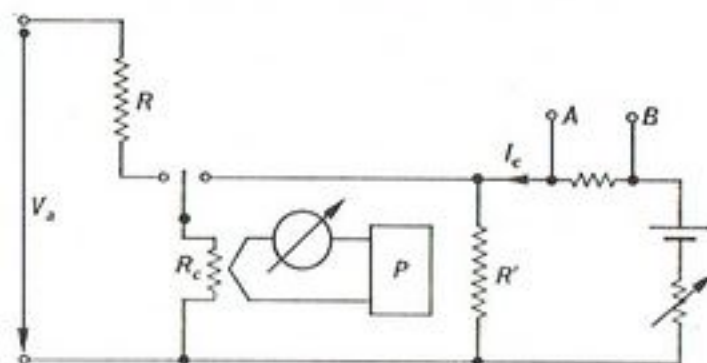



Fig. 8-15

il potenziometro P è provocata, in c.a., dalla corrente:

$$I_a = \frac{V_a}{R_c + R}$$

e in corrente continua dalla:

$$I_r = I_c \frac{R'}{R_c + R'}.$$

Quando si ottiene l'uguaglianza delle f.e.m. delle termocoppie, nelle due conduzioni, è $I_a = I_r$ e perciò

$$V_A = I_c R' \frac{R_c + R}{R_c + R'};$$

per rendere il confronto indipendente da R_c, è perciò sufficiente che sia $R = R'$; in tal modo la termocoppia può essere facilmente sostituita, in caso di bruciatura. In generale, si usano termocoppie a giunzioni multiple; gli schemi sopra indicati sono oggi sostituiti da sistemi automatizzati, che eseguono direttamente i confronti e l'autotaratura, con notevole precisione.

Uno dei limiti pratici, alla precisione ottenibile nelle misure di tensioni e corrente alternate, è dato dalle difficoltà di mantenere il loro valore costante, entro i limiti di precisione richiesti, per il tempo necessario alle misure.

8-2,2. *Taratura di wattmetri.*

Per la taratura in c.a. di un wattmetro, occorre procedere anche alla misura del suo errore d'angolo ε; quando lo strumento è alimentato da una tensione V e una corrente I sinusoidali e fra loro in quadratura, esso indica

la quantità εVI (se I è in anticipo su V o $-\varepsilon VI$, nel caso contrario). Per poter stabilire le condizioni di quadratura fra tensione e corrente è necessario far ricorso a wattmetri senza apprezzabili errori di fase, quali possono essere realizzati costruendo con particolari cure dei wattmetri termici od elettrostatici.

Si può anche ricorrere ad un circuito del tipo di fig. 8-16; esso utilizza una mutua induttanza M, percorsa dalla stessa corrente I che percorre

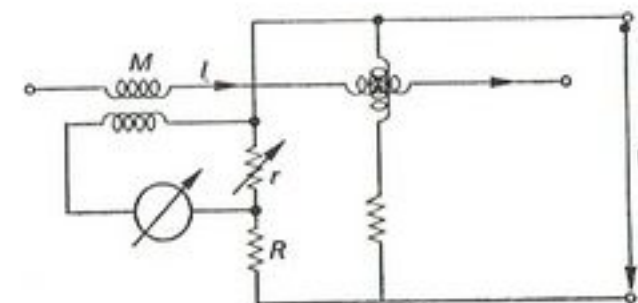



Fig. 8-16

l'amperometrica, e un divisore di tensione ohmico alimentato dalla tensione V che alimenta la voltmetrica; quando è nulla l'indicazione del rivelatore di zero, si ha:

$$j\omega M\dot{I} = \frac{r}{R + r}\dot{V}$$

e perciò $\dot{I}$ e $\dot{V}$ sono in quadratura. Gli errori di fase introdotti dalla mutua e dal divisore possono essere resi dell'ordine di 10^{-4}; il circuito richiede particolari cure per evitare la presenza di armoniche che possono dar luogo ad un'indicazione del wattmetro anche quando le fondamentali siano in quadratura.

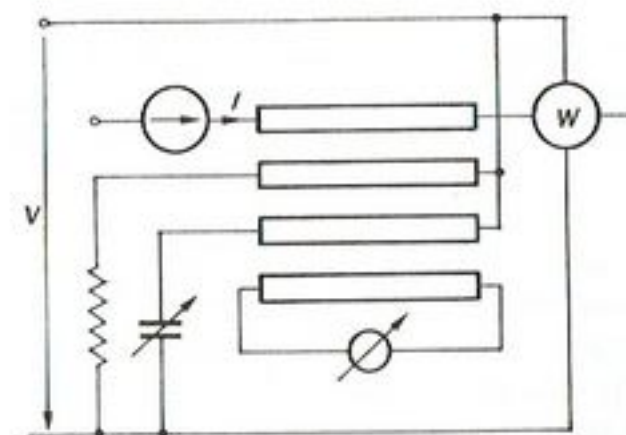



Fig. 8-17

Le moderne tecniche di taratura dei wattmetri in c.a. fanno invece riferimento a misure di tensione alternata, riferibili a loro volta a misure di tensioni continue (vedi 8-2,1). Nello schema di fig. 8-17, la corrente $\dot{I}$ viene posta in relazione di ampiezza e fase con la tensione $\dot{V}$, azzerando un comparatore di corrente alternata, alimentato con correnti rispettivamente in fase ed in quadratura con la tensione $\dot{V}$.

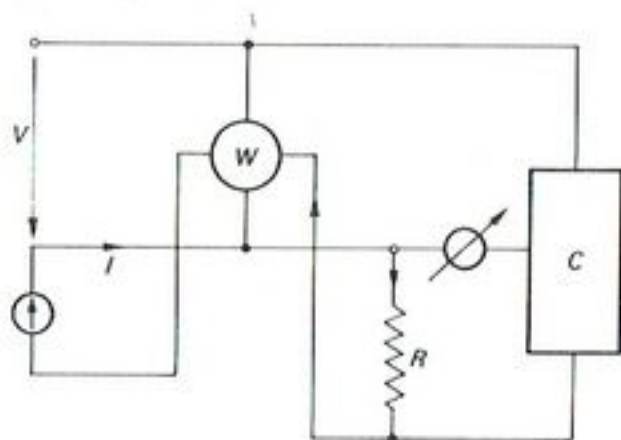



Fig. 8-18

Nello schema di fig. 8-18, la tensione $\dot{V}$ e la caduta di tensione $R\dot{I}$ su una resistenza nota vengono poste fra loro in relazione di ampiezza e fase mediante una rete di confronto C; usando come alimentazione dei generatori digitali con sfasamento programmabile (con i quali si possono ottenere incertezze inferiori a 10^{-6} rad), il confronto può essere eseguito in una sola condizione (in fase od in quadratura), nei qual casi la rete di confronto si riduce a due impedenze pure (simili o in quadratura).

8-2,3. *Taratura dei contatori.*

La taratura di un contatore si esegue per confronto con un wattmetro o con un contatore campione. L'uso del wattmetro è particolarmente raccomandabile per misure di laboratorio, con potenza regolata e costante; il contatore campione è invece indispensabile per eseguire dei controlli su contatori inseriti negli impianti, dove i carichi possono essere rapidamente variabili.

Il circuito impiegato per le prove di laboratorio è quello di fig. 8-19; la tensione e la corrente di alimentazione sono regolate al valore voluto agendo su due sorgenti separate, isofrequenziali, di cui sia possibile regolare lo sfasamento; oltre al vantaggio di misurare una potenza (e un'energia) fittizia, si ha così la possibilità di porre tensione e corrente fra loro in quadratura.

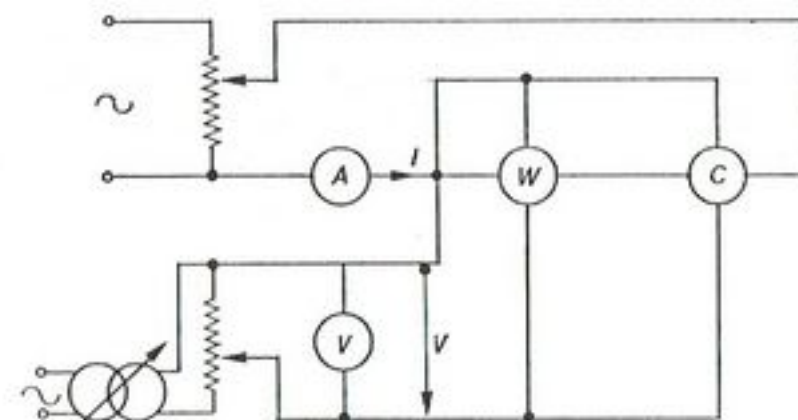



Fig. 8-19

Se la potenza P segnata dal wattmetro è costante nel tempo t in cui si esegue la misura, essa dà luogo ad una energia:

$$W = Pt \quad [\text{Ws}]; \qquad [8\text{-}5]$$

se, nello stesso tempo, il contatore esegue n giri esso misura l'energia:

$$W' = \frac{n}{N}\,[\text{kWh}] = \frac{n}{N}\,3{,}6 \times 10^6\ [\text{Ws}] \qquad [8\text{-}6]$$

essendo N la costante d'integrazione (giri per kilowattora) del contatore.

L'errore relativo compiuto dallo strumento è perciò:

$$\eta = \frac{W' - W}{W}.$$

Ancora più semplice è la misura dell'errore di un contatore, per confronto con un contatore campione; inseriti i due strumenti in modo che ad essi siano applicate le stesse grandezze, si fa partire il contatore campione e lo si arresta dopo n giri del disco del contatore in prova; il valore W dell'energia fluita è dedotto dalla lettura dell'indice del contatore campione.

Come già si è visto in 6-5,5, gli errori di un contatore dipendono dai valori della tensione, della corrente e del fattore di potenza del carico; normalmente il controllo viene eseguito alla tensione nominale, sia a fattore di potenza unitario che a $\cos\varphi = 0{,}5$ in ritardo, per vari valori di corrente.

È tuttavia necessario ricordare che le curve di errore di un contatore possono essere modificate agendo sui vari organi di regolazione esistenti in esso (messa a punto). La prima operazione della messa a punto è perciò la regolazione della coppia di attrito, regolazione che si esegue in modo che il disco stia fermo, quando è alimentato dalla tensione nominale, a corrente nulla, e sia in moto, per un carico pari a 0,5% della corrente nominale.

Una volta eseguita tale regolazione, per la quale è necessario solo l'uso del voltmetro e dell'amperometro, si può agire sulla compensazione di fase: a tensione e corrente nominali, si cerca la condizione di $\cos\varphi = 0$ in ritardo, ruotando lo sfasatore fino a che si annulli l'indicazione del wattmetro. Il contatore deve restare fermo o viene fermato regolando il dispositivo di compensazione di fase.

Per controllare se la corrente I è in ritardo sulla tensione, si possono usare vari sistemi; se si impiega uno sfasatore, un moto rapido di questo nel senso dei ritardi (nel senso cioè del campo magnetico rotante) dà luogo ad una diminuzione transitoria nella tensione indicata dal voltmetro. Se si cortocircuita l'amperometrica del wattmetro con una sbarretta metallica (p. es. un cacciavite), la piccola corrente che passa ancora nell'amperometrica è in ritardo sulla corrente totale, per effetto dell'induttanza delle bobine fisse; lo strumento fornisce quindi un'indicazione negativa, se la corrente totale è in ritardo sulla tensione.

Una volta eseguite queste messe punto preliminari, tutta la curva degli errori può essere spostata muovendo il magnete freno.

8-2,4. *Metodi industriali per la messa a punto dei contatori.*

La messa a punto e la taratura dei contatori sono operazioni che devono essere eseguite su scala industriale; sono stati perciò realizzati numerosi dispositivi automatici o semiautomatici che consentono di operare su molti apparecchi simili, in modo semplice e rapido.

L'alimentazione di una numerosa serie di apparecchi può farsi con un gruppo di due alternatori montati sullo stesso albero e provvisti di eccitazioni regolabili e stabilizzate; uno dei due statori è mobile, per consentire lo sfasamento delle correnti rispetto alle tensioni. Lo strumento campione è unico ed è utilizzato, mediante opportuni trasformatori, di tensione e di corrente, in modo da essere letto sempre nella regione di miglior precisione.

Poiché l'operazione che porta via maggior tempo è la regolazione del magnete freno, si ricorre talvolta a dispositivi che misurino la velocità di rotazione del disco; quando nel contatore fluisce la potenza costante P, risulta, dall'eguaglianza di [8-5] e [8-6]:

$$\frac{n}{t} = \frac{PN}{3{,}6 \times 10^6} \text{ (giri al secondo)} .$$

Se il disco porta alla sua periferia una serie regolare di punti equidistanti, illuminandoli con una luce intermittente di periodo opportuno, essi devono apparire fermi. Si regolano allora i magneti dei contatori che non appaiono fermi fino a farli girare alla velocità voluta. Il periodo di accensione della lampada può essere comandato dallo stesso contatore campione.

In altri casi, la partenza e l'arresto del contatore campione, o del contasecondi, sono comandati da un'opportuna cellula fotoelettrica, collegata con un punto prestabilito del disco del contatore in prova. Ciò consente di misurare con precisione il tempo impiegato dal contatore in prova per compiere un giro; per evitare errori di lettura, nella osservazione diretta, è invece sempre conveniente attendere più giri del disco.

In altri tipi, il contatore campione è regolato in modo che la sua lettura dia direttamente l'errore dello strumento in prova.

8-2,5. *Taratura dei trasformatori di misura.*

La taratura di un trasformatore di misura, cioè la misura dei suoi errori di rapporto e di fase, in determinate condizioni, può eseguirsi sia per confronto diretto fra le sue grandezze primaria e secondaria, sia per confronto con un trasformatore (campione) di cui siano noti gli errori.

La differenza fra i due procedimenti è meno profonda di quanto possa a prima vista sembrare; trattandosi infatti in genere di correnti (o di tensioni) di valori molto diversi, il confronto « diretto » avviene in realtà sempre per mezzo di derivatori o divisori di tensione, i cui errori di rapporto e di fase devono essere noti. Questi metodi sono perciò riservati alle misure di maggior precisione, mentre, per la maggior parte delle applicazioni, è più comodo far riferimento a trasformatori campioni, che permettono schemi più semplici ed agevoli, anche se spesso legati a rapporti di trasformazione prefissati.

I metodi per la taratura dei TA e dei TV possono suddividersi in due categorie:

a) metodi potenziometrici, usualmente utilizzati nei confronti diretti;

b) metodi differenziali, quasi esclusivamente applicabili nei confronti con trasformatore campione.

Gli schemi per trasformatori di corrente e quelli per trasformatori di tensione sono spesso deducibili uno dall'altro; essi hanno in ogni caso in comune la necessità di non costituire un carico apprezzabile per il trasformatore in prova e, possibilmente, anche per il trasformatore campione, in modo da poter definire a quale valore del carico sono riferiti gli errori, ed eventualmente eseguire la misura con carico praticamente nullo.

Numerosissimi circuiti sono stati ideati per la taratura dei trasformatori di misura; saranno esaminati, in linea di principio, solo gli schemi fondamentali.

8-2,6. *Metodi potenziometrici per TA e TV.*

La taratura diretta di un TA può essere eseguita con un potenziometro a coordinate cartesiane (7-5,5) (fig. 8-20); esso confronta la caduta di tensione $R_2 I_2$ prodotta dalla corrente secondaria del TA, con due d.d.p.,

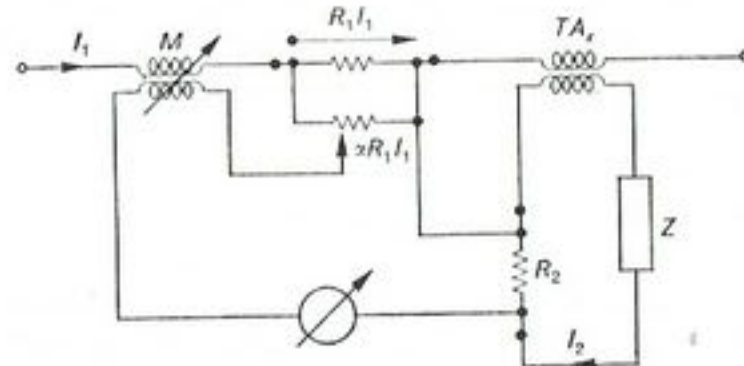



Fig. 8-20

provocate dalla corrente I_1 nella resistenza R_1 e al secondario della mutua variabile M; risulta, in equilibrio:

$$R_2 \dot{I}_2 = \alpha R_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_1 ,$$

e perciò (5-1,3):

$$k_n \dot{I}_2 = k_n \left(\frac{\alpha R_1}{R_2} + j\omega \frac{M}{R_2} \right) \dot{I}_1 \simeq (1 + \eta + j\varepsilon) \dot{I}_1 .$$

Se gli errori sono piccoli, definendo il valore α_n per cui sia,

$$\alpha_n = \frac{R_2}{R_1 k_n}$$

si può porre:

$$\eta = \frac{\alpha R_1 k_n - R_2}{R_2} = \frac{\alpha}{\alpha_n} - 1 \qquad [8\text{-}7]$$

$$\varepsilon = \frac{\omega M}{R_2} k_n = \frac{\omega M}{\alpha_n R_1} . \qquad [8\text{-}8]$$

Dalla [8-7] si vede come risulti importante che i valori di R_1, R_2 ed α, siano noti e determinati con elevata precisione, perché da essi è ricavato, per differenza, il valore di η; l'errore d'angolo, che è invece determinato direttamente, risulta proporzionale alla frequenza.

Agli errori così determinati vanno sommati (algebricamente) gli errori di rapporto e di fase del resistore R_1 e sottratti quelli del resistore R_2.

L'impedenza Z, in unione con la R_2, costituisce il carico del trasformatore in prova; la necessità di fare $R_2 I_2$ elevata, per aumentare la sensi-

bilità e limitare gli errori del metodo, impedisce di ridurre tale carico al di sotto di un certo valore.

Se il metodo potenziometrico è impiegato con un trasformatore campione (fig. 8-21) R_1 e R_2 possono essere uguali e si può quindi prescindere dai loro errori o compensarli con uno scambio.

Uno schema potenziometrico per la taratura di trasformatori di tensione è illustrato in fig. 8-22; esso si avvale di un divisore (ohmico o capacitivo)

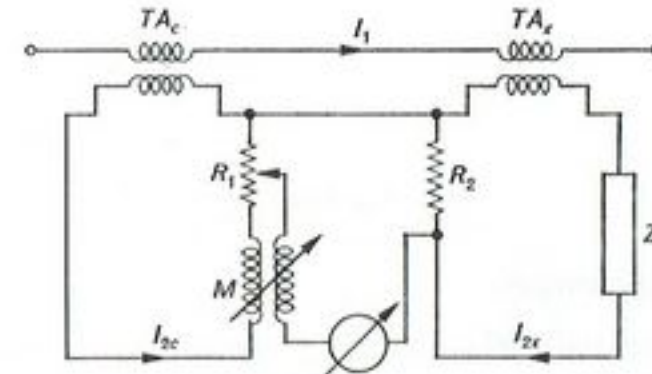



Fig. 8-21

che riduce la tensione primaria al valore $V_1' = V_1/k_0$; questa tensione è confrontata in un potenziometro a coordinate cartesiane con la tensione V_2.

Si notino, nel circuito di fig. 8-22, le connessioni separate per il circuito principale di alimentazione e per quello potenziometrico; ciò ha lo scopo di evitare le cadute di tensione nei collegamenti percorsi da corrente; le connessioni sono anche eseguite in cavo coassiale o in treccia, per evitare le f.e.m. indotte.

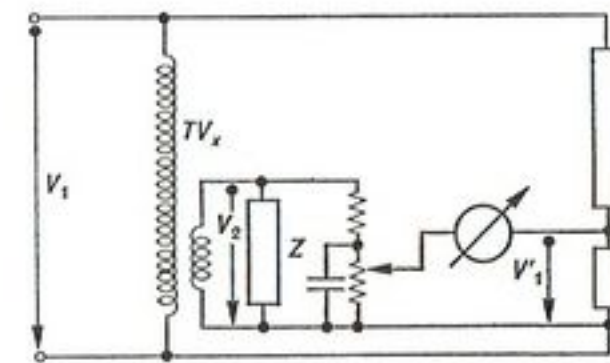



Fig. 8-22

Quando la prestazione Z e il potenziometro siano sistemati a distanza dai morsetti di uscita del trasformatore, è necessario evitare gli errori dovuti ai cavetti di collegamento con la disposizione di fig. 8-23 che con-

sente di misurare la tensione ai morsetti AB, indipendentemente dalla caduta nei conduttori percorsi dalla corrente I_c. Le cadute nelle connessioni al potenziometro possono essere rese trascurabili.

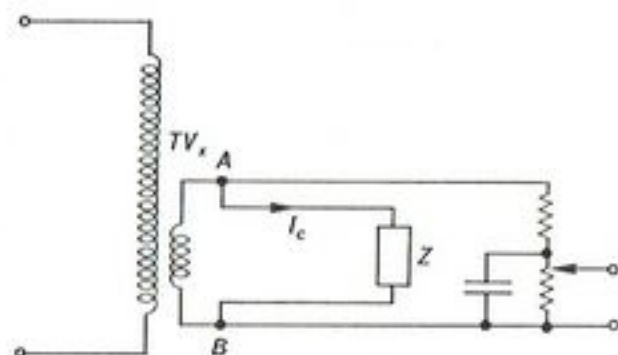



Fig. 8-23

8-2,7. *Metodi differenziali.*

I metodi differenziali richiedono la presenza di un trasformatore campione con lo stesso rapporto nominale del trasformatore in prova; essi sono perciò particolarmente utilizzati per i TA, che hanno rapporti normalizzati e per i quali si realizzano facilmente campioni a rapporti multipli.

Se i due TA, campione e in prova, sono connessi come mostra la fig. 8-24, il lato AB è percorso dalla corrente:

$$\dot I = \dot I_{2x} - \dot I_{2c}\,;$$

se ammettiamo nulli per semplicità gli errori del campione, e uguale il rapporto nominale k_n per i due trasformatori, si ha:

$$\dot I = \frac{\dot I_1}{k_n}(1+\eta+j\varepsilon) - \frac{\dot I_1}{k_n} = \frac{\dot I_1}{k_n}(\eta + j\varepsilon) = \dot I_{2c}(\eta + j\varepsilon)\,.$$

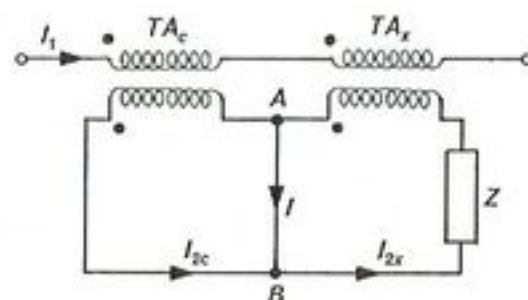



Fig. 8-24

Si tratta quindi di misurare le componenti di $\dot I$ in fase e in quadratura rispetto a I_{2c}, per avere l'errore di fase e di rapporto. Queste componenti

possono essere misurate con un metodo potenziometrico o di proiezione ma si prestano facilmente anche a misure dirette, con strumenti numerici.

Un esempio è dato in fig. 8-25, nella quale, in condizioni di corrente I_0 nulla, risulta:

$$\eta = \frac{r}{R}\,; \qquad \varepsilon = \frac{\omega M}{R}\,,$$

dove perciò r e M possono essere tarati in modo da indicare direttamente gli errori, in percento o in centiradianti.

Una causa di incertezza, propria del metodo differenziale, è la presenza di una tensione non nulla sul lato AB; essa può costituire una componente

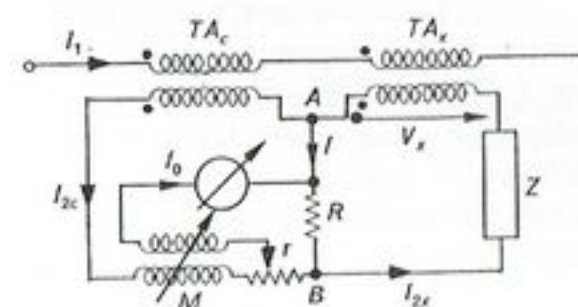



Fig. 8-25

non trascurabile della tensione V_x e determina perciò un aumento di prestazione per il trasformatore in prova, se I_{2x} è maggiore di I_{2c}, e viceversa. Numerosi sono gli schemi che sono stati ideati per la misura delle componenti della corrente differenziale $\dot I$, riducendo il valore della tensione V_{AB}.

Il metodo differenziale si presta anche a controlli semplici, anche se poco precisi, degli errori di un TA, con l'impiego di due wattmetri e di uno sfasatore (fig. 8-26). Quando, ruotando lo sfasatore, il wattmetro 1 si porta a segnare zero, la tensione $\dot V$ è in quadratura con $\dot I_{2c}$; il wattmetro 2

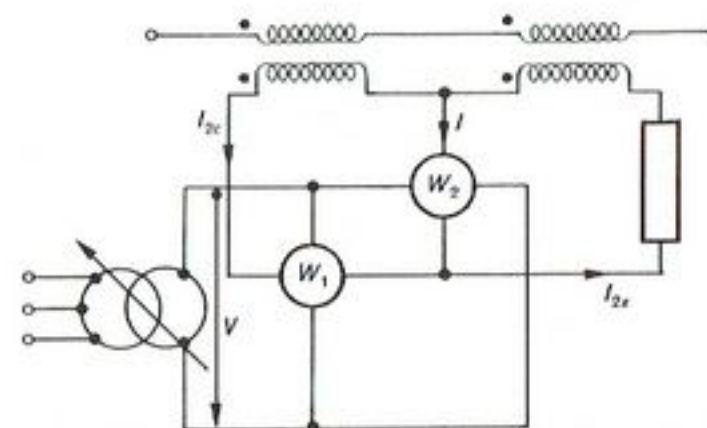
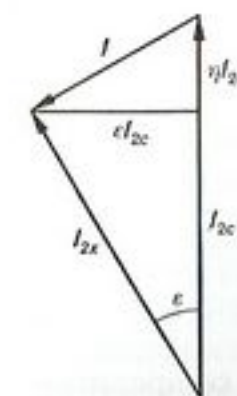



Fig. 8-26 Fig. 8-27

segna allora (fig. 8-27):

$$P_2 = \dot{V} \times \dot{I} = \varepsilon V I_{2e} ;$$

facendo ruotare di 90° lo sfasatore, cioè portando $\dot{V}$ in fase con $\dot{I}_{2e}$ si ottiene:

$$P_1 = \dot{V} \times \dot{I}_{2e} = V I_{2e} ; \qquad P_2' = \dot{V} \times \dot{I} = \eta V I_{2e} ,$$

da cui si ricava:

$$\eta = \frac{P_2'}{P_1} ; \qquad \varepsilon = \frac{P_2}{P_1} .$$

Questo metodo è, fra l'altro, basato sull'ipotesi che i wattmetri abbiano errore di fase nulli; inoltre, per avere una buona lettura, è necessario inserire nel lato AB un wattmetro con portata amperometrica commisurata al valore della corrente I, il che comporta, in genere, un consumo elevato.

Gli schemi precedenti possono essere facilmente modificati, per essere resi adatti alla taratura dei trasformatori di tensione. In ogni caso, gli errori del trasformatore campione devono essere sommati algebricamente ai risultati, per ottenere gli errori del trasformatore in prova.

8-2,8. *Uso del comparatore di corrente.*

Gli schemi differenziali di taratura dei TA possono raggiungere precisioni molto elevate se, al posto del trasformatore campione, si utilizza un comparatore di corrente alternata (vedi 5-5,3). Questo comparatore viene azzerato inviando nell'avvolgimento compensatore una corrente I_3 proporzionale alla corrente d'errore I (fig. 8-28) secondo i parametri della rete N, generalmente formata da amplificatori operazionali ed impedenze note.

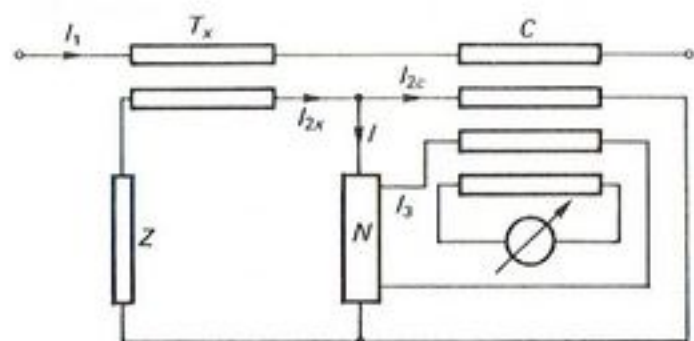



Fig. 8-28

Il comparatore di corrente può essere usato anche nella taratura dei TV, con schemi del tipo di quello di fig. 8-29, poiché consente di mettere

fra loro in relazione le due correnti $\dot{I} = j\omega C\dot{V}_1$ e $\dot{I}' = j\omega C'\dot{V}_2$, dalle quali si può risalire al rapporto (complesso) fra $\dot{V}_2$ e $\dot{V}_1$.

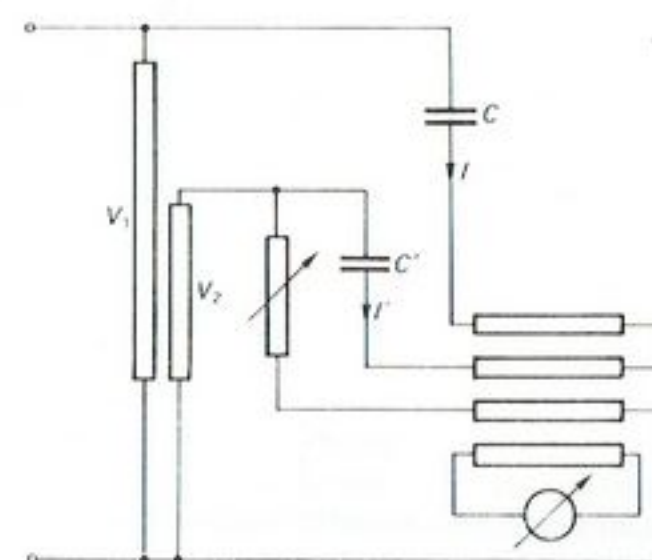



Fig. 8-29

8-3. Misure di resistenza.

8-3,1. *Principi generali.*

La scelta fra i diversi metodi, che possono essere utilizzati per la misura di una resistenza, dipende in primo luogo dal valore della resistenza stessa; occorre infatti distinguere:

a) le piccole resistenze (in genere, inferiori all'ohm), quelle cioè la cui misura è influenzata dalla presenza di resistenze di contatto;

b) le medie resistenze (da 1 a 10^6 ohm);

c) le grandi resistenze (in genere, superiori a 10^6 ohm), la cui misura è influenzata dalla presenza di resistenze di dispersione.

I limiti fra le precedenti categorie dipendono dalla precisione con cui si vuole effettuare la misura; i metodi impiegati possono differire fra loro sia come principio sia come modalità di esecuzione.

In base a quanto si è visto nei capitoli precedenti, per misure di precisione si utilizzano, per le piccole resistenze, il potenziometro o il doppio ponte, per le medie resistenze, ancora il potenziometro o preferibilmente il ponte di Wheatstone. La misura di precisione delle grandi resistenze è in generale eseguita con ponti derivati da quello di Wheatstone, in cui, con

opportuni disposizioni, viene eliminata l'influenza delle resistenze di dispersione.

Per misure di controllo, si usa in genere il metodo voltamperometrico, con le diverse modalità, già esaminate per i vari casi. Per le grandi resistenze si ricorre talvolta a metodi balistici.

8-3,2. *Misure di resistività.*

La misura di una resistenza viene spesso eseguita per determinare la resistività del materiale di cui essa è composta. Il caso più semplice è rappresentato dalla misura su conduttori omogenei uniformi, rettilinei, di lunghezza l e sezione S, per cui è:

$$\varrho = R\frac{S}{l};$$

oltre alla misura di resistenza, occorre perciò procedere a misure di lunghezza e di sezione; le incertezze di queste misure devono essere comparabili con quelle della misura di resistenza, poiché influiscono allo stesso modo sul risultato finale, essendo:

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = \frac{\mathrm{d}R}{R} + \frac{\mathrm{d}S}{S} - \frac{\mathrm{d}l}{l}. \qquad [8\text{-}9]$$

In particolare, è spesso difficile la misura, entro qualche per mille, delle sezioni, non solo se di forma irregolare, ma anche, per esempio, se di forma circolare di diametro D, per cui è:

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = 2\frac{\mathrm{d}D}{D};$$

sulla misura di piccoli diametri, il termine $\mathrm{d}D/D$ può risultare abbastanza elevato.

La misura viene perciò spesso eseguita per pesata, su una lunghezza l' di materiale, determinandone il peso p e il peso specifico γ:

$$S = \frac{p}{\gamma l'};$$

le misure per pesata possono essere eseguite con precisione elevata.

Se, come avviene abitualmente, la misura di resistività deve essere riferita alla temperatura ambiente, alle incertezze date dalla [8-9] si aggiunge quella dovuta alla differenza θ di temperatura fra il provino e l'ambiente; detto α il coefficiente di temperatura del materiale, l'errore risulta pari ad $\alpha\theta$. Nota la temperatura ambiente ed il valore di α, la resistività può essere poi riportata a qualsiasi valore, anche convenzionale, di temperatura.

8-3,3. *Misure di resistività su sbarre di rame.*

La determinazione della resistività di sbarre di rame è una misura che si esegue di frequente per controllare se il materiale impiegato contenga impurità che ne alterino le proprietà elettriche.

Anche per misure commerciali (fornitura di rame per linee o per costruzioni elettromeccaniche) la precisione richiesta è dell'ordine dello 0,5%; ciò richiede che la misura sia eseguita con un metodo di zero (doppio ponte) e che siano determinati con un'incertezza non maggiore dello 0,1% sia la lunghezza che la sezione del provino: per quest'ultima conviene pertanto ricorrere a metodi di pesata.

Particolarmente importante è la determinazione della temperatura del provino; essa non può essere misurata direttamente, ma si può assumere eguale a quella del mezzo circostante (aria o bagno d'olio) facendo in modo che lo smaltimento del calore prodotto dal passaggio della corrente nel provino stesso avvenga con un salto di temperatura inferiore a un limite prefissato (p. es. $\theta_L = 0{,}5$ °C, per avere una variazione di resistività minore di 0,2%).

La potenza dissipata dal provino, di lunghezza l e sezione S, è:

$$P = RI^2 = \varrho\frac{l}{S}I^2 = \varrho l S G^2$$

(G = densità di corrente); a regime termico raggiunto essa sarà dissipata, dalla superficie esterna S' del provino con un salto di temperatura:

$$\theta = \frac{P}{kS'} = \varrho\frac{lS}{kS'}G^2, \qquad [8\text{-}10]$$

essendo k un opportuno coefficiente di dispersione del calore. Per un provino circolare di diametro D risulta:

$$S = \frac{\pi D^2}{4}; \qquad S' = l\pi D$$

e perciò:

$$\theta_L > \theta = \varrho\frac{D}{4k}G^2;$$

per il rame, essendo $\varrho \cong 0{,}02\cdot 10^{-6}$ Ωm e $k \cong 10$ W/m² K, per $\theta_L = 0{,}5$ K vale quindi la semplice relazione:

$$G < \frac{1}{\sqrt{D}} \qquad \begin{array}{l}(D \text{ in mm})\\ (G \text{ in A/mm}^2)\end{array} \qquad [8\text{-}11]$$

cui corrisponde una d.d.p. per unità di lunghezza:

$$E = \varrho G < \frac{20}{\sqrt{D}} \qquad (\mathrm{mV/m})\,.$$

Si riconosce facilmente come il limite di corrente imposto dal riscaldamento dia luogo a sensibilità tanto minori, nell'equilibrio del ponte, quanto maggiore è il diametro D; inoltre, già con un diametro di alcuni millimetri la tensione per metro di lunghezza risulta troppo piccola per una buona misura voltamperometrica.

Non sempre, specie per sbarre di grande diametro, è conveniente arrivare alle condizioni di equilibrio termico; durante il riscaldamento, che avviene con legge esponenziale, la temperatura istantanea è:

$$\theta = \theta_M(1 - \varepsilon^{-t/T})$$

dove la costante di tempo vale, per fili circolari in rame [1]:

$$T = 90D \qquad (T \text{ in s, se } D \text{ è in mm})$$

e il cui valore di regime θ_M è dato ancora dalla [8-10]. Se si esegue la misura in un tempo $t \ll T$, si può porre:

$$\theta \simeq \theta_M \frac{t}{T} < \theta_L$$

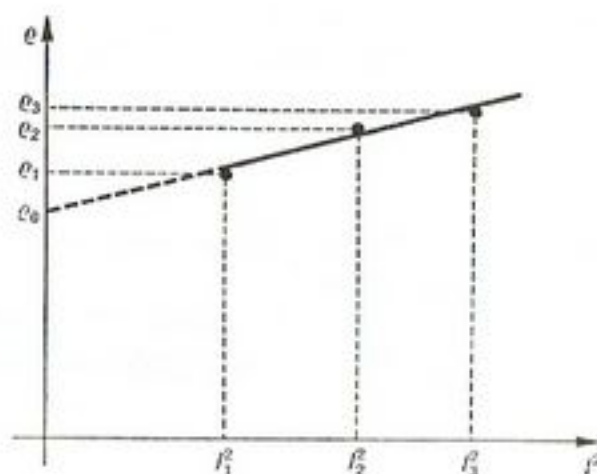



Fig. 8-30

(1) La costante di tempo termica per un corpo di volume v e calore specifico (per unità di volume) c, risulta:

$$T = \frac{cv}{kS}; \qquad \text{per cui è:} \qquad \frac{\theta_M}{T} = \frac{\varrho}{c} G^2;$$

per il rame, $c \simeq 3{,}6 \cdot 10^6$ J/m³ K/v.

e la densità di corrente ammissibile, con $\theta_L = 0{,}5$ K, diviene:

$$G \leq \frac{10}{\sqrt{t}} \qquad (\mathrm{A/mm^2} \text{ con } t \text{ in secondi});$$

per esempio, per $t = (T/90) \simeq D(\mathrm{mm})$ la densità limite risulta dieci volte maggiore di quella data dalla [8-11].

Quando non si voglia o non si possa eseguire l'equilibrio in un tempo molto breve, conviene misurare i valori della resistività per diversi valori della corrente, in condizioni di regime termico. Riportando poi tali valori in funzione di $I^2 \equiv \theta$, si ottiene una retta, da cui si può, per estrapolazione (fig. 8-30) ricavare il valore della resistività ϱ_0 alla temperatura ambiente ($\theta = 0$, $I = 0$).

8-3,4. *Misure di resistività su corpi estesi.*

Non sempre la misura di resistività può essere eseguita su sbarre, cioè su provini di lunghezza grande rispetto alle dimensioni trasversali; è allora necessario esaminare, caso per caso, la distribuzione del campo di corrente, e, dalla legge che pone in relazione la resistenza con le dimensioni geometriche, dedurre la resistività.

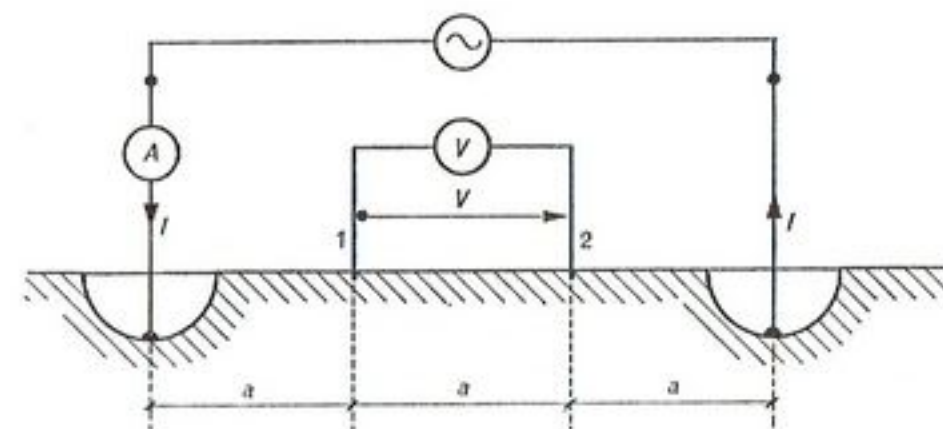



Fig. 8-31

Un caso molto semplice e molto frequente è quello della misura della resistività di un terreno; supponendo che le sonde amperometriche creino un campo emisferico, il potenziale assunto dalle sonde voltmetriche, nella disposizione di fig. 8-31 risulta:

$$V_1 = I\frac{\varrho}{2\pi a} - I\frac{\varrho}{2\pi \cdot 2a} = \varrho\frac{I}{4\pi a}$$

$$V_2 = -V_1\,.$$

Si ha perciò:

$$\varrho = \frac{V}{I} 2\pi a \, .$$

Il campo può ritenersi sufficientemente prossimo all'emisferico se la distanza a è grande rispetto alle dimensioni degli elettrodi adduttori di corrente. Gli schemi pratici sono resi più complessi dalla presenza, nel terreno, di sorgenti di f.e.m. che disturbano la misura.

Per una lamina (fig. 8-32) di spessore s, piccolo rispetto alla distanza a fra le punte, il campo può ritenersi simile a quello di due conduttori cilindrici e risulta:

$$\varrho = \frac{V}{I} \frac{\pi}{\ln 2} s \, ;$$

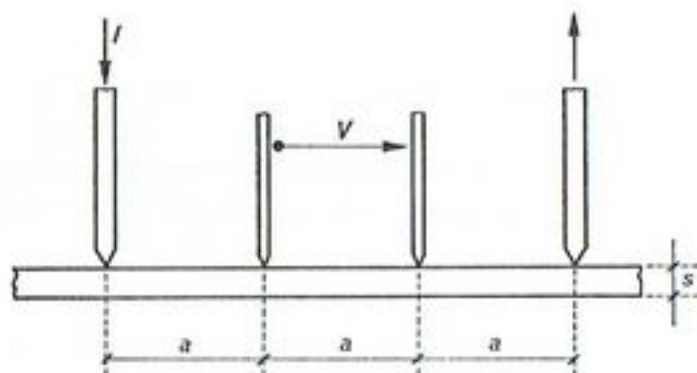



Fig. 8-32

questa relazione è valida entro pochi percento anche quando sia $s < 0{,}5a$, purché le dimensioni delle punte, che possono essere anche appoggiate alla superficie esterna, siano piccole rispetto a s mentre le dimensioni trasversali della lamina sono molto grandi rispetto a s. Il metodo (detto delle quattro punte) si presta bene al confronto fra la resistività di materiali diversi (è p. es. utilizzato nelle misure sui semiconduttori) una volta fissata, con le dimensioni del provino e delle sonde, la costante di proporzionalità fra ϱ e R. Questa può essere ricavata da un tracciamento del campo di corrente, con mezzi analitici o di calcolo numerico.

Il metodo può essere generalizzato, con la disposizione delle quattro punte su una circonferenza.

8-3,5. *Ohmmetri e megaohmmetri.*

Interessa talvolta determinare il valore di una resistenza, in modo rapido anche se approssimativo; ciò accade particolarmente nel controllo dei circuiti elettrici ed elettronici o quando si voglia p. es. localizzare un'interruzione o un cortocircuito in uno schema complesso.

Fig. 8-33

Un semplice apparecchio è illustrato in fig. 8-33; esso impiega un milliamperometro per c.c., che può essere l'equipaggio di uno strumento universale, e una sorgente di tensione continua, generalmente una pila a secco.

La resistenza R_i, il cui valore comprende la resistenza propria dello strumento, è di valore tale che, cortocircuitando i morsetti AB, lo strumento indichi il valore di fondo scala I_M; è cioè:

$$I_M = \frac{E}{R_i} \, ;$$

quando, agli stessi morsetti, è collegata la resistenza R, lo strumento è percorso dalla corrente:

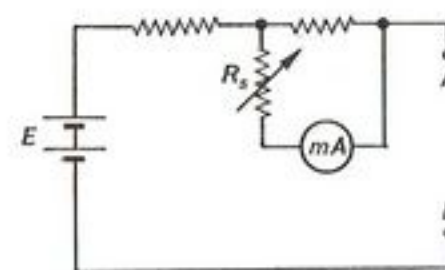
$$I = \frac{E}{R + R_i} = I_M \frac{R_i}{R + R_i} \, .$$

Il valore della resistenza incognita R può dunque desumersi dal valore del rapporto $\alpha = I/I_M$ fra la corrente indicata e il valore di fondo scala:

$$R = \left(\frac{I_M}{I} - 1\right) R_i = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) R_i \, .$$

La scala di R risulta crescente da destra a sinistra ($R = 0$ per il fondo scala, $R = \infty$ per $I = 0$) con legge pressoché iperbolica; le migliori condizioni di lettura si hanno a metà scala quando sia $R \cong R_i$. La portata può essere modificata, cambiando i valori di R_i (e quindi la portata I_M del milliamperometro); poiché interessa il valore del rapporto α e non il valore assoluto della corrente I_M, si possono correggere le variazioni di f.e.m. nel tempo, riportando sempre lo strumento in fondo scala, coi morsetti AB cortocircuitati, agendo sul resistore variabile R_s (fig. 8-34). Per gli ohmetri numerici si veda 4-5,6.

Fig. 8-34

Per la misura di resistenze di valore elevato (resistenze di isolamento), non è più sufficiente una f.e.m. di qualche volt, ma occorre far ricorso a qualche centinaio di volt: questa tensione viene fornita da una piccola dinamo a manovella

che alimenta un logometro magnetoelettrico (3-1,7) che misura direttamente il rapporto fra la tensione applicata e la corrente che circola. La misura risulta così indipendente dal valore della f.e.m. fornita dalla dinamo e cioè dalla velocità di rotazione della manovella. Questa velocità deve però essere uniforme per evitare le correnti capacitive che danno luogo ad una indicazione errata in difetto a tensioni (e cioè a velocità) crescenti ed errate in eccesso a velocità decrescente.

8-3,6. *Metodi balistici.*

La determinazione del valore di una grande resistenza può essere eseguita anche attraverso misure di quantità di carica e cioè mediante utilizzazione di un galvanometro balistico.

La quantità istantanea di carica q immagazzinata da un condensatore di capacità C, caricato da una sorgente di f.e.m. E attraverso una resistenza R_s (fig. 8-35) vale:

$$q = EC(1 - \varepsilon^{-t/R_sC})\ ;$$

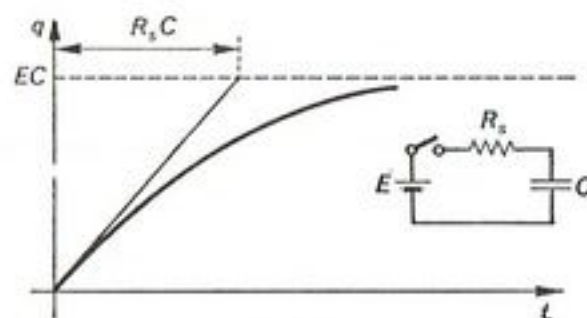



Fig. 8-35

se lo stesso condensatore, dopo ultimata la carica, viene scaricato sulla resistenza R_p è invece (fig. 8-36):

$$q = EC\varepsilon^{-t/R_pC}\ .$$

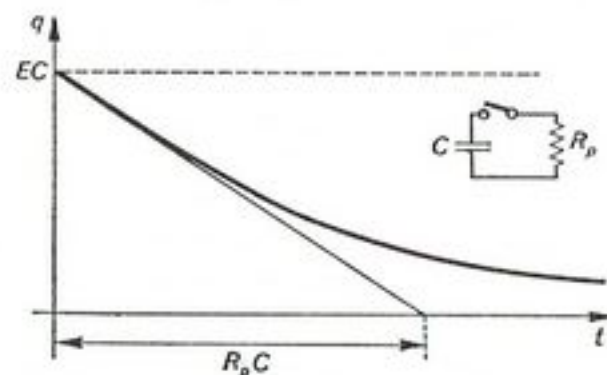



Fig. 8-36

Si hanno da ciò due metodi per la misura di resistenza, ponendo la resistenza incognita o in serie (metodo di accumulazione) o in parallelo (metodo di perdita di carica) a un condensatore di capacità C nota. La carica $Q = EC$ può essere misurata a carica completa (eventualmente cortocircuitando R_s) o prima della scarica (eventualmente disinserendo R_p); chiudendo il condensatore sul galvanometro balistico, si legge la deviazione:

$$l_1 = Q\ .$$

Se la quantità q viene misurata dopo un tempo τ dall'inizio della carica (fig. 8-37), si ha sul galvanometro balistico una deviazione:

$$l_2 = l_1(1 - \varepsilon^{-\tau/R_sC})$$

da cui si ricava:

$$R_s = \frac{\tau}{C \ln \dfrac{l_1}{l_1 - l_2}} \simeq \frac{\tau}{C}\frac{l_1}{l_2}\ ;$$

l'ultima semplificazione è lecita se è $\tau \ll R_sC$; poiché in tal caso è anche $l_2 \ll l_1$, può essere conveniente modificare la costante del galvanometro in un rapporto noto, durante la misura di l_1, con un derivatore universale.

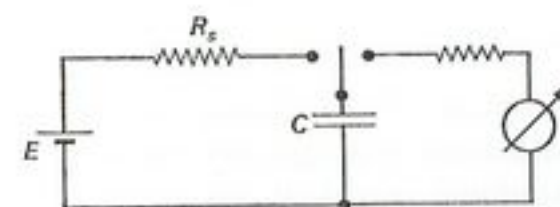



Fig. 8-37

Nel metodo per perdita di carica (fig. 8-38), si misura la q dopo il tempo τ dall'inizio della scarica; si ha perciò

$$l_2 = l_1\varepsilon^{-\tau/R_pC}$$

e quindi:

$$R_p = \frac{\tau}{C}\frac{1}{\ln \dfrac{l_1}{l_2}}\ .$$

Quando si voglia misurare la costante di tempo propria di un isolante (CR_p) non si richiede la conoscenza del valore di C.

Nelle misure più accurate, particolari schermi devono essere previsti, per evitare gli effetti delle resistenze di dispersione e delle capacità paras-

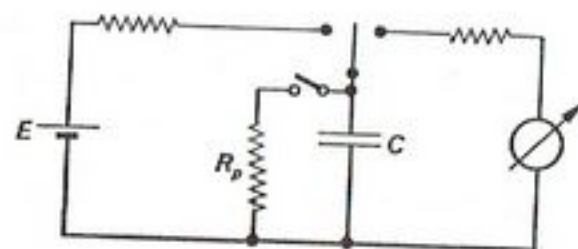



Fig. 8-38

site. Questi metodi si prestano anche alla costruzione di sistemi automatici, in cui il galvanometro balistico è sostituito da un integratore e la misura dell'intervallo di tempo τ può essere eseguita con sistemi numerici.

Si deve però osservare, se si vogliono raggiungere le precisioni elevate, (superiori a 10^{-4}) che sono possibili con questi sistemi, che il comportamento di un condensatore reale, in fase di carica e scarica, richiede un circuito equivalente più complesso di quello indicato in fig. 2-22, valido per una singola frequenza, comprendente cioè più costanti di tempo, relative ai diversi fenomeni di assorbimento e di dispersione nel dielettrico.

8-4. **Misure magnetiche in c.c.**

8-4,1. *Schema di principio.*

I metodi per il tracciamento della caratteristica di magnetizzazione e del ciclo d'isteresi di un materiale magnetico sono usualmente denominati metodi in corrente continua perché utilizzano circuiti alimentati da sorgenti di f.e.m. continua.

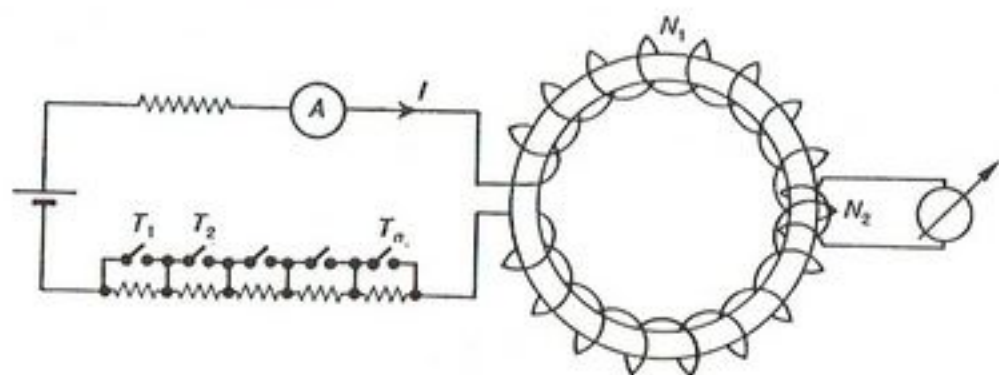



Fig. 8-39

Si consideri, ad esempio, il circuito semplice di fig. 8-39; il provino è di forma toroidale, di lunghezza media l_0 e di sezione trasversale S, con un avvolgimento di N_1 spire uniformemente distribuite. Il campo magne-

tico nel provino, quando l'avvolgimento è percorso dalla corrente I:

$$H = \frac{N_1 I}{l_0},$$

è regolabile, per scatti, cortocircuitando od aprendo i vari interruttori $T_1, T_2, \ldots, T_n$, che escludono od inseriscono delle resistenze nel circuito di alimentazione.

Un integratore (o un galvanometro balistico) indica, per ogni variazione di H, la corrispondente variazione $\Delta\phi$ del flusso concatenato con un avvolgimento di N_2 spire; esso consente quindi di risalire al valore della variazione di induzione:

$$\Delta B = \frac{\Delta\phi}{N_2 S}.$$

Questo metodo non è molto pratico ed è perciò sostituito, nelle applicazioni, da vari metodi che si diversificano fra loro per uno o più particolari. Esamineremo perciò separatamente i vari punti in cui esso può venir migliorato e reso adatto a particolari esigenze, distinguendo:

a) lo schema elettrico del circuito di alimentazione;

b) la forma del circuito magnetico;

c) i dispositivi per la misura del campo magnetico;

d) i metodi di misura dell'induzione.

8-4,2. *Circuito di alimentazione.*

Il circuito di fig. 8-39 fornisce il valore dell'induzione corrispondente ai vari punti della caratteristica da determinare, come somma delle variazioni ΔB di tutti i punti precedenti. Ciò richiede innanzitutto che il materiale parta da uno stato ben definito (smagnetizzato: $B=0$) e che i diversi valori di ΔB siano determinati tutti con buona precisione: un errore su uno di essi si ripercuote infatti su tutte le misure successive.

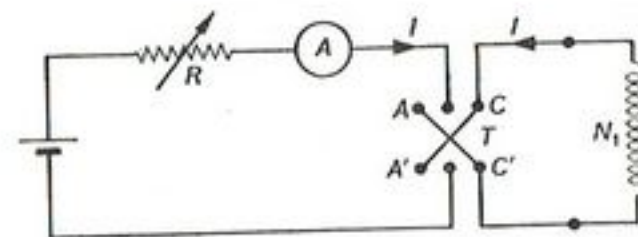



Fig. 8-40

Si preferisce perciò in pratica il circuito di fig. 8-40, mediante il quale si traccia non la curva di prima magnetizzazione ma la cosiddetta *curva di magnetizzazione normale*, definita come il *luogo dei vertici dei cicli di isteresi simmetrici*; le due curve differiscono, in pratica, assai poco fra loro.

Nel circuito di fig. 8-36 la manovra dell'invertitore T fa passare la corrente nell'avvolgimento dal valore $+I$ al valore $-I$ e fa quindi percorrere al materiale un ciclo di isteresi simmetrico (fig. 8-41), da $+H_1$ a $-H_1$ (e da $+B_1$ a $-B_1$); l'induzione B_1 risulta quindi:

$$B_1 = \frac{\Delta B}{2}.$$

I singoli punti della caratteristica B, H sono determinati indipendentemente, poiché bastano poche manovre dell'invertitore a stabilizzare il ma-

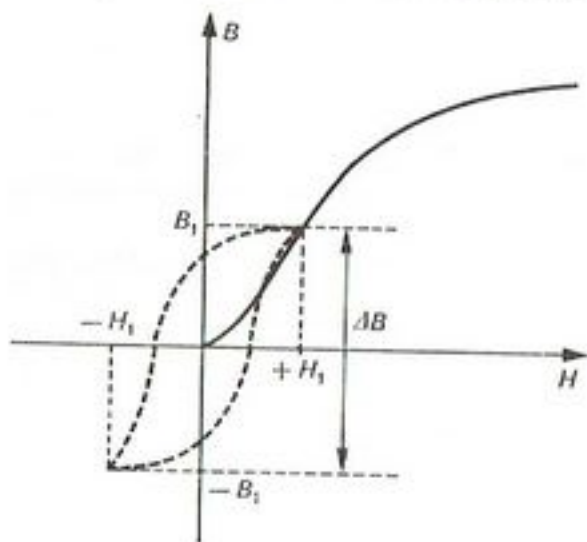



Fig. 8-41

teriale sul ciclo voluto, prescindendo dagli stati precedenti di magnetizzazione. Le misure possono essere ripetute e distribuite a piacere nelle zone di maggior interesse.

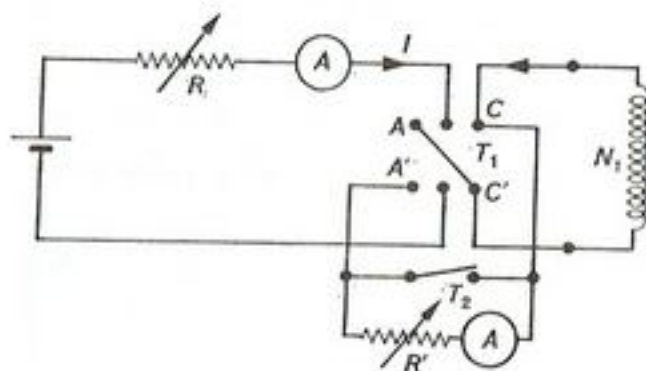



Fig. 8-42

Con una semplice modifica (fig. 8-42) il circuito si presta al tracciamento dei cicli d'isteresi; con l'interruttore T_2 chiuso, lo schema è identico a quello precedente e permette, in particolare, di regolare la corrente I al valore I_M in modo da riportarsi sempre al vertice del ciclo che si vuol tracciare (punti O e O' di fig. 8-43). Si assuma la corrente nell'avvolgimento positiva quando il commutatore T_1 è chiuso su AA'; si può ora passare dal punto O al punto P ($H_1 < H_M$) aprendo l'interruttore T_2 che inserisce la resistenza R'; dalla variazione ΔB_1 dell'induzione si determina il valore dell'induzione B_1:

$$B_1 = B_M - \Delta B_1$$

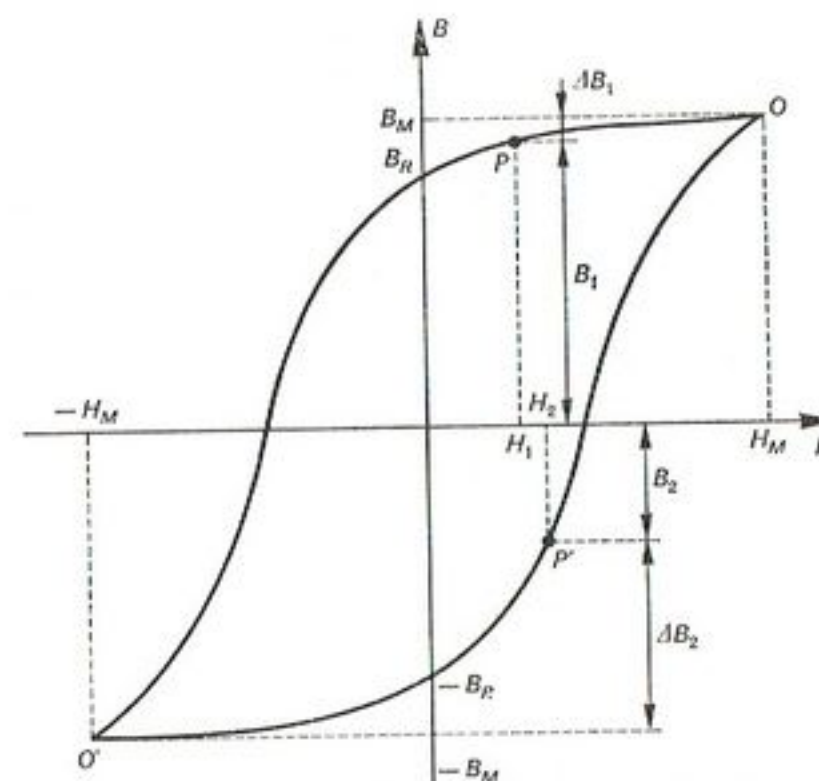



Fig. 8-43

In particolare, quando è $R' = \infty$, si ha il punto di induzione residua B_R.

Per tracciare il tratto da B_R a B_M, si utilizza il ramo $O'P'$ della caratteristica; con l'interruttore T_1 su CC' si fa pervenire il materiale nel punto O'; si commuta poi T_1 da CC' ad AA', avendo aperto T_2, in modo che il campo passi dal valore $-H_M$ al valore $+H_2$; è ancora:

$$B_2 = B_M - \Delta B_2 .$$

Fra una misura e la successiva il materiale è riportato ai vertici del ciclo (O, O') da ripetute manovre del commutatore T_1 (con T_2 chiuso);

anche qui i punti sono determinati in modo indipendente l'uno dall'altro, ma risultano tutti legati al valore B_M.

L'amperometro in serie con R' ha il compito di misurare con sufficiente precisione le correnti I_1, I_2 che possono essere molto minori della I_M.

Gli interruttori ed i commutatori che operano nei circuiti di figg. 8-36 e 8-37 si trovano ad aprire circuiti fortemente induttivi e sono sede perciò di archi fra i contatti. I transitori associati a tali archi possono influenzare la forma del segnale inviato al galvanometro balistico, quando non addirittura l'andamento del ciclo stesso del materiale. Quando si usino integratori (analogici o numerici) è perciò preferibile percorrere in modo continuo il ciclo d'isteresi, provvedendo ad alimentare il circuito magnetico con una corrente variabile a dente di sega, o alternata a frequenza molto bassa.

8-4,3. *Forma del circuito magnetico.*

Per avere condizioni uniformi lungo tutto il circuito magnetico, è preferita, per il provino, la forma toroidale; essa deve risultare di spessore piccolo rispetto al raggio medio r_0 in modo che il valore del campo magnetico ad un generico raggio r:

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

sia poco diverso dal valore medio:

$$H_m = \frac{NI}{2\pi r_0}.$$

Questa condizione può essere importante per misure su materiali a ciclo quasi rettangolare, dove piccole variazioni di campo danno luogo a forti variazioni di induzione.

Non sempre il circuito magnetico toroidale è possibile o conveniente, come nel caso di materiali con direzioni privilegiate o di forme prefissate (p. es. magneti permanenti o ferriti ottenuti per sinterizzazione); anche per i materiali laminati tale forma non è sempre pratica, per le grandi quantità di lamiera che essa richiede per la formazione di un nucleo. Si aggiunga la difficoltà di montare su un toro un elevato numero di spire.

Si utilizzano perciò spesso circuiti magnetici già predisposti di forma diversa (permeametri) in cui viene inserito il provino, di forma e dimensioni prefissate entro certi limiti. La costruzione di tali permeametri esce dai limiti di questo corso; è tuttavia opportuno precisare che essi lavorano con flussi rapidamente variabili, quando il materiale in prova percorre un

ciclo di isteresi; devono perciò essere previsti in modo da limitare gli effetti delle correnti parassite indotte.

La caratteristica principale di un permeametro deve essere quella di assicurare un campo uniforme nella zona del provino; ciò si ottiene, in particolare, avvicinando il più possibile le bobine di eccitazione alla zona di maggior riluttanza.

Talvolta, con materiale laminato in striscie, si forma un circuito magnetico pseudo-toroidale, avvolgendo più spire di striscia continua; questo circuito magnetico non è esente da un effetto di traferro (parte del flusso percorre un tratto in aria, come mostra la fig. 8-44) che dipende dalla maggior o minor compattezza con cui sono serrate le spire.

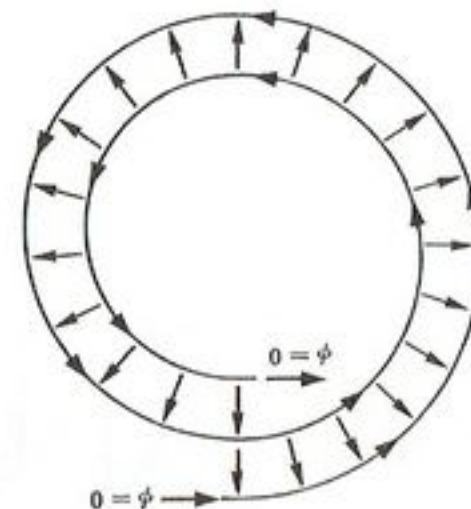



Fig. 8-44

8-4,4. *Misura indiretta del campo magnetico.*

Quando il circuito magnetico del permeametro non sia un nucleo toroidale uniforme, per poter ancora dedurre i valori del campo magnetico dalla misura delle amperspire di eccitazione, è necessario che sia soddisfatta una delle due condizioni seguenti:

a) la riluttanza del circuito magnetico esterno al provino è trascurabile rispetto a quella del provino stesso;

b) la f.m.m. necessaria a vincere la riluttanza del circuito magnetico esterno al provino è fornita da un avvolgimento separato.

In mancanza di tali condizioni è necessaria una misura diretta del campo magnetico sul provino.

Un tipo di permeametro in cui si cerca di rendere trascurabile la riluttanza del circuito magnetico esterno è quello di fig. 8-45 (permeametro tipo Hopkinson); in esso il provino ha la forma di una sbarretta allungata di sezione piccola rispetto a quella del circuito esterno; anche i traferri (t_1, t_2) sono di sezione maggiore di quella del provino; il loro spessore è ridotto mediante dispositivi di pressione, adattati alla forma del provino. Si può allora supporre, con un certo grado di approssimazione che dipende dalle caratteristiche del circuito magnetico e del provino stesso, che le

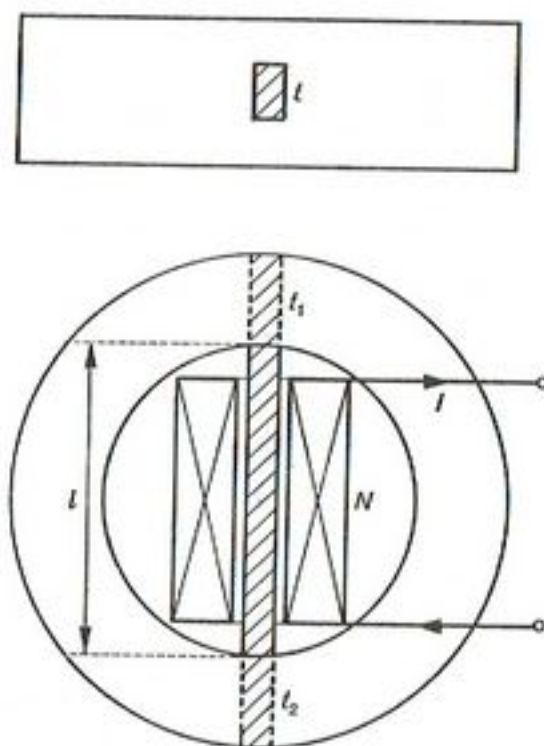



Fig. 8-45

amperspire NI cadano tutte sul provino e vi forniscano un campo uniforme:

$$H = \frac{NI}{l}.$$

Questa semplificazione comporta gradi di precisione diversi, a seconda delle caratteristiche e del punto di lavoro del provino.

Il principio su cui si fonda la compensazione della riluttanza esterna al provino è illustrato in fig. 8-46; si vuole arrivare a far cadere la f.m.m. NI fornita dall'avvolgimento principale sul tratto di lunghezza l, mentre le amperspire $2N'I'$ fornite dagli avvolgimenti ausiliari devono fornire la restante f.m.m. necessaria al circuito magnetico.

Per controllare che tale ripartizione delle amperspire sia realizzata, si regola la corrente I' fino a soddisfare una delle due condizioni seguenti:

a) è nulla la tensione magnetica fra gli estremi A, B del tratto l, misurata su un qualunque percorso ACB esterno all'avvolgimento;

b) l'induzione nelle sezioni A e B è uguale a quella esistente nella sezione mediana D.

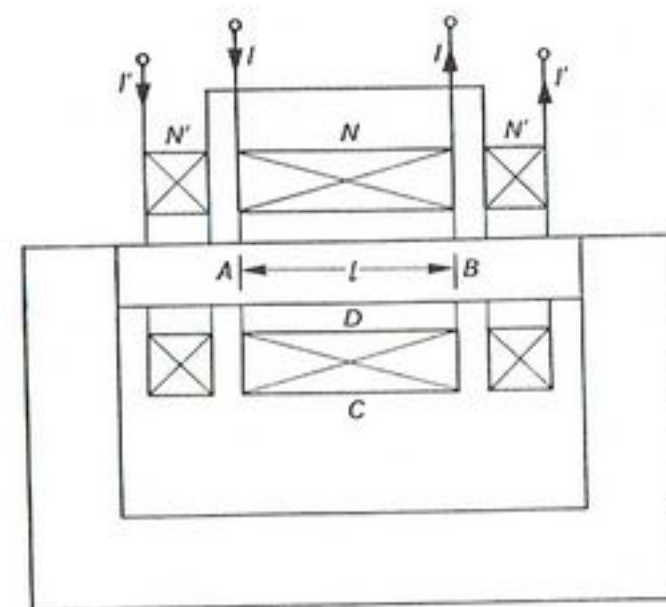



Fig. 8-46

La prima condizione deriva immediatamente dalla legge di circuitazione; è infatti per una linea chiusa $ACBDA$ (che si concatena con le amperspire NI):

$$NI = \oint \bar{H} \times d\bar{s} = \int_{ACB} \bar{H} \times d\bar{s} + \int_{BDA} \bar{H} \times d\bar{s} ;$$

se il primo termine dell'ultimo membro è nullo, si ha:

$$NI = \int_{BDA} \bar{H} \times d\bar{s} \quad \text{e perciò:} \quad NI = Hl,$$

se H è uniforme nell'interno del provino. L'annullarsi della tensione magnetica fra le sezioni terminali A, B può essere controllata con un adatto tensiometro magnetico.

Dalla condizione precedente risulta che il campo H non deve avere componenti normali alla superficie esterna del provino; da ciò si deduce che tutto il flusso esistente nella sezione mediana deve attraversare anche le sezioni A e B; ciò può essere controllato disponendo in A e B due gruppi di N_2 spire equiverse e in D un gruppo di $2N_2$ spire, avvolte in senso opposto; il flusso totale concatenato, controllabile con un galvanometro balistico durante le manovre di commutazione, deve risultare nullo.

La corrente I' deve essere regolata separatamente per ogni punto della caratteristica e commutata contemporaneamente alla corrente principale I. Ciò rende le misure lunghe e delicate, ma tale metodo (di cui è prototipo il permeametro di Burrows) consente le migliori precisioni.

8-4,5. *Misura diretta del campo magnetico.*

Quando la forma e le caratteristiche del permeametro non consentano di determinare il valore del campo magnetico dalle amperspire di eccitazione, il valore di H può essere misurato mediante un *tensiometro magnetico*. Esso è costituito da un supporto di materiale non magnetico su cui sono uniformemente avvolte delle spire; usualmente la sua costante non è ricavata dalle dimensioni geometriche, ma determinata, unitamente a quella del galvanometro balistico che vi è connesso, per taratura in un campo noto (p. es. in un solenoide lungo). Poiché il tensiometro misura la tensione magnetica fra i suoi estremi, il valore del campo che se ne deduce è il valore medio sulla sua lunghezza; si cerca però generalmente di usare il tensiometro in zone di campo uniforme.

Per la misura, non si ricorre in genere al cortocircuito delle sezioni estreme del tensiometro, ma si misura la variazione del suo flusso concatenato in uno dei modi seguenti:

a) durante la commutazione della corrente di alimentazione (p. es. nel tracciamento dei cicli simmetrici); in tal caso l'indicazione del tensiometro è proporzionale a $2H$;

b) estraendo rapidamente il tensiometro e portandolo in una zona a campo nullo; la misura può quindi essere eseguita e ripetuta senza variare l'induzione nel provino e fornisce direttamente il valore del campo H corrispondente a quella induzione;

c) ruotando il tensiometro di 180°; in tal caso la misura, pur conservando i pregi del metodo precedente, fornisce un'indicazione doppia.

In tutti i casi sopra descritti, il tensiometro è collegato con un galvanometro balistico, che può essere lo stesso che serve, separatamente, per la misura di B, e che deve essere tarato convenientemente assieme al tensiometro stesso.

In altri casi si ricorre ad un avvolgimento di N_2 spire avvolte su una sezione S (bobina esploratrice) che si fa ruotare con velocità nota di n giri al minuto; la bobina produce una f.e.m. alternata, con valore medio in una semionda:

$$E_m = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{4N_2S\mu_0}{\frac{60}{n}} H_1 = kH_1\,;$$

la f.e.m. è misurata da uno strumento magnetoelettrico a raddrizzatore, direttamente tarato con le bobine, per una data velocità di rotazione. La bobina misura il campo medio nella sua sezione S; esistono però particolari forme di bobine, adatte anche a misure in campi disuniformi: per esempio, una bobina di forma sferica misura il valore del campo nel suo centro (in base ad una proprietà delle funzioni armoniche). Vi sono poi vari dispositivi che sfruttano particolari fenomeni magnetoelettrici (sonde di Hall, magnetoresistenze) in grado di misurare campi magnetici in aria.

8-4,6. *Misura dell'induzione.*

L'induzione nel provino è generalmente misurata per mezzo delle variazioni del flusso concatenato con un avvolgimento, disposto sul provino stesso; questo avvolgimento è collegato con un galvanometro balistico, o con un flussometro, o con un integratore elettronico. Quando si usino integratori elettronici, per evitarne la deriva, si fa percorrere al materiale magnetico il ciclo da misurare, in modo continuo, usando una sorgente di alimentazione a bassa frequenza.

Non sempre l'area S' abbracciata dall'avvolgimento di misura coincide con l'area S del provino, specie se il permeametro è provvisto di circuiti fissi, nei quali il pezzo in prova deve essere infilato; in tal caso è necessario correggere il valore dell'induzione; poiché il flusso misurato risulta:

$$\phi = [BS + (S' - S)\mu_0 H]N_2$$

l'induzione nel provino è:

$$B = \frac{\phi}{N_2 S} - \frac{S' - S}{S}\mu_0 H = B_m\left[1 - \frac{S' - S}{S}\frac{\mu_0 H}{B_m}\right]$$

B_m essendo il valore misurato dell'induzione, H il campo magnetico sul provino.

Altri metodi sono stati applicati, specie nei permeametri per prove industriali, allo scopo soprattutto di eseguire la misura di B in regime statico; questi metodi hanno, in genere, l'inconveniente di misurare l'induzione in una sezione esterna al provino, nella quale il valore del flusso totale è influenzato dalla presenza dei flussi dispersi. Nella disposizione di fig. 8-47 l'induzione B è misurata dalla coppia agente su una bobina percorsa da una corrente nota I; si può sostituire alla bobina un vero e proprio avvolgimento, ruotante a velocità costante in cui si misura la f.e.m. indotta; in altre disposizioni, si inserisce una piastrina ad effetto Hall.

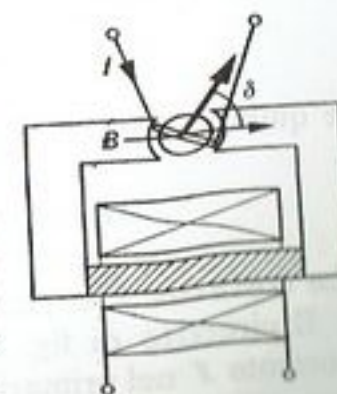



Fig. 8-47

8-4,7. *Taratura del galvanometro balistico.*

Quando l'induzione è misurata per mezzo di un galvanometro balistico (o di un flussometro), occorre procedere alla sua taratura nel circuito di effettivo impiego. Infatti la costante di un galvanometro balistico è una funzione complessa della resistenza del circuito in cui esso è inserito; viene perciò normalmente ricavata non analiticamente ma sperimentalmente, nelle condizioni di impiego. La taratura si esegue inviando nel circuito una quantità di carica o una variazione di flusso noto; nel primo caso (fig. 8-48), il condensatore C viene caricato alla tensione V e quindi scaricato sulla resistenza nota R; la carica:

$$Q = CV$$

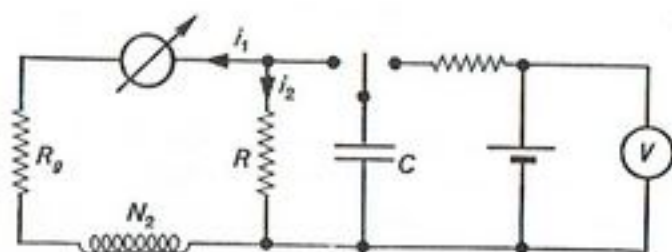



Fig. 8-48

si ripartisce fra la resistenza R e il circuito del galvanometro, di resistenza R_g, in maniera inversamente proporzionale alle rispettive resistenze; il galvanometro è perciò attraversato dalla quantità di carica:

$$Q_1 = \frac{R}{R+R_g} Q = \frac{RCV}{R+R_g};$$

in corrispondenza a questo passaggio di carica il galvanometro indica una deviazione l_1. Quando il flusso concatenato con il circuito varia della quantità $\Delta\phi$ si ha nel galvanometro un passaggio di carica:

$$Q' = \frac{\Delta\phi}{R+R_g}$$

e quindi una deviazione:

$$l = \frac{Q'}{Q_1} l_1 = \frac{\Delta\phi}{R+R_g} \cdot \frac{R+R_g}{RCV} l_1 = \frac{\Delta\phi}{RCV} l_1 = k\,\Delta\phi\,.$$

La costante k si ricava perciò dai valori di R, C, V e l_1.

Il circuito di fig. 8-49 provvede invece a creare, per inversione della corrente I nel primario della mutua campione M, una variazione del flusso concatenato con il circuito galvanometrico pari a $2MI$; si ha allora immediatamente dalla lettura dell'elongazione l_1, il valore della costante k di proporzionalità fra elongazioni e variazioni di flusso:

$$k = \frac{l_1}{2MI}.$$

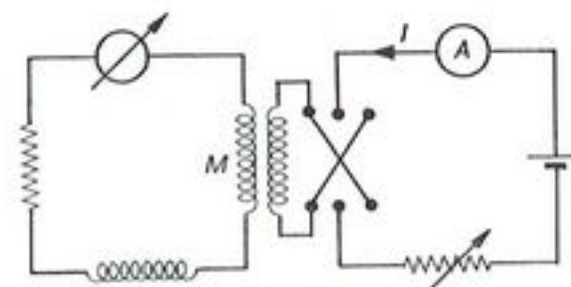



Fig. 8-49

Talvolta è conveniente fare più tarature, per diversi valori di una resistenza nota inserita sul circuito galvanometrico, allo scopo di avere più « portate » per il galvanometro balistico e misurare correttamente sia i valori elevati che quelli piccoli di $\Delta\phi$.

8-4,8. *Misure su materiali non ferromagnetici.*

Accade talvolta di dover misurare la permeabilità di materiali non ferromagnetici, per cui è:

$$\mu = \mu_0(1 + \delta)$$

con δ piccolo rispetto all'unità ($10^{-2} \div 10^{-3}$). Per la misura occorre ovviamente ricorrere a metodi zero.

Un metodo è indicato in fig. 8-50; il provino di sezione S è inserito in un solenoide lungo in aria, con n spire per unità di lunghezza, che for-

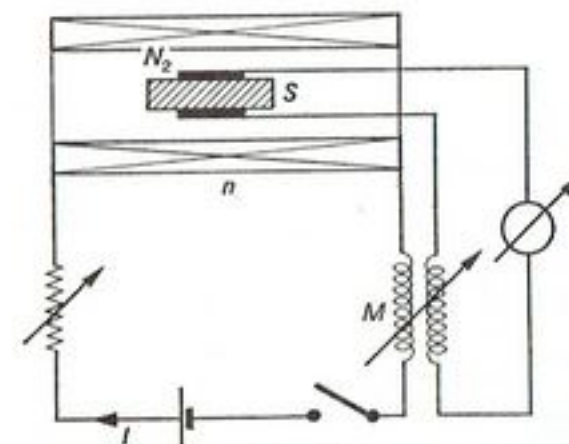



Fig. 8-50

nisce il campo $H = nI$; la mutua induttanza M, montata in opposizione alla bobina interna di N_2 spire, è regolata in modo da dar luogo a un'elongazione nulla, quando viene interrotta (o meglio invertita) la corrente I, prima senza il provino e poi con il provino inserito.

Lo scarto fra i due valori di M risulta:

$$\Delta M = M' - M'' = \frac{\mu H N_2 S}{I} - \mu_0 \frac{H N_2 S}{I} = (\mu - \mu_0) n N_2 S;$$

si può allora calcolare la permeabilità del provino:

$$\mu = \mu_0 + \frac{\Delta M}{n N_2 S}.$$

Per rendere precisa la misura, la mutua induttanza è composta di una parte fissa, di cui non occorre conoscere il valore e di una parte variabile, nota.

Un altro metodo è illustrato in fig. 8-51; sul provino montato fra le espansioni di un permeametro, sono montate due bobine contrapposte, una di N_1 spire, strettamente avvolte sulla sezione S del provino, la seconda di N_2 spire, di sezione maggiore S' ma tale che sia:

$$N_1 S = N_2 S'$$

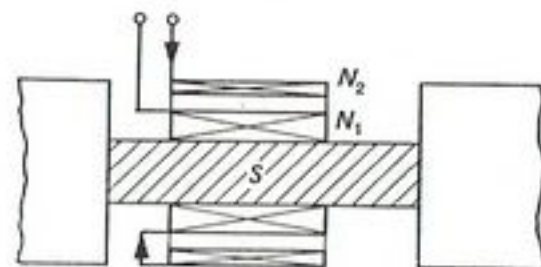



Fig. 8-51

in modo che, in aria, non si abbia flusso concatenato totale con le due bobine. Quando esiste nell'interno un provino, di permeabilità μ, si ha:

$$\phi = N_1 S \mu H - N_2 S \mu H - N_2 (S' - S) \mu_0 H = N_2 (S' - S)(\mu - \mu_0) H = \frac{N_1 - N_2}{N_2} S (\mu - \mu_0) H;$$

dalla misura di ϕ e di H si ricava pertanto la permeabilità:

$$\mu = \mu_0 + \frac{\phi}{HS} \frac{N_2}{N_1 - N_2};$$

si può anche prescindere dalla taratura del galvanometro balistico, se si misura, senza provino, il flusso concatenato con la N_1 spire:

$$\phi' = N_1 S H \mu_0$$

che consente di ricavare direttamente il valore di δ:

$$\delta = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} = \frac{\phi}{\phi'} \frac{N_1}{N_1 - N_2}$$

che dipende solo dal rapporto delle deviazioni del galvanometro balistico, a parità di H, con e senza il provino, noti i numeri di spire delle bobine. Si noti tuttavia che ϕ' è in genere molto maggiore di ϕ.

8-5. **Misure magnetiche in c.a.**

8-5,1. *Scopo delle misure.*

Le misure magnetiche in corrente alternata hanno soprattutto lo scopo di determinare la potenza assorbita, per unità di peso, da un materiale magnetico sottoposto ad un'induzione variabile; queste misure si eseguono correntemente per definire la qualità del materiale oggetto di una fornitura; esso viene infatti caratterizzato dalla sua cifra di perdita (potenza dissipata in un chilogrammo di materiale, con un'induzione sinusoidale a 50 Hz, di valore massimo $B_M = 1$ T); in molti casi è oggetto di garanzie anche il valore delle perdite con $B_M = 1{,}5$ T.

Allo scopo di determinare le proprietà del materiale nelle sue varie applicazioni, si eseguono inoltre misure di perdita in tutto il campo delle induzioni e delle frequenze d'impiego.

8-5,2. *Schema di principio di misura wattmetrica.*

Lo schema fondamentale, per la misura a frequenza industriale delle perdite di un nucleo ferromagnetico, è illustrato in fig. 8-52. Sul provino

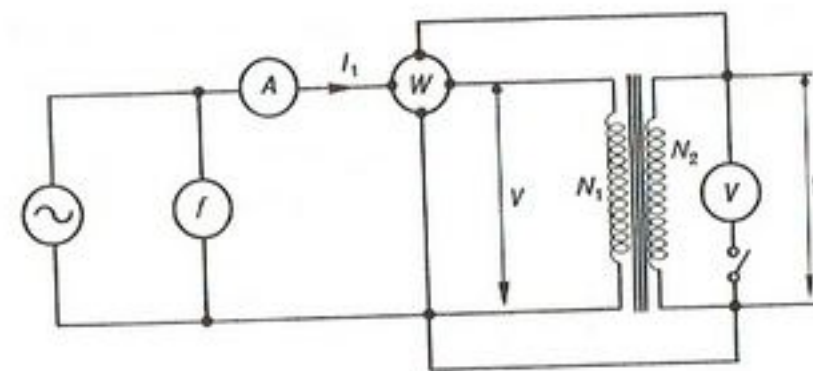



Fig. 8-52

(che si suppone per semplicità toroidale) sono disposti due avvolgimenti uniformemente distribuiti; quello esterno (o primario), di N_1 spire, viene alimentato da una sorgente di f.e.m. sinusoidale di frequenza f, quello interno, di N_2 spire, alimenta un voltmetro e la voltmetrica di un wattmetro.

Come mostra la fig. 8-53, in assenza di consumi strumentali, la tensione V applicata all'avvolgimento primario è la somma della f.e.m. E_1, indotta, dal flusso Φ nel provino e della caduta ohmica e induttiva nell'avvolgimento di eccitazione; la potenza dissipata nel nucleo:

$$P_f = \dot{E}_1 \times \dot{I} = E_1 I \cos\varphi$$

differisce da quella misurabile al primario $P_1 = \dot{V} \times \dot{I} = VI\cos\varphi'$ per il termine RI^2, dovuto alle perdite per effetto Joule nell'avvolgimento primario. Nella connessione di fig. 8-48 il wattmetro misura:

$$P = \dot{E}_2 \times \dot{I} = \frac{N_2}{N_1}\dot{E}_1 \times \dot{I} = \frac{N_2}{N_1} P_f$$

che coincide con la potenza cercata, a meno di un fattore numerico costante, che nella maggiore parte dei casi è tenuto uguale ad uno ($N_2 = N_1$).

Fig. 8-53

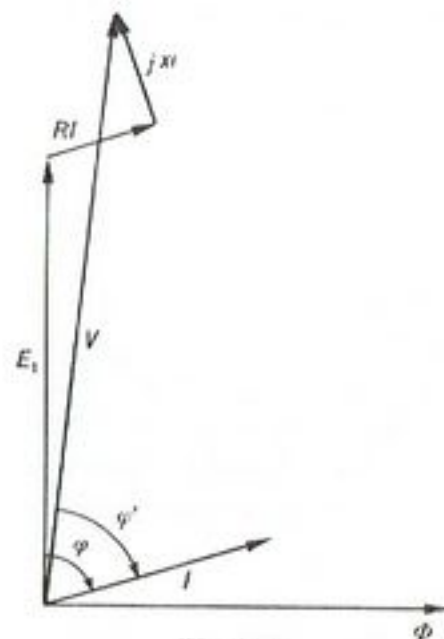
Detto inoltre B_M il valore massimo dell'induzione nel provino, di sezione S, il valore efficace della f.e.m. indotta nel secondario risulta:

$$E_2 = \omega \frac{\phi_M}{\sqrt{2}} N_2 = 4{,}44\, f B_M S N_2 . \qquad [8\text{-}12]$$

Dalle misure del voltmetro, del wattmetro e del frequenzimetro è così possibile ricavare l'andamento della potenza perduta nel provino, in funzione dell'induzione.

Se il circuito secondario è chiuso su una resistenza R_v (resistenza delle voltmetriche), il wattmetro misura, oltre alla potenza P_f, il consumo strumentale:

$$P = \dot{E}_2 \times \left[\dot{I} + \frac{N_2}{N_1}\frac{\dot{E}_2}{R_v}\right] = \frac{N_2}{N_1} P_f + \frac{N_2}{N_1}\frac{E_2^2}{R_v} .$$

La potenza dissipata nel nucleo si deduce perciò dalla lettura P del wattmetro sottraendone i consumi strumentali secondo la relazione:

$$P_f = P\frac{N_1}{N_2} - \frac{E_2^2}{R_v} ;$$

per rendere piccolo il termine correttivo, si usa aprire il circuito del voltmetro durante la lettura della potenza, in modo da ridurre R_v al solo valore della resistenza della voltmetrica del wattmetro.

Se il circuito magnetico è composto da materiale laminato, risulta difficile valutare direttamente la sezione S del provino; si preferisce in tal caso misurarne il peso p e la lunghezza l e determinare eventualmente il peso specifico del materiale γ (qualora non sia fornito dal costruttore o assunto per convenzione); è allora:

$$S = \frac{p}{\gamma l} ;$$

la misura del peso è d'altronde necessaria per determinare la perdita per unità di peso, che risulta ovviamente:

$$p_f = \frac{P_f}{p} .$$

Se il nucleo magnetico non ha giunti, può essere determinata la sua caratteristica di magnetizzazione essendo:

$$H = \frac{NI}{l}$$

la misura dà risultati diversi a seconda che ci si riferisca ai valori massimi, medi o efficaci di I.

8-5,3. *Apparecchio di Epstein.*

L'uso di un circuito magnetico toroidale non è, come già si è visto, né pratico, né economico; per le misure commerciali è stato perciò normalizzato un circuito magnetico convenzionale (apparecchio di Epstein) da alimentare secondo lo schema del paragrafo precedente.

Il materiale in prova viene tagliato in striscie lunghe 500 mm e larghe 30 e riunite in 4 pacchi del peso totale di circa 10 kg. Con i materiali per costruzioni elettromeccaniche queste dimensioni del provino richiedono due

fogli di lamiera, di dimensioni 1×2 m² e 0,35 mm di spessore (peso specifico $7{,}5 \div 7{,}7 \cdot 10^3$ kg/m³); le striscie vengono tagliate, se non esistono direzioni preferenziali, secondo due direzioni ortogonali.

I lamierini vengono montati, con giunti affacciati o intercalati, nei quattro lati di un quadrato (fig. 8-54); gli avvolgimenti primario e secondario sono distribuiti sui quattro lati con ugual numero di spire (150 spire per lato); con le dimensioni predette risulta una f.e.m. di circa 100 V per $B_M = 1$ T; le potenze da misurare sono dell'ordine della decina di Watt.

Avendo cura di sbavare i lamierini dopo i tagli e di isolare fra loro i pacchi, se a giunti affacciati, si ottengono risultati assai bene riproducibili fino ad induzioni di $1 \div 1{,}2$ T; ad induzioni superiori può farsi sentire la disuniformità dovuta alle dispersioni. Si tenga presente che, poiché si misura il valore medio dell'induzione lungo il provino, dato che le perdite crescono più che linearmente con l'induzione, una distribuzione disuniforme dà luogo sempre ad una curva delle perdite con valori più elevati rispetto ad una distribuzione uniforme, a parità di valori misurati per l'induzione.

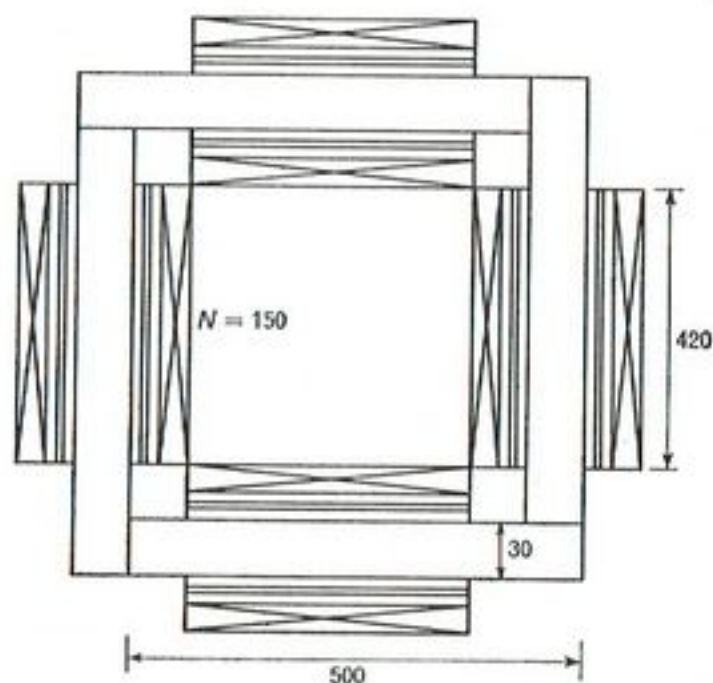



Fig. 8-54

8-5,4. *Forma d'onda.*

Come mostra la fig. 8-55, per la caratteristica non lineare dei materiali ferromagnetici, ad un andamento sinusoidale nel tempo dell'induzione corrisponde una corrente magnetizzante non sinusoidale (appuntita); ad una corrente sinusoidale corrisponde un'induzione deformata (appiattita) e quindi una caduta di tensione pure deformata (appuntita) (fig. 8-56).

Se al circuito di alimentazione è applicata una tensione sinusoidale, per mantenere tale il flusso nel provino è necessario evitare le cadute di ten-

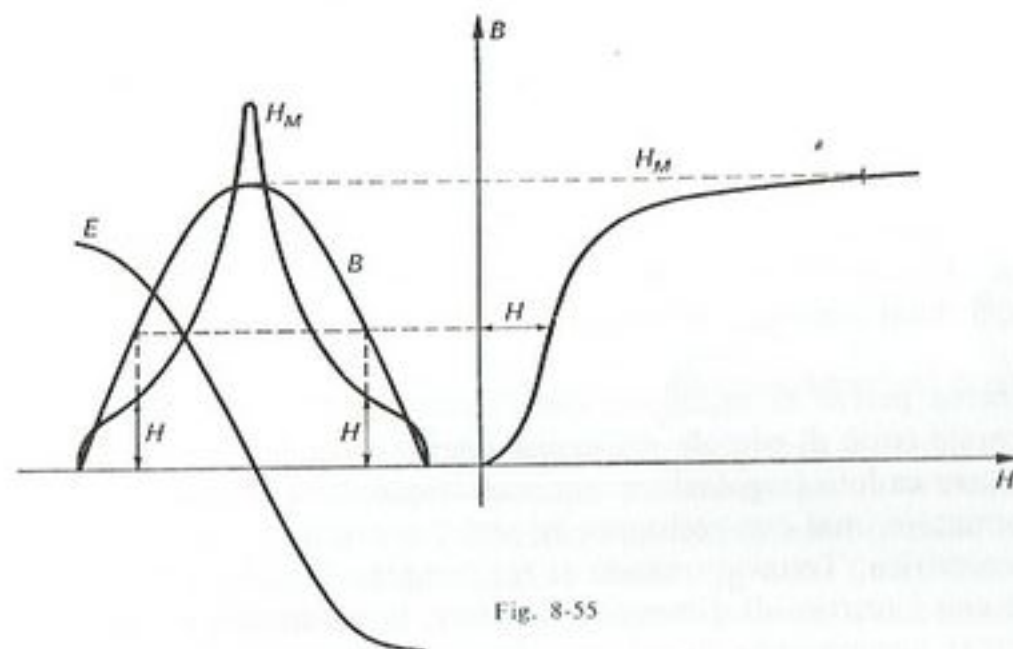



Fig. 8-55

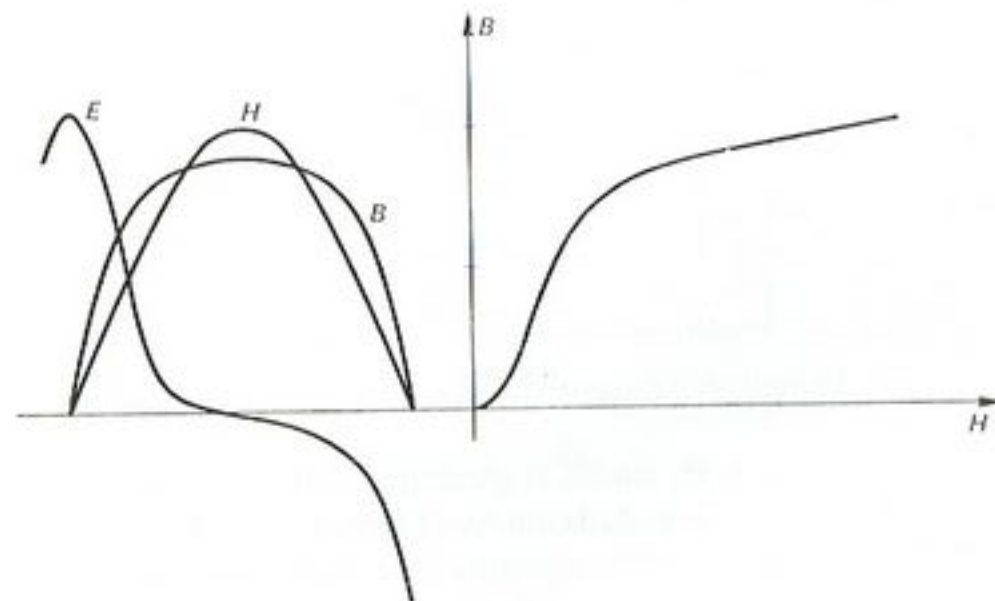



Fig. 8-56

sione, in particolare quelle ohmiche. Si consideri infatti il circuito di fig. 8-57 dove l'induttore è non lineare, ma privo di perdite; il flusso ϕ_n alla generica armonica $n\omega$, dà luogo ad una f.e.m., ai capi dell'induttore:

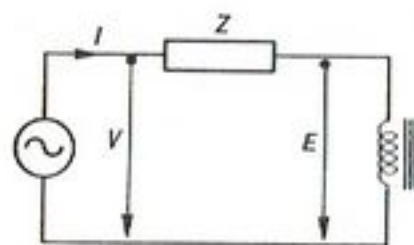



Fig. 8-57

$$\dot{E}_n = jn\omega\dot{\phi}_n ;$$

se $\dot{V}_n$ è la componente della tensione applicata e $\dot{Z}_n$ l'impedenza del circuito di alimentazione, per la pulsazione $n\omega$, dovrà essere:

$$\dot{V}_n = \dot{Z}_n \dot{I}_n + jn\omega\dot{\phi}_n . \qquad [8\text{-}12]$$

Le ampiezze delle varie armoniche di corrente I_n dipendono dall'andamento totale del flusso nel provino, ma la [8-12] dimostra, in generale, che per $\dot{V}_n = 0$ (f.e.m. applicata sinusoidale) devono esistere nell'induttore dei flussi armonici tanto più elevati quanto maggiori sono i termini $Z_n I_n$.

Si cerca perciò di utilizzare, per l'alimentazione, sorgenti di potenza esuberante (cioè di piccola resistenza interna), regolate in modo da non introdurre cadute (regolazione per eccitazione della sorgente o con autotrasformatore, mai con resistenza in serie) e strumenti di basso consumo amperometrico. Tuttavia quando si raggiungano le induzioni più elevate, specie con i provini di dimensioni limitate, la deformazione può riuscire eccessiva; occorrerebbe in tal caso fornire al circuito le f.e.m. armoniche V_n, di fase e ampiezza opportune per annullare i flussi ϕ_n. Ciò è stato realizzato in passato, mediante particolari alternatori, e viene oggi eseguito, più facilmente, mediante sistemi elettronici a retroazione.

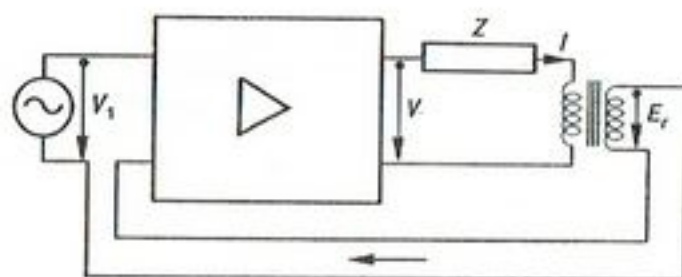



Fig. 8-58

Nel circuito di fig. 8-58, sia $\dot{G}_n$ il guadagno dell'amplificatore alla pulsazione $n\omega$ e $\dot{E}_{rn} = -\dot{H}_n jn\omega\dot{\phi}_n$ la f.e.m. di retroazione; se la f.e.m. della sorgente è sinusoidale, risulta:

$$\dot{V}_n = -\dot{G}_n \dot{H}_n jn\omega\dot{\phi}_n$$

e quindi, dalla [8-12]:

$$-\dot{Z}_n \dot{I}_n = (1 + \dot{H}_n \dot{G}_n) jn\omega\dot{\phi}_n .$$

Poiché la corrente I_n è imposta dalla caratteristica del materiale magnetico, possiamo dedurre che il flusso ϕ_n viene ridotto, dall'impiego dell'amplificatore, nel rapporto $(1 + \dot{H}_n \dot{G}_n)$ rispetto a quello che si avrebbe con alimentazione sinusoidale, cioè con $V_n = 0$.

8-5,5. *Correzioni per la forma d'onda.*

L'esigenza di mantenere la forma d'onda dell'induzione il più possibile prossima alla sinusoidale è dovuta alla necessità di misurare le perdite nel materiale magnetico in condizioni ben determinate e riproducibili. Per piccoli scostamenti dalla forma sinusoidale è però possibile correggere i risultati di misura e riportarli ai valori che si sarebbero misurati con induzione sinusoidale.

La possibilità di queste correzioni deriva dalle considerazioni seguenti:

a) le perdite p_i per isteresi sono legate alla frequenza (numero di cicli percorsi al secondo) e al valore massimo dell'induzione; la velocità con cui si percorrono i singoli tratti del ciclo non ha influenza (purché non si formino cicli intermedi); anche il *valore medio* E_{2m} della f.e.m. indotta è legato agli stessi parametri; se l'induzione è simmetrica nelle due semionde, è infatti:

$$E_{2m} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = 4\frac{\Phi_M}{T} = 4fN_2SB_M . \qquad [8\text{-}13]$$

Si può perciò dire che sotto certe condizioni usualmente verificate, è lecito scrivere, indipendentemente dalla forma d'onda:

$$p_i = p_i(E_{2m}) .$$

b) Le perdite per correnti parassite, dovute alla componente sinusoidale B_n dell'induzione di pulsazione ω_n, sono del tipo:

$$p_{pn} \equiv \omega_n^2 B_n^2$$

e perciò le perdite totali per correnti parassite risultano:

$$p_p \equiv \sum \omega_n^2 B_n^2 .$$

Anche il valore efficace della f.e.m. indotta è legato agli stessi parametri, essendo per la componente di pulsazione ω_n:

$$E_{2n} \equiv \omega_n B_n$$

e quindi:

$$E_2^2 = \sum E_{2n}^2 = \sum \omega_n^2 B_n^2 ;$$

ne deriva che si può porre:

$$p_p = E_2^2 .$$

Con flussi sinusoidali, le perdite per isteresi p_{is} e quelle per correnti parassite p_{ps}, possono esprimersi in funzione delle perdite totali p_{fs}, con adeguati coefficienti, in relazioni del tipo:

$$p_{is} = a p_{fs} , \qquad p_{ps} = b p_{fs} ;$$

i valori dei coefficienti a e b $(a + b = 1)$ possono essere ricavati sperimentalmente o sono fissati empiricamente, in funzione del materiale (per es. nei lamierini per costruzioni elettromeccaniche laminati a caldo, $b \simeq 0{,}2 \div 0{,}3$; in quelli laminati a freddo, $b \simeq 0{,}5 \div 0{,}6$, a 50 Hz e per le normali induzioni d'impiego).

Si supponga ora di avere determinate le perdite p_f, con flusso non sinusoidale; in corrispondenza, si misuri la f.e.m. indotta al secondario sia con un voltmetro a raddrizzatori, che indica $1{,}11 E_{2m}$, sia con voltmetro a valore efficace, che indica E_2; *a parità di tensione media (e cioè di B_M)* le perdite per isteresi restano costanti $(p_i = p_{is})$ indipendentemente dalla forma d'onda; le perdite per correnti parassite risultano invece riferite alla f.e.m. efficace E_2 anziché al valore efficace che avrebbe la f.e.m. indotta, se il flusso fosse sinusoidale, valore che è uguale a $1{,}11 E_{2m}$.

Risulta perciò:

$$p_f = p_i + p_p = p_{fs} \left[a + \left(\frac{E_2}{1{,}11 E_{2m}} \right)^2 b \right]$$

e si ottiene quindi la potenza in condizioni di flusso sinusoidale:

$$p_{fs} = \frac{p_f}{a + k^2 b} \simeq p_f [1 - b(k^2 - 1)] \simeq p_f [1 - 2b \, \Delta k]$$

in funzione del rapporto k fra le letture dei due voltmetri o della sua differenza Δk rispetto all'unità; questa perdita è riferita al valore di B_M fornito dalla [8-13], quando si assuma per la f.e.m. indotta il valore letto sul voltmetro a raddrizzatori.

La correzione si esegue in genere solo quando le indicazioni dei due voltmetri non differiscano per più di qualche percento.

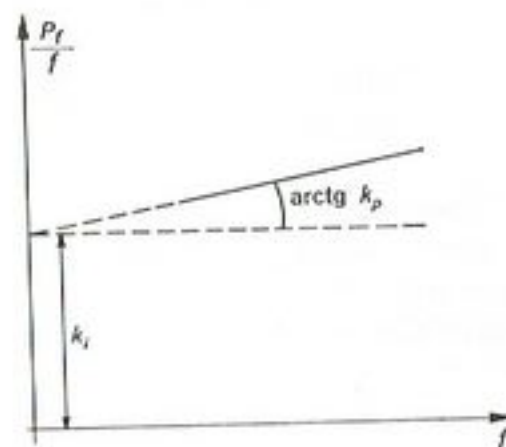
8-5,6. *Separazione delle perdite.*

Per separare le perdite per isteresi da quelle per correnti parassite, si procede alla misura delle perdite totali, a vari valori della frequenza, a parità di induzione.

Se si riportano (fig. 8-59) i valori del rapporto p_f/f fra le perdite misurate e la frequenza, in funzione della frequenza per ogni valore dell'induzione, i punti di misura vengono a disporsi su una retta; l'intersezione di questa retta con l'asse delle ordinate e la sua inclinazione danno i due coefficienti k_i e k_p nella relazione:

Fig. 8-59

$$p_f = p_i + p_p = k_i f + k_p f^2 ;$$

per mantenere costante l'induzione, le misure devono essere eseguite in corrispondenza a valori di tensione indotta proporzionali alla frequenza.

8-5,7. *Misure su piccole quantità di lamierini.*

I miglioramenti che si sono avuti nell'uniformità dei lamierini magnetici hanno reso possibile l'esecuzione di misure riproducibili anche su piccole quantità di materiali, con evidenti vantaggi per la pratica e l'economia nella preparazione del provino. Ciò comporta però, anche per le migliorate caratteristiche dei materiali, la necessità di misurare potenze sempre più piccole.

In alcuni paesi si è normalizzato un apparecchio Epstein con dimensioni ridotte (fig. 8-60) formato da un circuito magnetico di 250 mm di lato

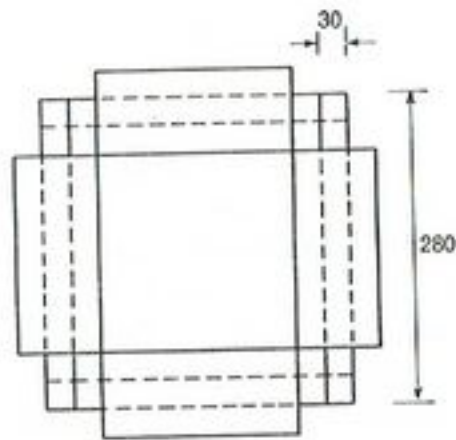



Fig. 8-60

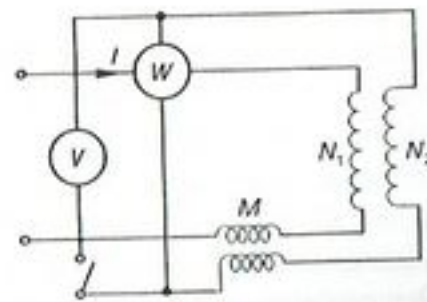



Fig. 8-61

sul quale vengono montati da 0,5 a 2 kg di materiale, preparato come per l'Epstein normale, ma in striscie lunghe 280 mm. I giunti sono così formati da lamierini doppiamente sovrapposti, la cui influenza sulle perdite viene tenuta in conto attribuendo al circuito magnetico la lunghezza fittizia di 940 mm.

Quando il numero dei lamierini diviene piccolo, può risultare importante la correzione per il flusso in aria abbracciato dalla bobina voltmetrica; questo flusso (che è proporzionale alla corrente di eccitazione) può essere compensato da una bobina di mutua induttanza esterna, regolata in modo che la f.e.m. indotta al secondario, in assenza di provino, sia nulla (fig. 8-61).

Una delle maggiori difficoltà è quella di disporre di un wattmetro capace di misurare potenze dell'ordine del watt o minori, senza apprezzabili consumi voltmetrici. Ciò può essere ottenuto con particolari tipi di wattmetri, con sospensioni a nastro, costruiti per basso fattore di potenza, o con adeguate apparecchiature elettroniche.

Si può fare inoltre ricorso a schemi diversi per la misura delle piccole potenze. In particolare lo schema di fig. 8-62 utilizza un potenziometro a coordinate polari per mettere in relazione di ampiezza e fase la tensione $\dot{V}$ e la f.e.m. $\dot{E}_2$; detta P la potenza misurata del wattmetro, la potenza dissipata nel nucleo risulta:

$$P_f = \frac{N_1}{N_2}\dot{E}_2 \times \dot{I} = \frac{N_1}{N_2}\frac{R_2}{R_1+R_2}\dot{V}\times\dot{I} = \frac{N_1}{N_2}\frac{R_2}{R_1+R_2}P\,.$$

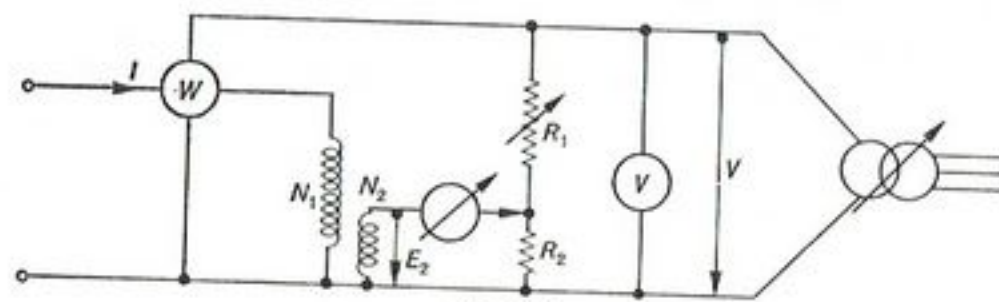



Fig. 8-62

Il metodo ha il vantaggio di non assorbire corrente dall'avvolgimento secondario, che può quindi essere di poche spire, anche non uniformemente distribuite, e di non richiedere correzione per il consumo del wattmetro, al quale può essere applicata la tensione di valore più adatto per una lettura precisa. Poiché però il potenziometro viene azzerato sulla sola frequenza fondamentale, si misura solo la potenza corrispondente a tale frequenza.

Per ottenere analoghi risultati, si può inserire in uscita dall'avvolgimento secondario un opportuno amplificatore, che alimenti i circuiti misuratori

di tensione e la bobina voltmetrica del wattmetro, senza assorbire corrente dal secondario.

La misura delle perdite può anche avvenire con metodi numerici che, mentre il provino percorre il ciclo $H-B$ alla frequenza voluta, campionando i valori della corrente e dell'integrale della f.e.m. secondaria, con assorbimento praticamente nullo. Si calcola quindi l'area del ciclo, che rappresenta l'energia persa in un periodo. Particolare cura deve essere posta nella scelta della frequenza di campionamento, che deve risultare un multiplo intero della frequenza con cui viene effettuato il ciclo, al fine di chiudere correttamente il ciclo stesso.

8-5,8. *Metodi di ponte.*

Quando si vogliano eseguire misure fuori dal campo di impiego dei wattmetri (potenze molto piccole o frequenze elevate) è conveniente far ricorso a metodi di ponte; in tal caso la bobina viene usualmente rappresentata con uno schema equivalente parallelo i cui parametri vengono misurati al ponte di fig. 8-63.

Le condizioni di equilibrio per tale ponte sono:

$$R_3 = R_1\frac{C_2}{C_4}\,; \qquad L_3 = R_1R_4C_2\,;$$

Fig. 8-63

è inoltre:

$$V = E\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+\dfrac{1}{\omega^2C_2^2}}}$$

per cui la potenza dissipata nel provino risulta:

$$P = \frac{V^2}{R_3} = \frac{\omega^2C_2C_4R_1}{1+\omega^2R_1^2C_2^2}E^2\,.$$

Da questa potenza devono essere sottratte le perdite per effetto Joule nell'avvolgimento di eccitazione; ciò può evitarsi modificando il lato 4 del ponte come mostra la fig. 8-64, l'equilibrio è raggiunto, in assenza del provino, con $C_4=0$, agendo sulla capacità C_8, che equilibra la resistenza

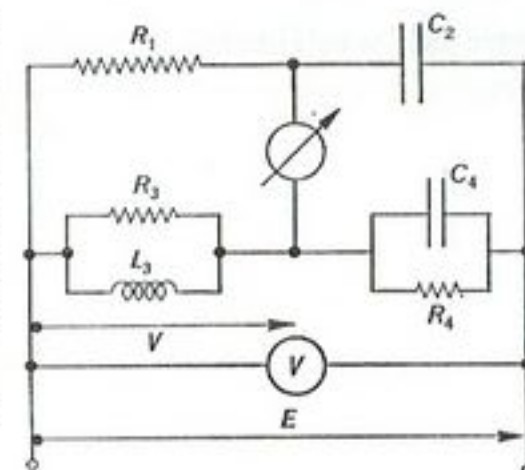
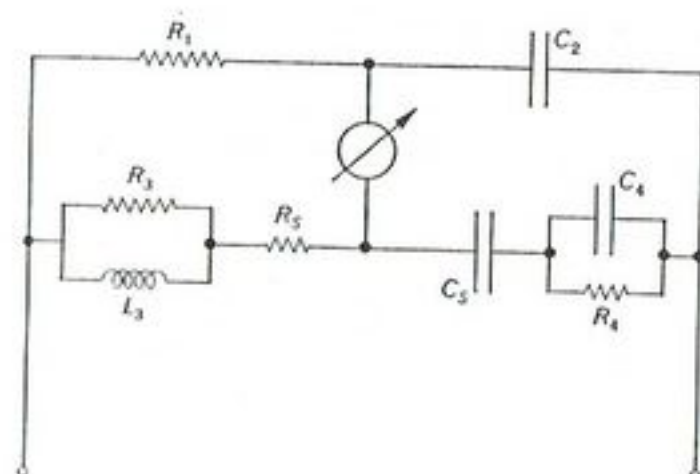



Fig. 8-64

serie dell'avvolgimento di eccitazione:

$$R_5 = \frac{R_1 C_2}{C_5},$$

lasciando alla capacità variabile C_4 il compito di equilibrare la resistenza parallelo R_3; il valore del condensatore C_5 può anche essere calcolato, trattandosi, in genere, di un'impedenza molto bassa rispetto alla impedenza formata dalla R_4, C_4.

Il ponte può altresì essere modificato con schemi più complessi per ottenere misure indipendenti dalle perdite nell'avvolgimento di eccitazione.

Per le frequenze più elevate si eseguono in genere misure di fattore di merito per bobine con o senza nucleo.

8-5,9. *Misure su tratti di circuito magnetico.*

Gli apparecchi più sopra descritti consentono la misura della potenza dissipata in un nucleo magnetico, nel quale si cerca di mantenere un'induzione uniforme; la presenza di traferri in aria non è rilevante, in quanto non dà luogo a perdite.

Esistono vari schemi che consentono la misura della potenza persa in un tratto di circuito magnetico; essi possono ricondursi ai metodi visti in 8-4,4 per rendere trascurabile o compensare la componente attiva della f.m.m. nei restanti tratti del circuito. In particolare, uno schema di compensazione automatica, derivato dal premeametro di Burrows, è illustrato in fig. 8-65. Le bobine di compensazione sono alimentate da un amplificatore da alto guadagno che rende nulla l'indicazione del tensiometro inserito fra i punti A, B. La f.m.m. fornita dalla sorgente è quindi spesa solo

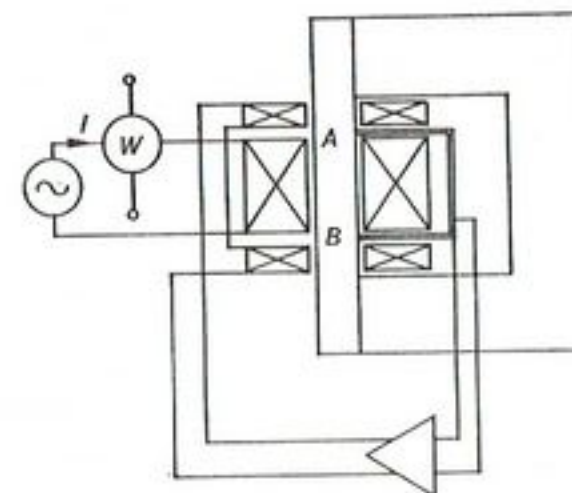



Fig. 8-65

per produrre l'induzione e le corrispondenti perdite del tratto AB, sul quale viene avvolto l'avvolgimento che alimenta (tramite opportuno amplificatore) la voltmetrica del wattmetro W.

8-6. **Prove su basi statistiche.**

8-6,1. *Fondamenti.*

Le tecniche statistiche che maggiormente interessano le misure possono presentare i seguenti aspetti:

a) un aspetto descrittivo, che consente di rappresentare un insieme di dati mediante parametri più sintetici (come la media e la varianza) come già illustrato in 1-7;

b) nel caso in cui si voglia estrarre da un insieme di misure, affette da errori aleatori, il valore più probabile (stima) dei parametri del modello con cui si vuole rappresentare il processo fisico oggetto di misura; il caso più semplice è quello dell'interpolazione lineare (vedi 8-6,2);

c) quando si voglia un giudizio di attendibilità (sempre espresso in termini probabilistici) per una determinata ipotesi, basata su un numero limitato di misure, affette da errori aleatori.

8-6,2. *Interpolazione lineare.*

Si consideri un insieme di n coppie di valori (x_i, y_i) di due variabili; se, per ogni valore di x_i riportiamo, su un piano x, y, il corrispondente

valore y_i, i punti così ottenuti si ripartiscono in modo più o meno raggruppato, che si vorrebbero rappresentare con una curva semplice.

La curva x_i, y_i (dove y_i è eventualmente la media dei valori di y per lo stesso valore x_i) è detta *curva di regressione di y su x* (ed analogamente, invertendo il compito delle variabili). Queste curve rappresentano la dipendenza media di una delle variabili rispetto all'altra; esse possono essere, in prima approssimazione, ricavate tracciando manualmente la curva regolare che meglio si adatta ai vari punti; l'uso di mezzi di calcolo ha reso tuttavia possibili elaborazioni più perfezionate e più complesse.

Si consideri, in primo luogo il caso più semplice in cui la curva cercata si riduce ad una retta di equazione:

$$y = ax + b$$

(interpolazione o regressione lineare).

Se le variazioni di y_i possono essere supposte di tipo casuale, con varianza costante (come è spesso il caso degli errori di misura) la retta che meglio rappresenta la relazione fra le due variabili è quella per cui è minima la deviazione quadratica:

$$\Sigma\{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

fra i valori misurati y_i e quelli letti sulla retta, in corrispondenza dei valori x_i.

Si ricava facilmente, dalla condizione precedente che, detti $\bar{x}$ e $\bar{y}$ i valori medi, σ_x e σ_y gli s.q.m. degli insiemi x_i ed y_i, si ha una retta del tipo:

$$y - \bar{y} = (x - \bar{x})\,\varrho\sigma_y/\sigma_x$$

dove il coefficiente

$$\varrho = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/n\sigma_x\sigma_y$$

ha il significato illustrato in 1-78 e determina la pendenza della retta:

$$a = \varrho\sigma_y/\sigma_x = (n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i)/(n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2)\,.$$

Si può anche scrivere, con analogo ragionamento:

$$x - \bar{x} = (y - \bar{y})\,\varrho\sigma_x/\sigma_y$$

per la retta di regressione di y su x, in generale diversa dalla precedente.

Le due rette passano in ogni caso per il punto medio $(\bar{x}, \bar{y})$, con inclinazione che dipende dal segno di ϱ; per $\varrho = \pm 1$ le due rette coincidono; per $\varrho = 0$ le due rette risultano parallele ai rispettivi assi e non si può quindi parlare di relazione lineare fra le due variabili.

I parametri a e b, così determinati, sono delle stime di variabili aleatorie, con distribuzione normale e rispettivamente varianze:

$$s_a^2 = s^2/\Sigma(x_i - \bar{x})^2$$

$$s_b^2 = s^2\Sigma x_i^2/n\Sigma(x_i - \bar{x})^2$$

che dipendono dal parametro:

$$s^2 = \Sigma(y_i - \bar{y})^2/(n-2)$$

detto varianza della stima di y su x.

Attraverso i valori di queste varianze si possono calcolare i limiti di confidenza delle stime di a e b, a determinati livelli. Dette stime possono anche essere sottoposte a test delle ipotesi [8-6,5]: ad esempio, per verificare l'ipotesi $a = A$, si può usare il parametro:

$$t = (a - A)\sqrt{(n-2)/(1-r^2)}$$

che ha una distribuzione di Student con $n-2$ gradi di libertà.

La determinazione di un valore y_0, corrispondente ad un prefissato valore x_0, ha una sua varianza:

$$s_0^2 = s^2(1/n + (x_0 - \bar{x})^2/\Sigma(x_i - \bar{x})^2)$$

che è tanto minore quanto più il valore cercato è prossimo al valore medio delle x.

Le ipotesi di distribuzione casuale e di varianza costante possono essere, in alcuni casi, non soddisfatte; esistono tuttavia relazioni più complesse, con parametri pesati, o altri metodi (ad esempio, quello di massima verosimiglianza) che, sempre basandosi su una prefissata forma di distribuzione della variabile aleatoria y, forniscono i valori dei parametri a e b, massimizzando la loro probabilità in relazione ai valori osservati.

8-6,3. *Perequazione grafica.*

In molti casi, si vuole esprimere il legame fra due grandezze x e y, di cui si hanno n coppie di valori misurati, attraverso una relazione analitica più complessa di una retta. Ciò può farsi semplicemente, utilizzando le considerazioni e le formule del paragrafo precedente, qualora sia possibile riportarsi ad una relazione lineare, con un opportuno cambio di variabili; ad esempio, la relazione:

$$y = bx^a$$

si riporta facilmente ad una retta, passando ai logaritmi.

Con i moderni mezzi di calcolo, è facile prefissare una relazione analitica fa le variabili x ed y (almeno in un certo ambito di possibilità) ed

individuare corrispondentemente i valori da assegnare ai parametri di tale relazione che soddisfino al criterio del minimo quadrato degli scarti fra i valori osservati y_i e quelli y_c ricavabili analiticamente, per lo stesso valore di x_i (o a criteri analoghi).

Naturalmente, il numero n delle osservazioni deve essere molto maggiore di quello dei parametri che definiscono la relazione, numero che è diverso da caso a caso. La stima di questi parametri deve però essere associata al calcolo del corrispondente limite di confidenza o di opportuni indici che siano in grado di mostrare quanto la relazione ipotizzata si approssimi ai valori misurati.

Uno degli indici più utilizzati a questo scopo è dato da:

$$r^2 = \Sigma(y_c - \bar{y})^2 / \Sigma(y_i - \bar{y})^2 < 1$$

dove $\bar{y}$ è il valore medio delle osservazioni y_i. La sommatoria al denominatore corrisponde alla cosiddetta varianza totale, che comprende tutte le cause che rendono le y_i diverse dal loro valore medio; quella al numeratore è detta varianza spiegabile, in quanto rende conto delle variazioni della y dovute alla sua relazione con la x.

Nel caso di interpolazione lineare, la r coincide con il coefficiente di regressione ϱ più sopra definito. Più questo indice è prossimo all'unità, tanto più si può ritenere che la curva calcolata interpreti la relazione fra le variabili.

La significatività del valore di r si può sottoporre a test statistico. Se, ad esempio, si vuole verificare l'ipotesi $r = 0$, (assenza di correlazione) si usa il parametro:

$$t = r\sqrt{(n-2)/(1-r^2)}$$

che ha la distribuzione di Student, i cui valori, per opportuni livelli di confidenza, possono essere ricavati dalla Tab. 8-2 con $\nu = n - 2$.

Se invece si vuole controllare l'ipotesi di un valore r_0 per il coefficiente di correlazione, si può usare il parametro:

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

che ha distribuzione normale con media:

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_0}{1-r_0}$$

e s.q.m.:

$$\sigma_z = 1/\sqrt{(n-3)}$$

per cui i limiti di confidenza al 95% sono $\bar{z} \pm 1{,}96\sigma_z$.

Si può facilmente comprendere come questo tipo di elaborazione rappresenti un utilissimo mezzo per verificare le ipotesi su cui si basa un determinato modello del sistema da cui si ricavano le osservazioni sperimentali ovvero, dato un modello già collaudato, per eseguire, mediante le stime, delle determinazioni di alcuni suoi parametri.

Al crescere del numero delle variabili e di quello dei parametri, le relazioni possono divenire molto complesse e l'incertezza sulle stime può risultare molto elevata, richiedendo tecniche più sofisticate. In ogni caso, è evidente che i limiti di confidenza sono tanto più stretti quanto più elevato è il numero dei valori misurati, anche se la relazione è, in principio, del tipo della 1-55. Da ciò discende come questi metodi siano utilizzabili soprattutto nel caso dell'acquisizione di numerosissimi dati sperimentali, possibile con metodi automatici.

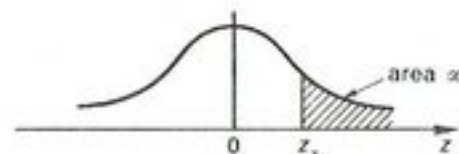
8-6,4. *Stima di parametri.*

Il problema delle determinazione dei parametri di una retta di regressione è un semplice esempio del problema più generale della stima dei parametri di un modello. Essa si basa sulla predisposizione di un adeguato modello in cui le relazioni fra variabili sono funzioni note nella loro forma (come la retta nel caso della regressione), ma contengono dei parametri di cui si vuole determinare il valore.

La presenza di errori e di disturbi di tipo aleatorio fa sì che anche i valori misurati debbano essere considerati delle variabili aleatorie; si deve allora procedere a stimare il valore più probabile dei parametri che interessano, operazione che può essere eseguita in base a principi diversi. Il principio dei minimi quadrati, usato in 8-6,2, è solo un esempio, che si dimostra essere valido solo sotto determinate ipotesi (distribuzione gaussiana degli errori, con varianza costante); in altri casi possono essere utilizzati metodi più complessi (come il principio di massima verosimiglianza) i cui problemi di calcolo sono oggi affrontabili mediante l'uso di calcolatori.

Occorre tuttavia notare che, qualunque sia il metodo utilizzato, la stima porta a valori probabili, con una loro distribuzione di probabilità; occorre allora valutare anche il relativo intervallo di confidenza, ossia l'intervallo di valori in cui può essere compreso il valore del parametro stimato, con una probabilità che sia almeno del 95%. L'intervallo di confidenza è tanto maggiore quanto minore è il numero dei valori misurati, cosicché i metodi di stima, come tutti i metodi statistici, possono essere usati con efficacia solo in presenza di un numero sufficientemente elevato di valori di misura.

Tabella 8-1. *Distribuzione normale*

$$\alpha = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-z^2/2] = \text{Prob}[z > z_\alpha]; \qquad P_0 = \text{Prob}(-z_\alpha < z < z_\alpha) = 1 - 2\alpha$$

z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,7	0,00347	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139

8-6,5. *Test delle ipotesi.*

Per verificare l'attendibilità di un'ipotesi H_0, si utilizzano delle opportune funzioni $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tratte dalle osservazioni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che compongono un campione di n elementi. La grandezza z risulta anch'essa una variabile aleatoria di cui, se è vera l'ipotesi H_0, si può conoscere la distribuzione. Si può allora calcolare la probabilità P_0 che ha il valore z di essere compreso in un prefissato intervallo 2δ, ossia per cui vale la relazione:

$$P(-\delta < z < \delta) = P_0 .$$

L'intervallo 2δ si chiama intervallo di confidenza e il valore di P_0 è detto livello fiduciario (o di confidenza). Se, dato un livello fiduciario elevato (95 o 99% ad esempio), il valore di z è esterno all'intervallo corrispondente, l'ipotesi H_0 può essere respinta con ristretto margine d'errore (fig. 8-66).

La scelta della funzione z, e quindi della sua distribuzione, determina la « potenza » della prova statistica, ossia la sua capacità di evitare conclusioni errate. La determinazione delle z e delle loro distribuzioni esula tuttavia dei limiti della presente trattazione, che si limiterà ad alcuni casi di particolare importanza, che fanno riferimento a campioni estratti da insiemi che possiedono distribuzione normale.

Fig. 8-66

In questo tipo di prove rientra, ad esempio, quanto già detto, in altra forma, in 1-7,7. Dato un insieme di osservazioni di valore medio $\bar{x}$ e s.q.m. σ, si vuole sapere se un singolo valore x_i possa essere affetto da un errore grossolano tale da non farlo rientrare nell'insieme dato.

L'ipotesi H_0 è l'appartenenza di x_i all'insieme dato, che ha distribuzione normale, caratterizzata da $\bar{x}$ e σ; presa allora la grandezza:

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$$

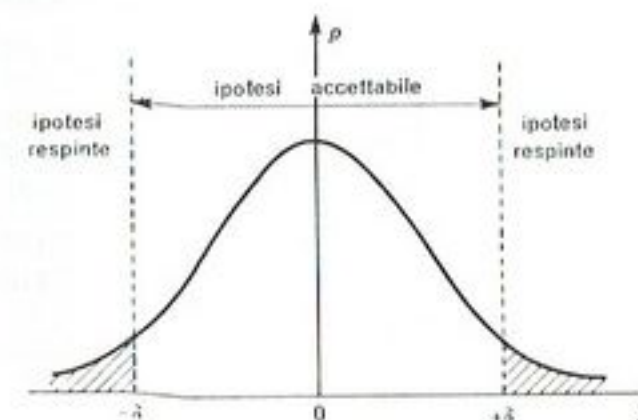
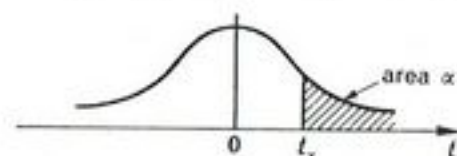
essa ha, nell'ipotesi H_0, una distribuzione normale tale per cui con $P_0 = 0{,}95$ (ossia $\alpha = 0{,}025$ in Tab. 8-1), si ha:

$$-1{,}96 < z < 1{,}96 .$$

Tabella 8-2. *Distribuzione t di Student*

$\text{Prob}[t > t_\alpha] = \alpha; \qquad P_0 = 1 - 2\alpha$

	α				
ν	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617

Se il valore di z risultante dagli esperimenti è all'esterno di tale intervallo, è da respingere l'ipotesi che x_i appartenga all'insieme; se è all'interno, tale ipotesi può essere accettata.

8-6,6. *Applicazioni.*

Nelle applicazioni tecniche delle misure si ha spesso a che fare con campioni numerosi, in cui gioca un ruolo importante il *grado di libertà* della grandezza z, che è funzione del numero n delle osservazioni.

Si considerino i casi seguenti, che risultano di maggior uso.

a) Si abbia un insieme con distribuzione normale di media M, da cui è estratto un campione di n osservazioni di media $\bar{x}$ e varianza σ^2. Se si assume la variabile aleatoria:

$$t = \sqrt{n-1}\,\frac{\bar{x} - M}{\sigma}$$

per essa risulta una distribuzione (detta di Student) indipendente da σ e da M. Per questa distribuzione si può calcolare, dato il valore P_0, l'intervallo $2t_p$ per cui sia:

$$P(-t_p < t < t_p) = P_0\,;$$

il valore di t_p è espresso in tavole o grafici, in funzione del grado di libertà $\nu = n - 1$ (vedi Tab. 8-2).

In pratica, avendo un campione di n osservazioni $(x_1, \ldots, x_n)$ di media:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

stimando da esso la varianza [1-8,3]:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

si può controllare l'ipotesi che esso appartenga ad un insieme con distribuzione normale a media nota M (con varianza σ^2).

Esempio. Un campione di 10 elementi ha valore medio 53 e $\sigma = 3$; si vuole controllare l'ipotesi che esso appartenga ad un insieme di media 50; posto:

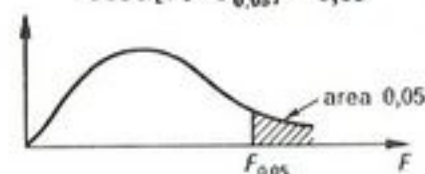
$$t = \frac{53-50}{3}\sqrt{10-1} = 3{,}00$$

si ha per

$P_0 = 0{,}95$	$t_p = \pm 2{,}26 < 3{,}00$	ipotesi non accettata
$P_0 = 0{,}99$	$t_p = \pm 3{,}25 > 3{,}00$	ipotesi accettabile.

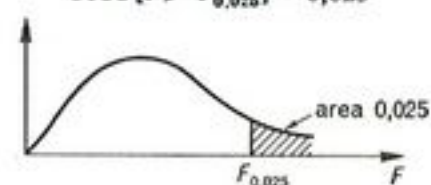
In questo caso si parla di prove non decisive, cosicché sono richieste ulteriori indagini, per esempio un campione più numeroso.

Tabella 8-3 *a*. *Distribuzione di F*

Prob $[F > F_{0,05}] = 0,05$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245	246
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,69
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,84
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,73	4,70	4,68	4,66	4,64	4,60
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,92
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,49
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,20
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	2,99
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,83
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,70
12	4,75	3,89	3,49	3,25	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,60
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,51
14	4,60	3,74	3,35	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,44
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,33
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,25
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,18
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,13
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18	2,15	2,13	2,09
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,05
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,02
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	1,99
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,95	1,90
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,92	1,89	1,85
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,90	1,95	1,92	1,89	1,86	1,82
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,84	1,82	1,77
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,82	1,79	1,75
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80	1,77	1,74	1,69
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,77	1,74	1,71	1,66
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,72	1,69	1,64

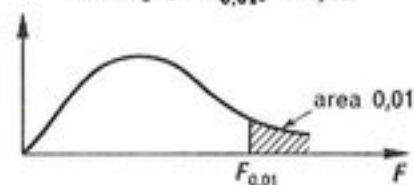
18	20	22	24	26	28	30	40	50	60	80	100	200	500	∞	ν_1 / ν_2
247	248	249	249	249	250	250	251	252	252	252	253	254	254	254	1
19,4	1,95	19,5	1,95	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	2
8,67	8,66	8,65	8,64	8,63	8,62	8,62	8,59	8,59	8,57	8,56	8,55	8,54	8,53	8,53	3
5,82	5,80	5,79	5,77	5,76	5,75	5,75	5,72	5,70	5,69	5,67	5,66	5,65	5,64	5,63	4
4,58	3,56	4,54	4,53	4,52	4,50	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41	4,41	4,39	4,37	4,37	5
3,90	3,87	3,86	3,84	3,83	3,82	3,81	3,77	3,75	3,74	3,72	3,71	3,69	3,68	3,67	6
3,47	3,44	3,43	3,41	3,40	3,39	3,38	3,34	3,32	3,30	3,29	3,27	3,25	3,24	3,23	7
3,17	3,15	3,13	3,12	3,10	3,09	3,08	3,04	3,02	3,01	2,99	2,97	2,95	2,94	2,93	8
2,96	2,94	2,92	2,90	2,89	2,87	2,86	2,83	2,80	2,79	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71	9
2,80	2,77	2,75	2,74	2,72	2,71	2,70	2,66	2,64	2,62	2,60	2,59	2,56	2,55	2,54	10
2,67	2,65	2,63	2,61	2,59	2,58	2,57	2,53	2,51	2,49	2,47	2,46	2,43	2,42	2,40	11
2,57	2,54	2,52	2,51	2,49	2,48	2,47	2,43	2,40	2,38	2,36	2,35	2,32	2,31	2,30	12
2,48	2,46	2,44	2,42	2,41	2,39	2,38	2,34	2,31	2,30	2,27	2,26	2,23	2,22	2,21	13
2,41	2,38	2,37	2,35	2,33	2,32	2,31	2,27	2,24	2,22	2,20	2,19	2,16	2,14	2,13	14
2,30	2,28	2,25	2,24	2,22	2,21	2,19	2,15	2,12	2,11	2,08	2,07	2,04	2,02	2,01	16
2,22	2,19	2,17	2,15	2,13	2,12	2,11	2,06	2,04	2,02	1,99	1,98	1,95	1,93	1,92	18
2,15	2,12	2,10	2,08	2,07	2,05	2,04	1,99	1,97	1,95	1,92	1,91	1,88	1,86	1,84	20
2,10	2,07	2,05	2,03	2,01	2,00	1,98	1,94	1,91	1,89	1,86	1,85	1,82	1,80	1,78	22
2,05	2,03	2,00	1,98	1,97	1,95	1,94	1,89	1,86	1,84	1,82	1,80	1,77	1,75	1,73	24
2,02	1,99	1,97	1,95	1,93	1,91	1,90	1,84	1,82	1,80	1,78	1,76	1,73	1,71	1,69	26
1,99	1,96	1,93	1,91	1,90	1,88	1,87	1,82	1,79	1,77	1,74	1,73	1,69	1,67	1,65	28
1,96	1,93	1,91	1,89	1,87	1,85	1,84	1,79	1,76	1,74	1,71	1,70	1,66	1,64	1,62	30
1,87	1,84	1,81	1,79	1,77	1,76	1,74	1,69	1,66	1,64	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51	40
1,81	1,78	1,76	1,74	1,72	1,70	1,69	1,63	1,60	1,58	1,54	1,52	1,48	1,46	1,44	50
1,78	1,75	1,72	1,70	1,68	1,66	1,65	1,59	1,56	1,53	1,50	1,48	1,44	1,41	1,39	60
1,73	1,70	1,68	1,65	1,63	1,62	1,60	1,54	1,51	1,48	1,45	1,43	1,38	1,35	1,32	80
1,71	1,68	1,65	1,63	1,61	1,59	1,57	1,52	1,48	1,45	1,41	1,39	1,34	1,31	1,28	100
1,66	1,62	1,60	1,57	1,55	1,53	1,52	1,46	1,41	1,39	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19	200
1,62	1,59	1,56	1,54	1,52	1,50	1,48	1,42	1,38	1,34	1,30	1,28	1,21	1,16	1,11	500
1,60	1,57	1,54	1,52	1,50	1,48	1,46	1,39	1,35	1,32	1,27	1,24	1,17	1,11	1,00	∞

Tabella 8-3 *b*. *Distribuzione di F*

Prob $[F > F_{0,025}] = 0,025$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	973	977	980	983	987
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,4	14,3	14,3	14,3	14,2
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,79	8,75	8,72	8,69	8,64
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,57	6,52	6,49	6,46	6,41
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,41	5,37	5,33	5,30	5,25
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,71	4,67	4,63	4,60	4,54
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,42	4,36	4,30	4,24	4,20	4,16	4,13	4,08
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,91	3,87	3,83	3,80	3,74
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,66	3,62	3,58	3,55	3,50
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,47	3,43	3,39	3,36	3,30
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,32	3,28	3,24	3,21	3,15
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,20	3,15	3,12	3,08	3,03
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,09	3,05	3,01	2,98	2,92
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,93	2,89	2,85	2,82	2,76
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,81	2,77	2,73	2,70	2,64
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,72	2,68	2,64	2,60	2,55
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53	2,47
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,59	2,54	2,50	2,47	2,41
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42	2,36
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,37	2,32
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,28
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,94	2,62	2,53	2,45	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,15
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,62	2,55	2,46	2,38	2,32	2,26	2,22	2,18	2,14	2,08
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,22	2,17	2,13	2,09	2,03
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,36	2,38	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	1,97
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,94
200	5,10	3,76	3,18	2,85	2,63	2,47	2,33	2,26	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93	1,87
500	5,05	3,72	3,14	2,81	2,59	2,43	2,32	2,22	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,83
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,99	1,94	1,90	1,87	1,80

18	20	22	24	26	28	30	40	50	60	80	100	200	500	∞	ν_1 / ν_2
990	993	995	997	999	1000	1001	1006	1008	1010	1012	1013	1016	1017	1018	1
39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	2
14,2	14,2	14,1	14,1	14,1	14,1	14,1	14,0	14,0	14,0	14,0	14,0	13,9	13,9	13,9	3
8,60	8,56	8,53	8,51	8,49	8,48	8,46	8,41	8,38	8,36	8,33	8,32	8,29	8,27	8,26	4
6,37	6,33	6,30	6,28	6,26	6,24	6,23	6,18	6,14	6,12	6,10	6,08	6,05	6,03	6,01	5
5,21	5,17	5,14	5,12	5,10	5,08	5,07	5,01	4,98	4,96	4,93	4,92	4,88	4,86	4,85	6
4,50	4,47	4,44	4,42	4,39	4,38	4,36	4,31	4,28	4,25	4,23	4,21	4,18	4,16	4,14	7
4,03	4,00	3,97	3,95	3,93	3,91	3,89	3,84	3,81	3,78	3,76	3,74	3,70	3,68	3,67	8
3,70	3,67	3,64	3,61	3,59	3,58	3,56	3,51	3,47	3,45	3,42	3,40	3,37	3,35	3,33	9
3,45	3,42	3,39	3,37	3,34	3,33	3,31	3,26	3,22	3,20	3,17	3,15	3,12	3,09	3,08	10
3,26	3,23	3,20	3,17	3,15	3,13	3,12	3,06	3,03	3,00	2,97	2,96	2,92	2,90	2,88	11
3,11	3,07	3,04	3,02	3,00	2,98	2,96	2,91	2,87	2,85	2,82	2,80	2,76	2,74	2,72	12
2,98	2,95	2,92	2,89	2,87	2,85	2,84	2,78	2,74	2,72	2,69	2,67	2,63	2,61	2,60	13
2,88	2,84	2,81	2,79	2,77	2,75	2,73	2,67	2,64	2,61	2,58	2,56	2,53	2,50	2,49	14
2,72	2,68	2,65	2,63	2,60	2,58	2,57	2,51	2,47	2,45	2,42	2,40	2,36	2,33	2,32	16
2,60	2,56	2,53	2,50	2,48	2,46	2,44	2,38	2,35	2,32	2,29	2,27	2,23	2,20	2,19	18
2,50	2,46	2,43	2,41	2,39	2,37	2,35	2,29	2,25	2,22	2,19	2,17	2,13	2,10	2,09	20
2,43	2,39	2,36	2,33	2,31	2,29	2,27	2,21	2,17	2,14	2,11	2,09	2,05	2,02	2,00	22
2,36	2,33	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21	2,15	2,11	2,08	2,05	2,02	1,98	1,95	1,94	24
2,31	2,28	2,24	2,22	2,19	2,17	2,16	2,09	2,05	2,03	1,99	1,97	1,92	1,90	1,88	26
2,27	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,11	2,05	2,01	1,98	1,94	1,92	1,88	1,85	1,83	28
2,23	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,01	1,97	1,94	1,90	1,88	1,84	1,81	1,79	30
2,11	2,07	2,03	2,01	1,98	1,96	1,94	1,88	1,83	1,80	1,76	1,74	1,69	1,66	1,64	40
2,03	1,99	1,96	1,93	1,91	1,88	1,87	1,80	1,75	1,72	1,68	1,66	1,60	1,57	1,55	50
1,98	1,94	1,91	1,88	1,86	1,83	1,82	1,74	1,70	1,67	1,62	1,60	1,54	1,51	1,48	60
1,93	1,88	1,85	1,82	1,79	1,77	1,75	1,68	1,63	1,60	1,55	1,53	1,47	1,43	1,40	80
1,89	1,85	1,81	1,78	1,76	1,74	1,71	1,64	1,59	1,56	1,51	1,48	1,42	1,38	1,35	100
1,82	1,78	1,74	1,71	1,68	1,66	1,64	1,56	1,51	1,47	1,42	1,39	1,32	1,27	1,23	200
1,78	1,74	1,70	1,67	1,64	1,62	1,60	1,51	1,46	1,42	1,37	1,34	1,25	1,19	1,14	500
1,75	1,71	1,67	1,64	1,61	1,59	1,57	1,48	1,43	1,39	1,33	1,30	1,21	1,13	1,00	∞

Tabella 8-3 *c*. *Distribuzione di F*

Prob $[F > F_{0,01}] = 0{,}01$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16
1	405	500	540	563	576	586	593	598	602	606	608	611	613	614	617
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1	27,0	26,9	26,8
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,4	14,3	14,2	14,2
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,96	9,89	9,82	9,77	9,68
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,66	7,60	7,52
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,41	6,36	6,27
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,61	5,56	5,48
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,05	5,00	4,92
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,65	4,60	4,52
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,34	4,29	4,21
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,10	4,05	3,97
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,91	3,86	3,78
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,75	3,70	3,62
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,50	3,45	3,37
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,32	3,27	3,19
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,05
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	3,07	3,02	2,94
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,98	2,93	2,85
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96	2,90	2,86	2,78
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90	2,84	2,79	2,72
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,79	2,74	2,66
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,61	2,56	2,48
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,79	2,70	2,63	2,56	2,51	2,46	2,38
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,44	2,39	2,31
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42	2,36	2,31	2,23
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37	2,31	2,26	2,19
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27	2,22	2,17	2,09
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,28	2,22	2,17	2,12	2,04
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18	2,13	2,08	2,00

18	20	22	24	26	28	30	40	50	60	80	100	200	500	∞	ν_1 / ν_2
619	621	622	623	624	625	626	629	630	631	633	633	635	636	637	1
99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	2
26,8	26,7	26,6	26,6	26,6	26,5	26,5	26,4	26,4	26,3	26,3	26,2	26,2	26,1	26,1	3
14,1	14,0	14,0	13,9	13,9	13,9	13,8	13,7	13,7	13,7	13,6	13,6	13,5	13,5	13,5	4
9,61	9,55	9,51	9,47	9,43	9,40	9,38	9,29	9,24	9,20	9,16	9,13	9,08	9,04	9,02	5
7,45	7,40	7,35	7,31	7,28	7,25	7,23	7,14	7,09	7,06	7,01	6,99	6,93	6,90	6,88	6
6,21	6,16	6,11	6,07	6,04	6,02	5,99	5,91	5,86	5,82	5,78	5,75	5,70	5,67	5,65	7
5,41	5,36	5,32	5,28	5,25	5,22	5,20	5,12	5,07	5,03	4,99	4,96	4,91	4,88	4,85	8
4,86	4,81	4,77	4,73	4,70	4,67	4,65	4,57	4,52	4,48	4,44	4,42	4,36	4,33	4,31	9
4,46	4,41	4,36	4,33	4,30	4,27	4,25	4,17	4,12	4,08	4,04	4,01	3,96	3,93	3,91	10
4,15	4,10	4,06	4,02	3,99	3,96	3,94	3,86	3,81	3,78	3,73	3,71	3,66	3,62	3,60	11
3,91	3,86	3,82	3,78	3,75	3,72	3,70	3,62	3,57	3,54	3,49	3,47	3,41	3,38	3,36	12
3,72	3,66	3,62	3,59	3,56	3,53	3,51	3,43	3,38	3,34	3,30	3,27	3,22	3,19	3,16	13
3,56	3,51	3,46	3,43	3,40	3,37	3,35	3,27	3,22	3,18	3,14	3,11	3,06	3,03	3,00	14
3,31	3,26	3,22	3,18	3,15	3,12	3,10	3,02	2,97	2,93	2,89	2,86	2,81	2,78	2,75	16
3,13	3,08	3,03	3,00	2,97	2,94	2,92	2,84	2,78	2,75	2,70	2,68	2,62	2,59	2,57	18
2,99	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,78	2,69	2,64	2,61	2,56	2,54	2,48	2,44	2,42	20
2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,69	2,67	2,58	2,53	2,50	2,45	2,42	2,36	2,33	2,31	22
2,79	2,74	2,70	2,66	2,63	2,60	2,58	2,49	2,44	2,40	2,36	2,33	2,27	2,24	2,21	24
2,72	2,66	2,62	2,58	2,55	2,53	2,50	2,42	2,36	2,33	2,28	2,25	2,19	2,16	2,13	26
2,65	2,60	2,56	2,52	2,49	2,46	2,44	2,35	2,30	2,26	2,22	2,19	2,13	2,09	2,06	28
2,60	2,55	2,51	2,47	2,44	2,41	2,39	2,30	2,25	2,21	2,16	2,13	2,07	2,03	2,01	30
2,42	2,37	2,33	2,29	2,26	2,23	2,20	2,11	2,06	2,02	1,97	1,94	1,87	1,83	1,80	40
2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,10	2,01	1,95	1,91	1,86	1,82	1,76	1,71	1,68	50
2,25	2,20	2,15	2,12	2,08	20,5	2,03	1,94	1,88	1,84	1,78	1,75	1,68	1,63	1,60	60
2,17	2,12	2,07	2,03	2,00	1,97	1,94	1,85	1,79	1,75	1,69	1,66	1,58	1,53	1,49	80
2,12	2,07	2,02	1,98	1,94	1,92	1,89	1,80	1,73	1,69	1,63	1,60	1,52	1,47	1,43	100
2,02	1,97	1,93	1,89	1,85	1,82	1,79	1,69	1,63	1,58	1,52	1,48	1,39	1,33	1,28	200
1,97	1,92	1,87	1,83	1,79	1,76	1,74	1,63	1,56	1,52	1,45	1,41	1,31	1,23	1,16	500
1,93	1,88	1,83	1,79	1,76	1,72	1,70	1,59	1,52	1,47	1,40	1,36	1,25	1,15	1,00	∞

Come applicazione, si considerino le differenze $d_i = x_i - x_i'$ che si ottengono dalle misure di una certa caratteristica, effettuate su n oggetti, rispettivamente prima e dopo un dato loro trattamento; per verificare se è significativo o meno l'effetto del trattamento, si applica il procedimento sopra indicato, ipotizzando che tali differenze provengano da una distribuzione con media M. In particolare, l'ipotesi $M = 0$ corrisponde a supporre che il trattamento abbia effetto nullo.

b) Si abbiano due campioni x_i e y_i, rispettivamente di n_x ed n_y osservazioni; si vuol verificare l'ipotesi che le medie delle distribuzioni da cui provengono differiscano fra loro della quantità D (nel caso sia $D = 0$, l'ipotesi è che le due distribuzioni abbiano la stessa media, ossia che le differenze riscontrate fra i campioni siano solo dovute alla loro natura aleatoria).

Posto allora:

$$t = (\bar{x} - \bar{y} - D)\sqrt{\nu}/\sigma_d$$

con:

$$\nu = n_x + n_y - 2$$

e

$$\sigma_d^2 = \{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 + \Sigma(y_i - \bar{y})^2\}(1/n_x + 1/n_y)$$

il parametro t segue la stessa legge illustrata al punto *a*) ed è perciò utilizzabile con le stesse tavole.

c) Un test analogo può farsi prendendo come base le varianze σ_x^2 e σ_y^2 di due campioni, attraverso la variabile:

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \qquad (\text{con } \sigma_x > \sigma_y)$$

formata dal rapporto delle due varianze. Questo test serve, in pratica, a verificare l'ipotesi di uguale varianza nei due insiemi da cui sono stati tratti i campioni x e y; nel caso di misure della stessa grandezza, eseguite con metodi o strumenti diversi, consente ad esempio di verificare l'ipotesi di equivalenza dei due metodi di misura.

I valori di F per vari livelli di confidenza sono dati in Tabella 8-3 in funzione dei gradi di libertà $\nu_1 = n_x - 1$ e $\nu_2 = n_y - 1$.

d) Per un campione di n osservazioni di varianza σ^2, estratto da un insieme a distribuzione normale con varianza incognita s^2, la grandezza (chi-quadrato):

$$\chi^2 = \frac{n\sigma^2}{s^2}$$

ha una distribuzione definita dal grado di libertà $\nu = n - 1$. Fissata pertanto una probabilità P_0, si ricava (vedi Tab. 8-4) il corrispondente valore limite χ_p^2; da questo si può calcolare con intervallo di confidenza P_0 il valore incognito di s^2:

$$s^2 = \frac{n\sigma^2}{\chi_p^2}.$$

e) Si supponga un insieme di possibili eventi $E_1, \dots, E_k$ per i quali, su n osservazioni, sono state rilevate le frequenze $o_1, \dots, o_k$ mentre le rispettive frequenze teoriche, che ci si aspetta in base all'ipotesi H_0, sono $l_1, \dots, l_k$.

Se si pone:

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(o_j - l_j)^2}{l_j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{o_j^2}{l_j} - n \qquad (\text{essendo } \sum o_j = \sum l_j = n)$$

il valore di χ^2, che è tanto maggiore quanto maggiore è la discrepanza fra le frequenze osservate e quelle attese, ha la distribuzione da cui è stata ricavata la Tabella 8-4, con $\nu = k - 1$.

Esempio. Con $n = 200$ lanci di una moneta, si è avuto $o_1 = 115$ volte testa e $o_2 = 85$ volte croce, mentre ci si aspetterebbe, nell'ipotesi di lancio non viziato: $l_1 = l_2 = 100$. Essendo:

$$\chi^2 = \frac{115^2}{100} + \frac{85^2}{100} - 200 = 4{,}50; \qquad \nu = 2 - 1 = 1$$

si ha per $P_0 = 0{,}95$; $\chi_\nu = 3{,}84$: per $P_0 = 0{,}99$; $\chi_\nu = 6{,}63$.

Si deduce che l'ipotesi che il lancio sia imparziale non è accettabile al livello del 5% di probabilità e lo è invece a livello dell'1% di probabilità.

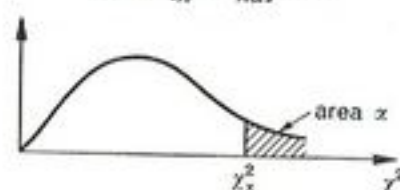
8-6,7. *Controllo statistico della qualità.*

Le caratteristiche di un prodotto industriale dipendono dai processi utilizzati per la fabbricazione, processi che non possono mantenersi sempre rigorosamente uguali, ma possono variare entro limiti determinati (tolleranze) senza pregiudicare l'utilizzazione del prodotto stesso; superando invece tali limiti, la produzione è dichiarata difettosa.

Il controllo della qualità, in sede di fabbricazione, si esegue prelevando dei campioni ed esaminandoli sia sotto l'aspetto qualitativo (pezzo buono o cattivo) sia sotto quello quantitativo. Ogni campione fornisce una stima dei parametri caratteristici della distribuzione dei pezzi prodotti (media, s.q.m., ecc.), in base alla quale si deve decidere se la produzione è al livello di qualità previsto o se invece si deve intervenire in esso.

Il caso più semplice si ha considerando l'insieme ideale della produzione distribuito con legge normale, di cui si conosce (eventualmente attraverso

Tabella 8-4. *Distribuzione di chi-quadrato*

$\text{Prob}[\chi^2 > \chi^2_\alpha] = \alpha$

ν	α: 0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005
1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
120	83,85	86,92	91,58	95,70	100,62	140,23	146,57	152,21	158,95	163,65

un numero sufficiente di misure su pezzi « buoni ») la media M e la varianza σ^2. Se si prelevano campioni di n pezzi, la loro media m ha una probabilità P di essere compresa nella fascia di valori:

$$m_i = M \pm k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

con k fattore che dipende dal valore di P (ad esempio $k = 1{,}96$ per $P = 0{,}950$; $k = 3{,}09$ per $P = 0{,}999$). Segnando su un grafico, in funzione del tempo, i valori di m_i (fig. 8-67), ci si può accorgere quando essi si avvicinino a limiti prefissati di vigilanza o di intervento.

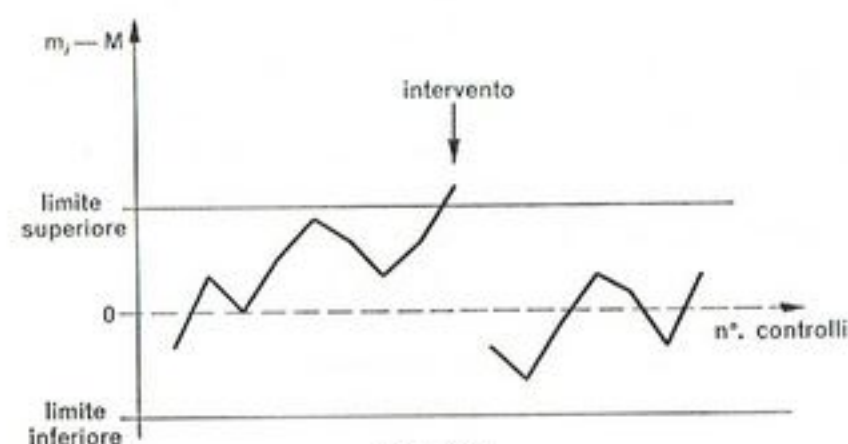



Fig. 8-67

In modo analogo si può agire sullo scarto quadratico medio del campione o sul suo campo di variazione:

$$w = x_{max} - x_{min}$$

che sono pure grandezze aleatorie con distribuzioni calcolabili. Un aumento dello s.q.m. o del campo di variazione indica prevalentemente la maggior influenza di un fattore fortuito (giochi meccanici da usura, disattenzioni per stanchezza, ecc.) mentre uno spostamento significativo della media può indicare l'intervento di un fattore sistematico.

L'efficienza del controllo statistico deve essere a sua volta verificata dalla conoscenza della probabilità di non intervento, in funzione dei valori fissati per i limiti di tale intervento.

8-6,8. *Collaudo statistico.*

Al momento dell'accettazione di una partita, formata da un numero N molto grande di pezzi uguali, si vuole stabilire se essi rispondono a predeterminati requisiti (qualitativi e quantitativi) senza eseguire la verifica

su ognuno di essi. È infatti noto che, oltre a comportare aggravi di tempo e di spesa, le verifiche eseguite su un gran numero di pezzi non sono del tutto sicure, per le disattenzioni a cui danno luogo.

Il controllo avviene quindi in base a un piano preordinato, su n pezzi; se il numero d di pezzi difettosi non supera il limite prefissato, la partita è accettata, in caso contrario è rifiutata. Si possono stabilire anche due limiti: «a» di accettazione e «$r > a$» di rifiuto, fra loro diversi, e stabilire che quando sia:

$$a < d < r$$

il controllo debba essere esteso ad un numero maggiore di pezzi, con nuovi criteri di accettazione o di rifiuto.

Stabilire un piano di campionamento corrisponde ad individuare una curva del tipo di fig. 8-68 (curva operativa) che riporta la probabilità di accettazione del lotto, in funzione della sua percentuale di elementi difettosi; queste curve, che dipendono dai valori di N, n, a, r, possono essere calcolate secondo apposite procedure. Il valore del livello di qualità accettabile (LQA) si fa corrispondere ad una probabilità di accettazione del 95% (il che comporta un rischio del 5% per il fornitore di vedersi rifiutare un lotto che soddisfi alle prescrizioni); la massima percentuale di difettosi tollerata nel lotto (MPTD) si fa invece corrispondere ad una

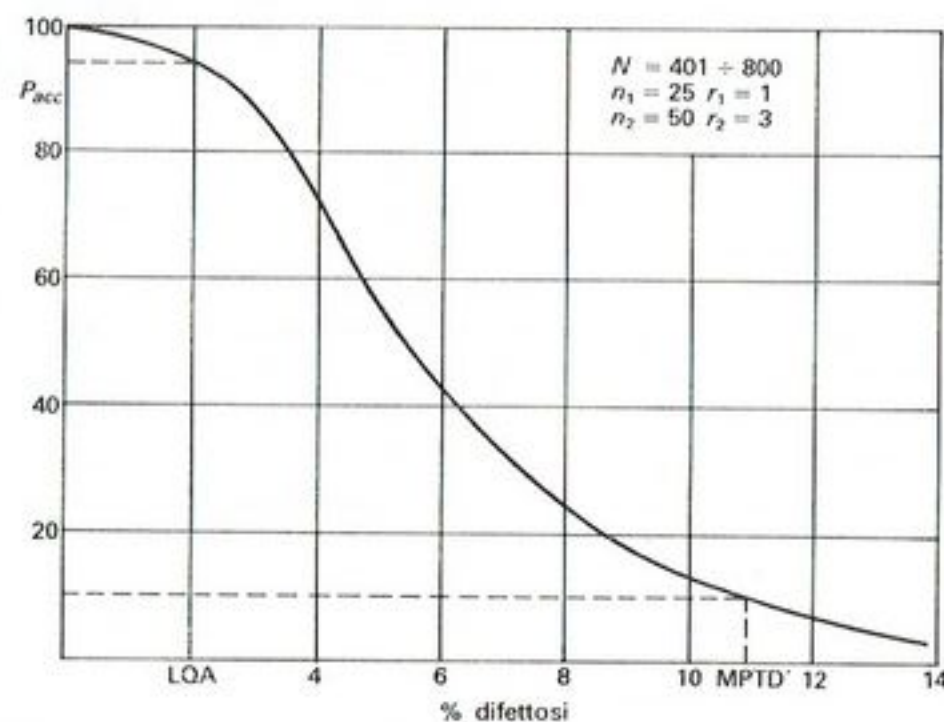



Fig. 8-68

probabilità prefissata (generalmente non superiore al 10%) che rappresenta il rischio del cliente di accettare una partita con tale percentuale di difettosi.

8-7. **Analisi di segnali nel tempo.**

8-7,1. *Generalità.*

L'analisi di una grandezza variabile, in funzione del tempo, può essere eseguita sia con metodi analogici sia con metodi numerici, al fine di ricercarne i parametri caratteristici che maggiormente interessano. La forma analogica consente l'elaborazione direttamente su grandezze elettriche, generalmente in forma continua, mentre la forma numerica opera su un numero discreto di valori quantizzati. Ciò comporta, ad esempio, di sostituire le operazioni di integrazione con sommatorie.

8-7,2. *Misura dei valori medi e quadratici medi.*

Sia data la registrazione nel tempo di una tensione $x(t)$; il suo valore medio μ può essere stimato dalla relazione:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \qquad [8\text{-}14]$$

facendo la media dei valori istantanei di $x(t)$ in un intervallo di campionamento opportuno T; solo per T tendente a infinito il valore di $\hat{\mu}$ tende al vero valore medio μ.

Questa operazione può essere eseguita da un voltmetro per tensione continua, preferibilmente da un voltmetro numerico con periodo di campionamento T; essa può anche essere compiuta interponendo tra il segnale e il voltmetro un circuito filtrante passa basso (spesso del tipo RC, fig. 8-69, in cui si pone $2RC = T$).

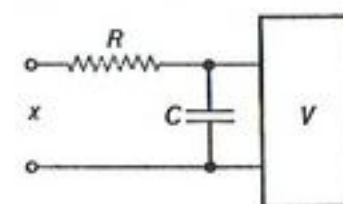



Fig. 8-69

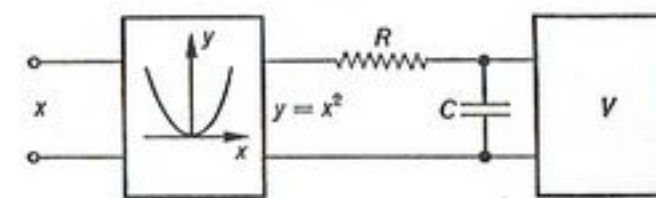



Fig. 8-70

Più complessa è la stima del valore quadratico medio ψ^2 attraverso la:

$$\hat{\psi}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$$

perché essa richiede un elemento a caratteristica quadratica (fig. 8-70) che preceda il filtro, elemento che è spesso di difficile realizzazione.

L'errore proprio di una simile misura può essere stimato in funzione del tempo T d'integrazione, della larghezza di banda B della registrazione e della varianza σ^2 del segnale:

$$\sigma^2 = \psi^2 - \mu^2 ;$$

si può mostrare che l'errore che si commette è, sotto certi presupposti, dipendente dalla quantità:

$$\varepsilon = \frac{1}{2BT}\,\frac{\sigma}{\mu} . \qquad [8\text{-}15]$$

Il tempo T di integrazione dovrà pertanto essere il maggiore possibile, pur non potendo in ogni caso superare la durata totale della registrazione T_r.

Per precisare il rapporto numerico fra l'errore e la grandezza ε definita dalla [8-15] è necessario conoscere la funzione di densità di probabilità della $x(t)$; un caso semplice, riferito al caso di rumore bianco, è riportato in 1-9,6.

8-7,3. *Misure di densità di probabilità.*

Si consideri la registrazione $x(t)$; la sua funzione di densità di probabilità $p(x)$ può essere stimata dalle grandezze

$$p(x) = \frac{T_x}{Tw}$$

dove T_x è il tempo in cui la $x(t)$ è nell'intervallo w di valori intorno al valore x (fig. 8-71). Ciò richiede le seguenti operazioni:

a) filtraggio dell'ampiezza del segnale con una finestra di ampiezza w;

b) misura del tempo totale T_x in cui il segnale si trova nell'interno della finestra;

c) il valore così ottenuto deve essere mediato nel tempo T e diviso per il valore w.

L'operazione va ripetuta per diversi valori di x, in modo da ottenere l'intera funzione $p(x)$. L'apparecchiatura necessaria è schematizzata in

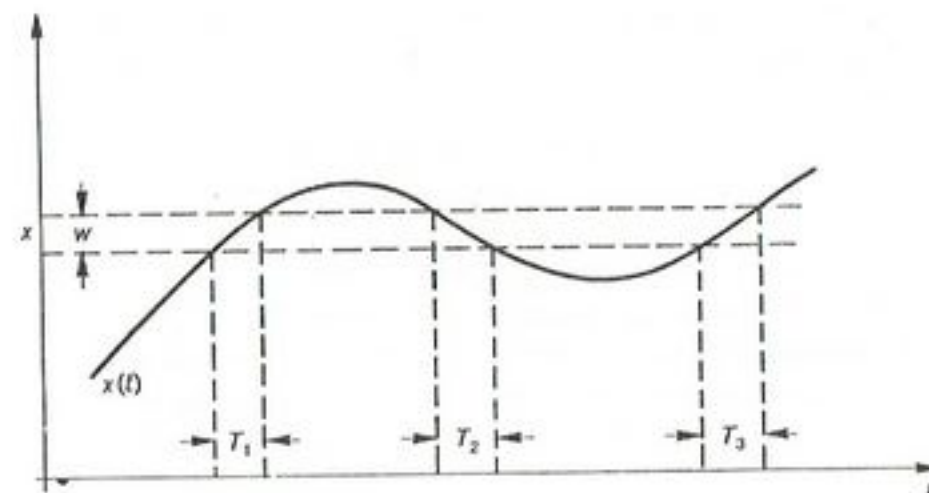



Fig. 8-71

fig. 8-72; essa contiene un generatore di tensione continua di riferimento G con la cui uscita x viene confrontato il segnale $x(t)$; un comparatore C apre una porta P ogni qualvolta sia: $x - w/2 < x(t) < x + w/2$; all'apertura della porta corrisponde il passaggio di impulsi prodotti da un oscilla-

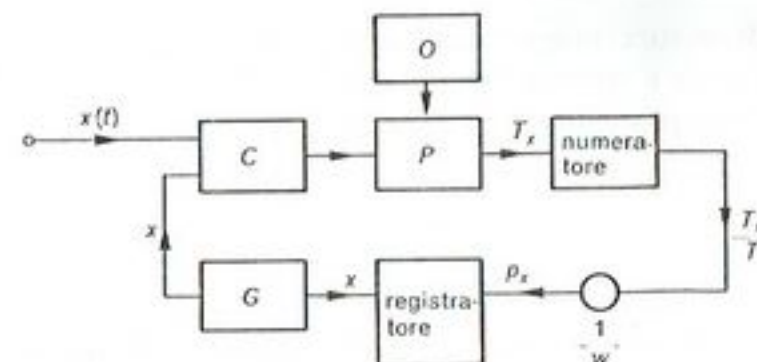



Fig. 8-72

tore O, impulsi di cui poi si fa il conteggio e la media nel tempo T. In alcuni casi, la scansione è ripetuta per i diversi valori di x, in altri esistono più comparatori, convenientemente sfalsati fra loro. I segnali, convenientemente divisi per la costante strumentale w sono portati ad un registratore, in corrispondenza ai vari valori di x.

8-7,4. *Misura di funzioni di autocorrelazione.*

Data una registrazione $x(t)$, la sua funzione di autocorrelazione $R(\tau)$ può essere stimata dalla relazione:

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,d\tau$$

attraverso cioè operazioni che possono essere eseguite in un'apparecchiatura con lo schema già dato in fig. 1-53. Il ritardo τ può esser tenuto fisso, per ogni scansione in tutto il campo di t, e successivamente variato di un gradino. Quanto minore è questo gradino, tanto migliore è la risoluzione della funzione $R(\tau)$ ma aumenta il numero di scansioni necessarie. Una regola semiempirica indica la necessità di almeno due valori di $R(\tau)$ per ciclo di ogni frequenza che si vuol definire.

L'aumento del numero di scansioni non può d'altra parte essere compensato da una loro maggior velocità, perché questa è limitata a una scansione per ogni tempo d'integrazione T, e questo deve essere tenuto il più alto possibile, per evitare errori nell'esecuzione della media.

Esempio. Si abbia una registrazione della durata $T_r = 5$ s di cui si vuole la funzione di autocorrelazione per τ fra 0 e 0,5 s, con una risoluzione di 2,5 ms (200 punti). Il valore più elevato del tempo d'integrazione T corrisponde alla durata T_r, per cui anche la scansione avrà la stessa durata ed in definitiva saranno necessari $200 \times 5 = 1000$ s $= 17$ minuti.

8-7,5. *Analisi numerica.*

Nel caso di misure numeriche, i dati di una registrazione sono campionati nel tempo e quantizzati in ampiezza. Come si è visto in 1-3,7, l'intervallo di campionamento t_c comporta una frequenza di taglio f_s data dalla relazione:

$$f_s = \frac{1}{2t_c}.$$

Per quanto riguarda la quantizzazione di un segnale continuo in gradini di ampiezza Δ, si può dimostrare che si ottiene un errore che ha valore massimo $\pm\Delta/2$ (vedi 4-4,7) ma valor medio nullo e varianza $\Delta^2/12$; questo errore può quindi essere considerato come un rumore, che può essere tenuto piccolo a piacere con una quantizzazione appropriata.

La registrazione viene ricondotta ad un insieme di N valori;

$$u_i = u(t_0 + it_c) \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

la cui media vale:

$$\bar{u} = \frac{1}{N}\sum_1^N u_i\,;$$

si può dimostrare che, per la valutazione degli errori, si può assumere, al posto della [8-15] la grandezza:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Molto spesso si preferisce lavorare con grandezze a valor medio nullo, ponendo:

$$x_i = u_i - \bar{u}\,.$$

Se la registrazione $x(t)$ è periodica con frequenza fondamentale f_0, essa si può rappresentare in serie di Fourier; se essa non è periodica ma ha durata finita T_r, si può sempre considerare $f_0 = 1/T_r$: Si possono allora trovare i coefficienti A_q, B_q di una serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{q=1}^{N/2}\left(A_q \cos\frac{2\pi qt}{T_r} + B_q \operatorname{sen}\frac{2\pi qt}{T_z}\right)$$

che corrispondono ai punti x_i. Il calcolo è eseguibile con appositi programmi su calcolatore numerico.

Per una data registrazione $x(t)$ si può anche determinare lo spettro di frequenza; questa operazione richiede però in genere tempi di calcolo molto elevati ed è stata, in pratica, sostituita con algoritmi particolari (FFT = fast Fourier transform) di calcolo molto più rapido, che può essere eseguito con calcolatori anche di modeste dimensioni.

8-7,6. *Funzioni di autocorrelazione.*

Per un insieme di N dati x_i, a valor medio nullo, la funzione di autocorrelazione per $\tau = rt_c$ può essere stimata dalla relazione:

$$\hat{R}(rt_c) = \frac{1}{N-r}\sum_1^{N-r} x_i\, x_{i+r} \qquad r = 0, 1, \ldots, m\,.$$

Il massimo valore m da assegnare al parametro di ritardo r va scelto con un compromesso (usualmente intorno a 0,1 N); con un valore troppo piccolo rispetto ad N, la stima infatti perderebbe in risoluzione, se troppo grande, ne scapiterebbe la precisione.

La stima delle funzioni di correlazione serve anche al calcolo delle densità spettrali di potenza, che sono ad esse legate (vedi 1-9,4).

8-7,7. *Convoluzione e deconvoluzione di segnali.*

Si consideri un sistema lineare, con funzione di trasferimento $G(p)$; fra le L-trasformate dei segnali d'ingresso $x(t)$ e d'uscita $y(t)$ sussiste la relazione:

$$\bar{y}(p) = G(p)\bar{x}(p)$$

che permette, date due delle tre grandezze, di determinare la terza. Questa operazione può essere eseguita usando metodi di elaborazione di segnali numerici, utilizzando le loro trasformate di Fourier.

Se è data la $y(t)$ e la funzione di trasferimento del sistema, si può cercare di ricostruire il segnale d'ingresso $x(t)$. Il problema, che analiticamente appare abbastanza semplice, può essere in pratica reso molto difficile del fatto che la $G(\omega)$ può essere molto piccola o addirittura nulla in un certo campo di frequenze. È inoltre sempre presente del rumore, per cui i valori delle trasformate $y(\omega)$, $G(\omega)$, $x(\omega)$ sono da considerarsi, per ogni valore di ω, delle variabili aleatorie che richiedono, per la determinazione del loro valore medio, tecniche appropriate.

Altrettanto può dirsi del problema di identificazione della funzione di trasferimento G, una volta note $x(t)$ e $y(t)$, per cui si preferisce spesso far riferimento a funzioni di autocorrelazione e di densità spettrale di potenza (vedi 1-9.7).

8-7,8. *Analisi di osservazioni singole.*

Lo schema a blocchi di fig. 8-73 rappresenta l'insieme di operazioni per l'analisi di una singola osservazione, per mezzo di tecniche sia analogiche che numeriche.

Il primo passo è rappresentato dalla conversione, mediante un opportuno trasduttore, della grandezza fisica da misurare in un segnale analogico (generalmente di tensione) o in una registrazione numerica. Mentre il primo può essere rappresentato sia in forma continua che campionata, la registrazione numerica comporta sempre un campionamento la cui

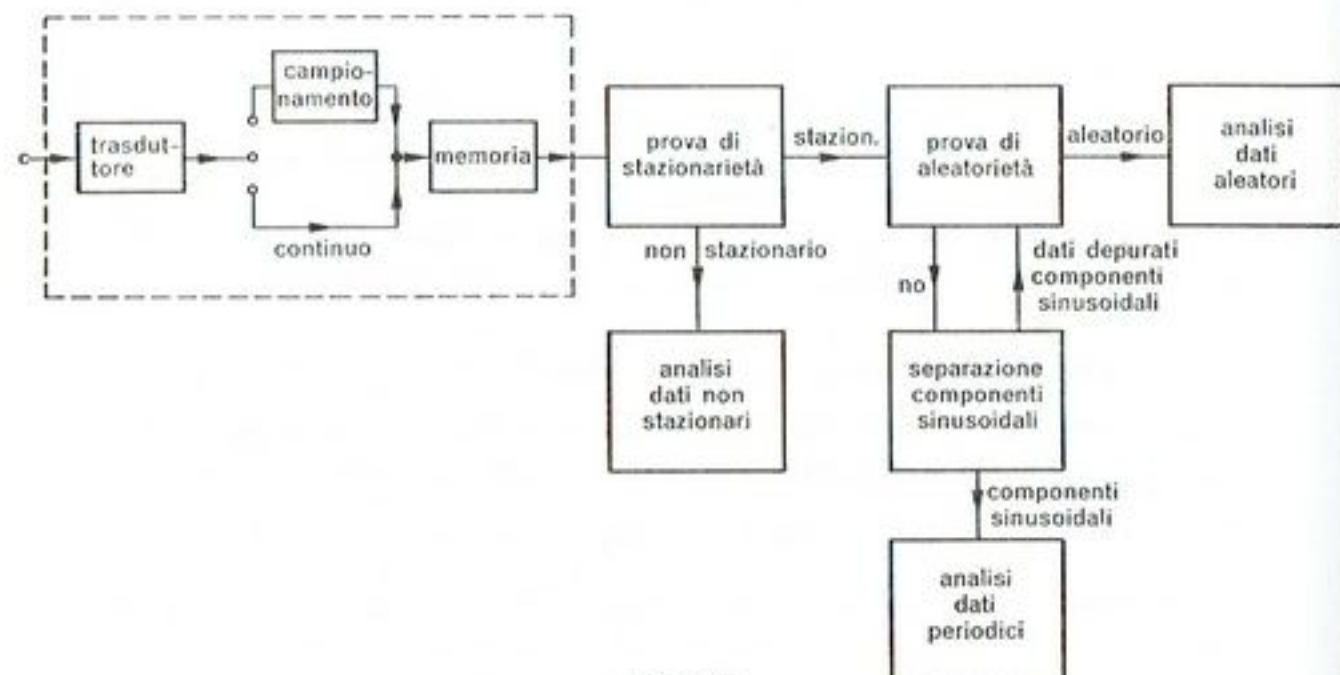



Fig. 8-73

frequenza e durata devono essere scelte opportunamente. Generalmente, questa fase è seguita da un'opportuna memorizzazione dei valori campionati, utili per le successive manipolazioni a cui dovranno essere sottoposti.

È quindi necessario distinguere le osservazioni che sono stazionarie [1-9,8] e aleatorie da quelle che sono o non stazionarie o non aleatorie; ciò avviene mediante opportune « prove », ma molto spesso l'operatore esercitato può eseguire una prima cernita, specie se sono presenti notevoli componenti sinusoidali: per questo esame è utile una rappresentazione grafica su uno schermo oscillografico.

8-7,9. *Prova di stazionarietà.*

La condizione di stazionarietà comporta che le proprietà statistiche del processo siano invarianti rispetto ad una traslazione dei tempi, in pratica che il valore di particolari parametri calcolati in una sequenza di brevi intervalli di tempo non vari in modo significativo fra un intervallo e l'altro.

Si fa in generale l'ipotesi semplificativa secondo cui è sufficiente verificare la stazionarietà per i valori medi e le funzioni di autocorrelazione. È tuttavia necessario che l'osservazione duri un tempo molto lungo rispetto alle fluttuazioni aleatorie, in modo da mettere in evidenza eventuali termini di lunga durata che non siano stazionari.

A questo scopo si ottiene la registrazione del campione in N intervalli uguali di tempo, per ognuno dei quali si calcola il valore medio $\bar{x}_i$ e il valore quadratico medio $\bar{x}_i^2$ (con $i = 1, 2, ..., N$). Su queste sequenze di dati si possono eseguire delle prove, a carattere statistico, che indichino se le variazioni siano maggiori di quelle dovute al solo campionamento.

Per i fenomeni stazionari, la successiva prova di aleatorietà si riduce ad un controllo della presenza o meno di termini sinusoidali, dovuti a componenti periodiche o quasi-periodiche. Questa presenza può essere messa in evidenza, oltre che da una semplice ispezione dei dati, da un calcolo della loro distribuzione di densità spettrale di potenza o della funzione di autocorrelazione. Queste funzioni assumono infatti, in presenza di componenti sinusoidali anche di valore limitato, aspetti caratteristici che consentono di determinare i parametri fondamentali (ampiezze, frequenze) di tali componenti.

L'analisi dei dati aleatori, ma stazionari, può successivamente svilupparsi determinandone le funzioni caratteristiche, relative alle ampiezze o alle frequenze, indicate al cap. 1-9, mentre i dati non stazionari richiedono particolari, più complesse, considerazioni.

Il volume, frutto di una lunga esperienza sia d'insegnamento sia di pratiche applicazioni, è destinato principalmente agli studenti universitari che seguano un corso base di Misure Elettriche.
Esso comprende, dopo i fondamenti generali delle misure, una sintetica descrizione del funzionamento dei diversi strumenti elettromeccanici ed elettronici e delle principali apparecchiature ausiliarie utilizzate nelle misure elettriche.
Vengono quindi analizzati i più comuni metodi di misura, industriali e di laboratorio, per ognuno dei quali vengono valutate le diverse cause d'incertezza e descritte le più importanti applicazioni.

Giuseppe Zingales, ordinario di Misure Elettriche presso la Facoltà d'Ingegneria di Padova, è autore di oltre cento pubblicazioni scientifiche e di alcuni volumi didattici e redattore di diverse riviste specializzate, italiane e straniere. Partecipa all'attività di numerosi organismi tecnici e normativi, nazionali e internazionali, nel settore delle Misure, in particolare in vari Comitati Tecnici sia della Commissione Elettrotecnica Internazionale sia dell'IMEKO (Confederazione Internazionale delle Misure), di cui è stato nominato Presidente nel 1991.

ISBN 88-7750-002-6

L. 50.000
università
PREZZO DI VENDITA AL PUBBLICO